Une introduction à l'Analyse :

I. Fondements : Théorie des ensembles et algèbre

Guglielmo Pasa

v. 1.60 (26 mars 2017)

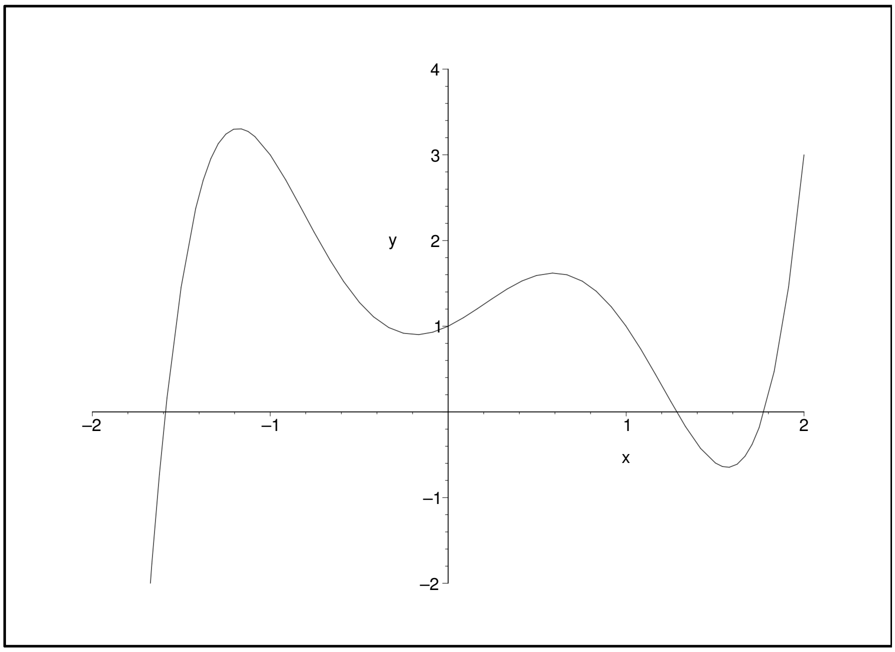


Table des matières

Préambule

Défense du projet de ce livre

Cet ouvrage est le fruit du travail de nombreuses années, durant lesquelles l'auteur a enseigné l'algèbre et les mathématiques [1] en général.

Il est très rapidement apparu, à l'auteur, que l'absence d'un manuel de fond sur les fondements des mathématiques et sur la manière dont l'algèbre peut surgir des ces fondations est très problématique dans l'enseignement des mathématiques, mais plus encore dans leur apprentissage.

Sans avoir un point de vue fondamental, il est tout simplement impossible d'avoir une explication convaincante à bon nombre de questions. Les réponses que l'on peut donner ont alors la fâcheuse tendance à augmenter l'incertitude de l'apprenant qui reste alors sur son doute. Loin de devenir un instrument de conviction, les mathématiques deviennent un outil douteux, dans lequel on cache des raisonnements vagues, par tout un ensemble de symboles obscurs.

Le seul moyen de présenter une argumentation saine et claire, consiste à la fois à donner les moyens, à l'apprenant, de comprendre ce qui est exposé, en lui montrant les principes de base et à construire, en montrant clairement le lien avec ces principes, l'édifice magnifique des mathématiques.

L'algèbre est la pierre angulaire des mathématiques, car dans toutes les spécialisations de celle-ci, on essaie souvent de se ramèner à un problème d'algèbre. Elle contient en outre suffisamment de richesses pour permettre à l'abstraction mentale de se développer chez l'apprenant.

Dans l'algèbre on trouve le cœur des problèmes parmi les plus passionnants de l'histoire des mathématiques. Ne serait-ce que pour mentionner le célèbre *dernier théorème de Fermat*, conjecture des plus simples, dont la démonstration a tenu en échec de nombreux mathématiciens, et non des moindres, jusqu'à la fin du XXe siècle. [2] Évidemment, les problèmes les plus simples à exprimer, ne sont pas forcément les plus simples à résoudre. C'est ainsi qu'il fallut attendre 1995 pour que le mathématicien Andrew Wiles donne la preuve formelle de ce fameux théorème.

Tout cela illustre que le monde des mathématiques est très vaste et que même dans la partie restreinte de l'algèbre, on peut faire énormément de choses, comme l'attestent les nombreuses conjectures encore sans démonstration définitive.

Cela montre l'importance des causes premières, pour la clarification des idées. Contrairement aux sciences humaines, en mathématique on a la chance de connaître les principes de base. C'est à ces principes, ces vérités, ces *axiomes* comme disent les mathématiciens, que doivent être ramenés les raisonnements que l'on fait. Ceci, afin que tout le monde tombe d'accord sur les propositions faites. Il est entendu que tout le monde est d'accord, à priori sur ces principes premiers, évidemment.

C'est grâce aux axiomes, que l'on peut tendre vers un accord universel. Sans axiomes, les mathématiques ne seraient qu'une foison d'opinions et comme le montrent les médias, nous le savons bien, des soi-disant vérités qui n'ont pour fondement que les opinions, les préjugés propres à chacun de nous, notre culture, ces vérités donc, sont différentes pour chacun de nous. Ainsi, ce n'est pas étonnant qu'il y ait tant de difficultés pour nous comprendre et tomber d'accord. C'est même normal.

Le cas des mathématiques et des sciences, dans une moindre mesure toutefois, est assez exceptionnel. En effet, il est très difficile de parvenir à remonter à de véritables évidences que tout le monde puisse admettre sans trop de difficulté comme axiomes. Et même en mathématique, ce n'est pas toujours l'accord parfait. Ainsi, loin de porter un jugement négatif sur les sciences humaines, il convient de réaliser que la situation des

1. Sans vouloir animer ou alimenter un débat stérile, l'auteur utilisera tantôt le pluriel ou le singulier pour la mathématique ou les mathématiques dans un sens largement égal.

2. Pierre de Fermat (1601–1665), en annotation à *l'Arithmétique de Diophante*, a conjecturé que l'équation

$$x^n + y^n = z^n,$$

ne contient de solutions entières pour x, y et z que si la puissance n est plus petite ou égale à 2. Il disait en avoir trouvé une petite preuve élégante, mais la marge du livre étant trop petite, il n'avait pas la place pour la noter.

mathématiques est assez remarquable. C'est probablement la raison des essais d'imitation des autres domaines de la connaissance qui y réussissent plus ou moins bien.

C'est un des grands succès du XX^{e} siècle (probablement de même importance que la physique quantique, la relativité, la découverte de l'ADN, etc.) que d'avoir réussi à trouver un jeu d'axiomes pour l'algèbre qui a permis de consolider tous les formalismes alors utilisés.

Loin d'être un obstacle à l'étude, c'est justement la voie facile. Comprendre les raisons première (qui par définition doivent être suffisamment simple pour qu'elle puissent être admises sans preuve) permet de comprendre pourquoi les propositions suivantes sont correctes ou fausses. En dehors de ces raisons profondes, tout essai d'explication est voué à un rapport à l'expérience concrète et donc à un manque conceptuel. C'est de ces manques que finissent par surgir les doutes, les conflits et les mauvaises décisions.

Si tout le monde est d'accord sur les principes premiers. Si tous les raisonnements ramènent les vérités à ces principes premiers, tout le monde restera d'accord. C'est ainsi que les mathématiques peuvent progresser. C'est ainsi que l'apprentissage des mathématiques permet d'apprendre à aller de l'avant.

Le but, ici, n'est pas de se remplir la tête de formules et de cas particuliers. C'est plutôt d'apprendre les vérités essentielles et de comprendre comment on peut justifier une proposition de façon convaincante.

Évidemment, il faudra quand même apprendre beaucoup de choses, pour les mémoriser. Mais l'idée est que ces éléments d'études vont permettre de généraliser, d'avoir une vue d'ensemble cohérente, rigoureuse et précise.

C'est pourquoi, dans cet ouvrage on a essayé d'être aussi rigoureux, précis et cohérent que possible.

Enfin cet ouvrage est une initiation à l'analyse, dans le sens que tout y est préparer pour pouvoir ensuite aborder l'étude des fonctions. Il manque encore un chapitre sur les fonctions trigonométriques et surtout sur les fonctions exponentielles et logarithmes, que des éditions suivantes devraient inclure.

Dans le même esprit que cet ouvrage, un livre de géométrie plane (axiomatique et analytique) et d'analyse sont en préparation.

Avertissements

Le présent document se veut autant exempt d'erreur que possible, mais, malgré toute l'attention et tout le soin mis en œuvre, des corrections sont sûrement encore nécessaires. Si vous en trouvez ou désirez porter une contribution ou une amélioration, vous pouvez les communiquer directement à l'auteur à l'adresse e-mail

guglielmo.pasa@eduvs.ch.

Ce document peut être redistribué sans le consentement explicite de l'auteur et sans autorisation pour autant que le copyright et la notice ici présente soient conservés.

Ce document a été écrit en LaTeX, avec les options de AMS-LaTeX , `ifpdf, graphicx, epsfig, psfig, amsmath, amssymb, amsthm, hyperref, colortbl, colordvi, ifthen, mdframed, pgf, tikz, fontenc, bookmark, hyperxmp` et quelques autres packages et options de l'auteur.

Objectifs

Objectifs

Nous commencerons par donner les objectifs [3] de ce cours. Ils devraient guider l'apprenant tout au long de son étude.

Objectifs généraux

L'enseignement des mathématiques permet à l'élève d'acquérir un outil intellectuel sans lequel, malgré des dons d'intuition ou d'invention, il ne progresserait pas dans la connaissance scientifique au-delà de certains seuils.

Cet outils, comme science de la quantité, du modèle et de la structure déductive est particulièrement adapté pour traiter les concepts abstraits de toutes sortes que l'on trouve dans les sciences exactes ou expérimentales et dans certaines sciences humaines et sociales.

L'enseignement doit montrer que les mathématiques ne sont pas qu'un langage à l'aide duquel une question scientifique peut être posée et résolue, mais est un vaste corps de méthodes, de raisonnements et de structures dont le langage est précis et rigoureux.

Le monde des mathématiques, riche, abstrait et structuré, est un champ de connaissances que l'homme, depuis l'Antiquité, cherche à élargir et compléter par une recherche et une remise en cause continues. L'enseignement doit faciliter l'approche des mathématiques et donner l'envie et le goût de s'y intéresser.

Objectifs par période

Période I(année 1 et 2)

Connaissances L'élève connaît les principaux objets et méthodes mathématiques :

en arithmétique Les règles du calcul avec leurs conventions d'écriture

en algèbre Le calcul littéral, les équations et les inéquations

en géométrie La géométrie élémentaire et la géométrie vectorielle.

Aptitudes L'élève est capable

— de faire preuve d'aisance dans l'utilisation de ses connaissances mathématiques,
— de maîtriser les règles, les principes et les contraintes du raisonnement logique,
— d'imaginer des situations géométriques,
— de formuler des propositions d'une manière claire et précise,
— d'accepter l'effort, de faire preuve de persévérance, d'être imaginatif, curieux et ouvert.

Programme

Nous donnons encore ci-après le programme officiel de l'enseignement secondaire II en Valais.

Programme par année

<u>Année 1</u>

Algèbre

Vocabulaire mathématique Proposition, implication, réciproque, équivalence, contraposition, théorèmes et axiomes ; quelques méthodes de démonstration ; les quantificateurs.

3. Ces objectifs sont les objectifs officiels du programme-cadre de mathématique dans le degré secondaire en Valais

Les ensembles Ensembles, sous-ensembles et complémentaire d'une partie ; opérations sur les parties d'un ensemble.

L'ensemble des nombres réels Bonne technique de calcul dans $\mathbb{R}$; calculs de puissances dans $\mathbb{R}$; propriétés des inégalités dans $\mathbb{R}$; calculs avec des racines ; notation scientifique.

Les polynômes Monômes, polynômes ; identités remarquables ; réduire et factoriser des polynômes ; additionner, soustraire, multiplier et diviser des polynômes ; amplifier et simplifier des fractions algébriques ; calculs avec des fractions algébriques.

Les équations du premier degré Résolution des équations du premier degré ; discuter une équation paramétrique ; résoudre des problèmes du premier degré à une inconnue.

Inéquations à une inconnue Résoudre une équation du premier degré à une inconnue ; signe du binôme ; résoudre et discuter une inéquation paramétrique.

Systèmes du premier degré Résoudre et discuter des systèmes de deux équations à deux inconnues ; systèmes de n équations à n inconnues ($n \leq 4$) ; résoudre des problèmes du premier degré à plusieurs inconnues ; systèmes d'inéquations à une inconnue.

Géométrie

Notions de base Notions fondamentales et axiomes de base de la géométrie ; propriétés des triangles ; droites perpendiculaires ; droites parallèles.

Les figures Les quadrilatères ; les droites remarquables du triangle ; le cercle.

Les triangles Le théorème de Thalès (Relégué en 2e année).

Année 2

Trinôme du second degré Racines du trinôme, signe du trinôme, inéquations du deuxième degré.

Fonctions Définitions et propriétés, composition des fonctions, fonction réelle, ensemble de définition, représentation graphique, croissance et décroissance, réciproque d'une fonction, fonctions élémentaires.

Trigonométrie dans le triangle Relations trigonométriques dans le triangle rectangle, théorème du sinus et du cosinus, résolution de triangles (Relégué en 3e année).

Plan vectoriel Vecteurs du plan, addition et multiplication par un réel, combinaison linéaire, bases.

Considérations méthodologiques pour l'étudiant

La méthode générale à suivre lors de l'étude vise à se concentrer dès le début de chaque chapitre sur les questions essentielles auxquelles le chapitre apporte les réponses. À cette fin, on trouvera, en fin de chapitre, une section « Ce qu'il faut retenir »qui met en évidence les points dont la connaissance est requise pour la formation de base.

Chaque chapitre est accompagné d'une série de questions sur les notions qu'il introduit et pour lesquelles l'étudiant va chercher les réponses dans le corps du chapitre. Des *questions rapides* accompagneront le corps du chapitre qui permettent de faire de petites révisions au fur et à mesure que l'on avance dans la matière. Des exemples illustrent la matière introduite avec des exercices résolus. Enfin un recueil d'exercices permet à l'étudiant de s'exercer aux méthodes introduites.

Comme pour tous les domaines de la connaissance, l'apprentissage des mathématiques fait appel à la mémoire et il n'est pas du tout contre l'esprit scientifique d'apprendre “par cœur”. La démarche usuelle, et qui est conseillée, consiste à lire une fois le chapitre afin de se faire une idée globale du sujet. Ensuite reprendre, section par section, le contenu du chapitre et progressivement apprendre les notions introduites.

Première partie

Logique

Chapitre 1

Logique

Le but de ce chapitre est de donner la marche à suivre pour mener des raisonnements cohérents, voire simplement corrects. Ces démarches seront utilisées dans les démonstrations pour argumenter des preuves relativement à des propriétés que possèdent certains objets mathématiques. Les méthodes d'argumentation ont un champ d'application qui est bien plus large que celui des mathématiques. Il peut, et devrait idéalement, s'appliquer dans notre vie de tous les jours.

La logique se veut un cadre abstrait dans lequel on montre comment passer de certains énoncés que l'on considère comme vrai à des conclusions que l'on croit être vraies. S'il est possible de passer des énoncés vrais à la conclusion en utilisant les règles de la logique, on pourra affirmer que la conclusion est également vraie.

L'histoire de la logique remonte à la naissance de l'homme. Tous nos actes sont dictés par la logique et, de façon pratique, seule notre connaissance limitée, nous mène à de mauvaises conclusions, en général.

Par exemple, c'est la logique qui nous guide lorsque nous avons faim. L'expérience nous a montré à maintes reprises que si l'on a faim et que l'on mange, la faim diminue. Le raisonnement logique nous pousse alors à manger dès que l'on a faim, afin d'être rassasié.

Il y a là une idée de causalité, qui ne fait pas partie, à proprement parler, de la logique.

Globalement, la logique, du grec $\lambda o \gamma o \sigma$ le discours, serait plutôt l'art de bien conduire un discours, de manière cohérente.

De fait, la logique est un ensemble de techniques qui vont nous permettre de voir clair dans certains énoncés mathématiques, afin de pouvoir les justifier correctement.

En mathématique, nous partons d'un certain nombre (restreint) de postulats que l'on considère comme vrais (les *axiomes*). Partant de ces vérités premières, nous essayerons de prouver qu'il découle de ces axiomes un certain nombre de conséquences (les *théorèmes*) qui seront automatiquement vraies, puisque les axiomes de départ sont vrais par définition.

Dans ce chapitre nous nous contenterons d'une version très simplifiée de la logique formelle du premier ordre. Le but n'étant pas d'explorer le monde de la logique en tant que branche à part entière, mais simplement de prendre contact avec les éléments de logique nécessaires pour faire des mathématiques.

En toute rigueur, la logique mathématique est une logique du deuxième ordre, puisqu'elle fait appel à plusieurs types d'objets différents : on quantifie sur des éléments et des ensembles, des éléments et des fonctions, etc. et non pas uniquement sur des objets de même nature.

Malgré tout, les logiques d'ordre supérieur utilisent les notions de logiques du premier ordre, auxquels obéit le calcul des prédicats (ou propositions) présenté ci-après. Au lieu de prédicat ou de variable propositionnelle nous utiliserons simplement le mot *proposition* sans distinction.

Le lecteur désireux de s'initier à la logique formelle d'aujourd'hui peut consulter les ouvrages, plus [DNR01, Riv89] ou moins [Tar69, Car66] ardus, mentionnés dans la bibliographie. D'autres n'en parlent qu'en introduction [Sch91, p.13–22]. Ces ouvrages mentionnent le côté *méta* des mathématiques, la *métamathématique*, i. e.[1] la théorie du langage et des constructions des mathématiques.

1.1 Énoncés et propositions

Nous commencerons par supposer l'existence de symboles. Pratiquement cela revient à se donner les moyens d'écrire quelque chose. Certains des symboles que nous utiliserons ont un sens bien défini en logique, puisqu'ils représentent des opérations que l'on effectue sur certains énoncés (comme $\neg, \vee$ etc.). Ce sont des symboles de *connecteurs*. Les autres symboles peuvent servir à composer des messages. L'ensemble des symboles que l'on utilise constitue le *langage* de la théorie que l'on développe.

1. L'abrévition i. e. vient du latin *id est* et signifie « c'est-à-dire ». Elle sera souvent utilisée dans cet ouvrage.

On peut distinguer, dans un langage donné, les symboles de constantes (qui représentent quelque chose de figé), les symboles de variables (qui indiquent une position dans une phrase ou une expression : x dans une équation, p et q dans les expressions logiques, x dans $p(x)$ où p est une proposition, etc.) et les symboles de connecteurs déjà mentionnés.

Les phrases et expressions de la langue courante, de même que les énoncés mathématiques, seront représentés par un symbole en logique. Ainsi, si l'on utilise la phrase « il fait beau » dans le cadre de notre étude, on écrira, en lieu et place de celle-ci, un symbole qui la représente, par exemple la lettre p. Ensuite, chaque fois que l'on écrira p, il faudra comprendre « il fait beau ».

Dans le cadre de la logique que nous développerons, le langage que nous utiliserons sera composé essentiellement des symboles suivants

$$\mathcal{L} = \{p, q, r, s, \ldots, \neg, \vee, V, F\}.$$

Si d'autres symboles seront utilisés, ils seront définis lors de leur introduction.

Afin de ne pas alourdir le formalisme, nous réduirons considérablement la complexité due aux différentes distinctions des constructions de la logique du premier ordre, et nous définirons les énoncés et les propositions de manière intuitive. Comme nous ne cherchons qu'à nous initier à la logique formelle, nous partons directement des propositions et des tableaux de vérité qui permettent de rapidement aborder les constructions utiles en mathématique de manière simple et claire.

Définition 1 (énoncé)

On appelle *énoncé* tout assemblage de symboles du langage.

Ainsi, il existe un très grand nombre d'énoncés de la langue courante [2]. La plupart de ces énoncés n'ont pas de signification précise pour nous (p. ex. « slkh48* ãfihaf d » ne signifie rien d'utile). D'autres ont une signification, sont porteurs d'un sens (p. ex. « Il pleut. »).

Parmi les énoncés de la langue courante qui ont un sens, il y en a certains qui attribuent une propriété à certaines entités. Par exemple nous pouvons dire : « Le vase est bleu ». Nous pouvons attribuer une *valeur de vérité* à ces énoncés. Nous pouvons dire qu'ils sont *vrais* ou *faux.* Nous appellerons ces énoncés particuliers des *propositions.* Il est clair qu'un énoncé donné ne doit pas pouvoir être vrai et faux simultanément. Il faut que ces deux possibilités s'excluent mutuellement.

Définition 2 (proposition)

Un énoncé qui peut être vrai ou faux (mais pas les deux) s'appelle une *proposition.* Sa *valeur de vérité* est une des deux valeurs V (*vrai*) ou F (*faux*).

Exemple 1

La phrase « Bonjour, comment allez-vous ? » est un énoncé. Cet énoncé n'est pas une proposition, puisque nous ne pouvons pas dire si cet énoncé est vrai ou faux.

Exemple 2

La phrase « Mon chat est blanc. » est un énoncé et une proposition, car on peut lui attribuer une valeur de vérité V ou F.

Remarque 1

On représente généralement une proposition par une des lettres minuscules : p, q, r, s.

On indique les possibilités sur la valeur de vérité d'une proposition p par un *tableau de vérité,* dans lequel on affiche l'ensemble des valeurs pouvant être prises par la proposition p

2. langue courante par opposition à la langue logique

p
V
F

1.2 Connecteurs entre propositions

Nous allons maintenant introduire les connecteurs. Leur rôle est de modifier une proposition en une autre proposition (connecteur unaire), ou alors, à partir de deux propositions, d'en faire une nouvelle (connecteur binaire) [3].

1.2.1 négation

Le premier connecteur que nous introduisons est le connecteur unaire de négation. Son rôle est simplement d'inverser la valeur de vérité de la proposition. Elle admet comme pendant naturel du langage courant la négation des phrases.

Définition 3 (non)

Soit p une proposition. Sa négation, "non p" (que l'on écrit également $\neg p$), est une proposition dont la valeur de vérité est donnée par la table de vérité

p	$\neg p$
V	F
F	V

Ainsi, si p est V alors $\neg p$ est F et si p est F, alors $\neg p$ est V. Précisons encore une fois que la négation est une opération unaire (qui agit sur une seule proposition).

Remarque 2

Il est important de bien comprendre que si p est une proposition, alors $\neg p$ en est également une.

Exemple 3

Soit la proposition p : $p =$« La lune est pleine. »

La négation de p est

$$\neg p = \text{« La lune n'est pas pleine »}$$

ou encore

$$\neg p = \text{« il est faux que la lune est pleine. »}$$

Il est clair que $\neg p$ est encore une proposition. Nous pouvons donc encore la nier, et écrire

$$\neg(\neg p) = \text{« Il est faux que la lune n'est pas pleine. »}$$

Ce qui signifie : $\neg(\neg p) =$ « La lune est pleine. »

On prouvera en exercice que l'on a une première règle très importante [4]

$$\boxed{\neg(\neg p) = p.} \tag{1.1}$$

Cette règle affirme que la double négation d'une proposition a la même valeur que la proposition p elle-même.

3. On peut voir les connecteurs comme des fonctions sur les propositions qui permettent de transformer les propositions en d'autres propositions. Le résultat d'une telle fonction est toujours *une* proposition. Le nombre de proposition qu'un connecteur accepte pour construire le résultat est appelé l'*arité* de la fonction. Ainsi, la négation est une fonction d'arité 1, et les autres connecteurs logiques sont des fonction d'arité 2.

4. On utilisera le signe $=$ pour définir une nouvelle notion. En principe il faut utiliser le signe $\leftrightarrow$ pour signifier que les expressions de gauche sont équivalentes aux expressions de droite. La petite nuance est sans incidence sur la suite de la discussion et nous ne nous formaliserons pas outre mesure sur cette distinction.

1.2.2 disjonction (ou)

Dans le langage courant, la disjonction marque généralement une alternative. En mathématique, et partant en logique, la disjonction indique une alternative dans le sens large du terme. En fait la disjonction de deux proposition est une nouvelle proposition qui est vraie dès que l'une des deux propositions de départ est vraie.

Soit p, q deux propositions. La disjonction de p et q, "p ou q" (que l'on écrit également $p \vee q$) est une proposition dont la valeur de vérité est donnée par la table de vérité de la définition.

Définition 4 (ou)

Soit p, q deux propositions. La proposition $p \vee q$ est définie par la table de vérité

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

La lecture de ce tableau se fait par lignes. La première ligne nous dit que si p est V et que q est V également, alors $p \vee q$ est aussi V. Autrement dit V$\vee$V donne V, et ainsi de suite.

C'est une opération *binaire,* car elle relie deux propositions. Pour que la disjonction de deux propositions soit vraie, il suffit que l'une des propositions soit vraie. Il suffit que p **ou** q soit vraie (i. e. l'une, l'autre ou les deux). Autrement dit, $\vee$ est toujours vraie, sauf pour F$\vee$F qui donne F.

Exemple 4

Supposons que p est la proposition « Les cerises sont rouges. » et que q soit la proposition « La terre est noire. » La proposition $p \vee q$ est la phrase :

$p \vee q =$« Les cerises sont rouges *ou* la terre est noire. »

Pour que $p \vee q$ soit vraie, il faut juste que l'une, au moins, des deux assertions soit juste. On voit qu'en logique le **ou** n'a pas le sens exclusif de la langue courante, mais le sens inclusif. En informatique on écrit **xor** pour le **ou** exclusif, et **or** pour le **ou** inclusif de la logique.

Remarque 3

Répétons-le encore une fois : « en mathématique, le **ou** n'est jamais exclusif ».

Remarque 4

Ici encore, il convient de ne pas oublier que la disjonction de deux propositions est encore une proposition. On peut ainsi remplacer une expression du type $p \vee q$ par un symbole de proposition P pour alléger l'écriture ou éviter des confusions. On peut également écrire la proposition résultante entre parenthèses, pour mettre l'accent sur la proposition unique $(p \vee q)$.

1.2.3 conjonction (et)

Définition 5 (et)

Soit p, q deux propositions. La conjonction de p et q, "p et q" (que l'on écrit également $p \wedge q$) est une proposition dont la valeur de vérité est donnée par

$$p \wedge q = \neg((\neg p) \vee (\neg q)).$$

Sa table de vérité est

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

C'est aussi une relation binaire. Pour que la conjonction de deux propositions soit vraie, il faut que les deux propositions soient vraies. Il faut que p **et** q soient vraies (i. e. les deux en même temps).

Exemple 5

Si p est la phrase : « Les noisettes sont brunes. » et q la phrase « Les feuilles sont jaunes. » La proposition $p \wedge q$ est

$$p \wedge q = \text{« Les noisettes sont brunes \textit{et} les feuilles sont jaunes. »}$$

Pour que cette nouvelle phrase soit vraie, il faut à la fois que les noisettes soient réellement brunes et que les feuilles soient réellement jaunes. Dès que l'une de ces assertions est fausse, toute la phrase est fausse.

1.2.4 implication

Définition 6 (implique)

Soit p, q deux propositions. L'*implication de q par p*, on dit « p implique q », est une proposition dont la valeur de vérité est définie par

$$p \to q = (\neg p) \vee q.$$

En bref, q ne peut être fausse si p est vraie. Sa table de vérité est

p	q	$p \to q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Ainsi q ne peut pas être fausse, si p est vraie. Notez que si p est fausse, q peut être vraie. Cela signifie qu'une hypothèse fausse peut mener à une conclusion correcte. Le raisonnement sera sûrement incorrect dans ce cas. On peut enfin dire que si q est fausse, c'est que p n'est pas vraie (car alors $\neg p$ doit être vraie). Ainsi, si q est fausse, on n'a pas p.

Si l'implication $p \to q$ est vraie, on écrit alors :

$$p \Rightarrow q.$$

On lit souvent « **si** p**, alors** q », ou encore « si on a q, c'est parce qu'on a p » au lieu de « p **implique** q. »

Chaque fois que p est vraie et que l'implication est vraie, alors q est vraie. On appelle généralement p l'*hypothèse* et q la *thèse* ou la *conclusion*.

Pour démontrer une implication, on suppose que p est vraie et, par l'application de règles de logiques, on essaie d'arriver à q. Si l'application des règles de logique permet de passer de p à q, alors, l'implication est vérifiée (la démonstration est correcte) et q est vraie. Nous en verrons des applications plus tard.

Exemple 6

Soit $p =$« Le temps est pluvieux. » et $q =$« Le ciel est nuageux. »

$p \to q$ signifie : « si p, alors q », c'est-à-dire : « Si le temps est pluvieux, alors le ciel est nuageux. »

Dans la situation où « le temps est pluvieux et le ciel est nuageux », p est vrai et q également, il en découle que la proposition $p \Rightarrow q$ est également vraie. Cela signifie que la proposition « si le temps est pluvieux, alors le ciel est nuageux »est alors vraie. Il est clair que lorsque le temps est pluvieux, c'est parce qu'il y a des nuages.

Dans la situation où « le temps est pluvieux et le ciel n'est pas nuageux », p est vrai et q est fausse, la proposition $p \Rightarrow q$ est alors fausse, car nous disons « si le temps est pluvieux, alors le ciel est nuageux », or le temps est pluvieux et il n'y a justement pas de nuages. Donc si p est vraie et que q est fausse, l'implication est fausse. L'implication $p \Rightarrow q$ est mise en défaut par la situation.

Si le temps n'est pas pluvieux, le ciel peut tout de même être nuageux. Dans ce cas p est fausse, mais q est vraie et l'implication est vraie également, car elle n'est pas mise en défaut par la situation. Il n'y a pas de contradiction.

Enfin, lorsque le temps n'est pas pluvieux, le ciel peut être dégagé. Dans ce cas p est fausse et q également et la situation est plausible. L'implication est donc encore vraie, car là encore elle n'est pas mise en défaut par la situation.

Exemple 7

L'implication a comme conséquence remarquable que le faux implique n'importe quoi, et entre autres chose, le vrai. Une implication vraie, quelque peu étonnante, a été formulée par le mathématicien Bertrand Russel

« Si $1 = 2$, alors je suis le Pape. »

Évidemment, il n'était pas le Pape. Mais son implication est tout à fait correcte. En effet, $1 = 2$ est une proposition fausse. De même, la proposition « je suis le Pape »est fausse. Ainsi, l'implication est du type F⇒F, ce qui est vrai.

En plus de cette implication, Russel nous en donne une explication d'une lucidité exemplaire

> « Si $1 = 2$, alors je suis le Pape. En effet, le Pape et moi sommes deux personnes. Or si $1 = 2$, deux personnes est la même chose qu'une personne. Ainsi, le Pape et moi sommes une seule personne. Donc, je suis le Pape. »

Pour une implication $p \Rightarrow q$ on utilise souvent le vocabulaire suivant

1. p est l'*hypothèse*
2. q est la *thèse*
3. $p \Rightarrow q$ est un théorème.

1.2.5 équivalence

Définition 7 (équivalence)

Soit p, q deux propositions. On appelle *équivalence* de p et q, $p \leftrightarrow q$ la proposition

$$p \leftrightarrow q = (p \to q) \textbf{ et } (q \to p).$$

p et q ont alors les mêmes valeurs de vérité. Si l'équivalence entre p et q est vraie, on écrit

$$p \Leftrightarrow q.$$

Ainsi l'équivalence est vérifiée uniquement si p et q ont la même valeur de vérité.

1.2.6 Quantificateurs

En mathématique, on rencontre souvent des énoncés qui contiennent des *trous*. Généralement ce sont des expressions qui sont presque des propositions, mais dont on a enlevé un mot pour le remplacer par une case vide, généralement sous la forme d'une lettre comme x. Par exemple, l'énoncé

$$p(x) = \text{« } x \text{ est blanc »},$$

est un énoncé qui a un trou appelé x.

L'expression $p(x)$ (lire : « pé de ixe », les parenthèses étant signifiées par le mot « de ») est une *fonction propositionnelle* et la lettre x est la *variable*.

L'idée est que maintenant on peut remplacer x par un mot pour obtenir une proposition. Ainsi, si l'on remplace x par $x =$« le chat », on obtient

$$p(\text{le chat}) = \text{« le chat est blanc »}.$$

qui est une proposition. On peut remplacer x par $x =$« le mur »pour obtenir une autre proposition

$$p(\text{le mur}) = \text{« le mur est blanc »}.$$

Si la variable x apparaît plusieurs fois dans l'énoncé, alors elle représente toujours la même valeur. Par exemple

$$p(x) = \text{« si } x \text{ est mouillé, alors } x \text{ devient blanc »}$$

devient, en remplaçant x par $x =$« le chat »

$$p(\text{le chat}) = \text{« si le chat est mouillé, alors le chat devient blanc ».}$$

Mais si l'on remplace x par $x =$« le mur », alors on obtient

$$p(\text{le mur}) = \text{« si le mur est mouillé, alors le mur devient blanc ».}$$

Si l'on veut avoir la possibilité de changer deux ou plusieurs mots, alors il faut deux ou plusieurs variables.

Les quantificateurs présentent une autre manière d'obtenir des propositions à partir des fonctions propositionnelles.

Universel

Définition 8 (pour tout)

Soit $p(x)$ une fonction propositionnelle de la variable x. On obtient une proposition qui possède une valeur de vérité par l'utilisation du quantificateur *universel*, $\forall$ (lire : « pour tout… » ou encore « quel que soit… », en écrivant

$$\forall x, p(x)$$

qui se lit : « pour tout x, $p(x)$ est vraie »,
ou encore : « pour tout x, on a $p(x)$ ».

Exemple 8

Soit l'énoncé $p(x) =$« x est un nombre premier. » Cet énoncé n'est pas une proposition puisque la valeur de vérité de $p(x)$ dépend de la valeur de la variable x. Par exemple, pour $x = 3$ alors $p(3)$ est vraie, mais pour $x = 6$, $p(6)$ est fausse. C'est une fonction propositionnelle.

Par contre $(\forall x, p(x))$, qui signifie que pour tout x, $p(x)$ est vraie, est une proposition. En l'occurrence, c'est une proposition qui est fausse, puisqu'elle affirme que toute valeur de x est un nombre premier.

Exemple 9

Soit la fonction propositionnelle, où x représente un nombre.

$$p(x) = \ x + 1 = 0.$$

Alors

$$\forall x, p(x) \leftrightarrow \forall x, x + 1 = 0$$

signifie que quel que soit la valeur de x, en y ajoutant le nombre 1 on obtient zéro. Autrement dit, $x + 1 = 0$ pour tout nombre x. C'est une proposition qui est clairement fausse. En effet, par exemple, si $x = 1$, $x + 1 = 2$ et non pas zéro.

La proposition

$$\forall x, \neg p(x) \leftrightarrow \forall x, x + 1 \neq 0$$

signifie, quant à elle, que pour n'importe quelle valeur de x, on a toujours $x + 1 \neq 0$. Ceci également est faux, car si $x = -1$ alors on a $x + 1 = 0$.

Exercice 1.1.
En reprenant l'exemple ci-dessus, que signifie la construction

$$\neg(\forall x, p(x))?$$

Existentiel

On définit le quantificateur *existentiel* $\exists$ par la négation de $(\forall x, \neg p(x))$

Définition 9 (il existe)

$$\exists x, p(x) = \neg(\forall x, \neg p(x)).$$

On lit : « Il existe au moins une valeur de x pour laquelle $p(x)$ est vraie. »

Exemple 10

En reprenant la définition de p de l'exemple précédent, $\exists x, p(x)$ est une proposition vraie, qui dit qu'il existe au moins une valeur de x qui est un nombre premier (p.ex. le nombre $x = 3$).

Négation des quantificateurs

Il découle directement de la définition de $\exists$ que

1. la négation de $(\forall x, p(x))$ s'écrit
$$\neg\left(\forall x, p(x)\right) = \exists x, \neg p(x).$$
2. la négation de $(\exists x, p(x))$ s'écrit
$$\neg\left(\exists x, p(x)\right) = \forall x, \neg p(x).$$

La démonstration de ces résultats est laissée en exercices (Ex. 1.9). La négation de $\exists$ est immédiate, à partir de sa définition et de la règle de double négation. Pour le quantificateur universel, il suffit de remplace p par $\neg(\neg p)$ dans la règle de négation de $\exists$ et de nier la règle résultante.

On utilise encore la notation

$$\exists! \quad \text{ou} \quad \exists^*$$

qui signifie « il existe un et un seul... »ou encore « il existe un unique... »

1.3 Les règles de la logique

Les règles de la logique nous indiquent quels sont les raisonnements corrects qui permettent de passer d'une construction à l'autre. Toutes ces règles sont évidentes par elles-mêmes, nous les citerons et les expliquerons rapidement pour que leur écriture ne nous embrouille pas trop. On convient généralement de considérer qu'une proposition notée seule est vraie. Ainsi si p est une proposition vraie, on note : p.

Les règles de logique sont des constructions entre propositions qui sont toujours vraies, quels que soient les contenus exacts ou la valeur de vérité des propositions. Ce sont des *tautologies,* des assertions toujours vraies. Il est aisé de montrer avec un tableau de vérité que chacune des règles suivantes est une tautologie.

Le tiers exclu

$$p \vee (\neg p)$$

Cette règle nous dit que l'une de ces propositions est vraie. Soit p est vraie, soit $\neg p$ est vraie. Il n'y a pas d'autre possibilité. Le principe du tiers exclu est identique au principe de non-contradiction qui s'écrit :

$$\neg((\neg p) \wedge p),$$

et qui signifie que $(\neg p) \wedge p$ est toujours faux (c'est une *antinomie*). Autrement dit : on ne peut pas avoir simultanément p vraie et $\neg p$ vraie (ou les deux fausses simultanément).

Ces deux règles prises simultanément, nous indiquent que pour tester une proposition p, on peut prouver p ou bien $\neg p$. Seule l'une des deux sera vraie.

La double négation

$$p \leftrightarrow \neg(\neg p).$$

Ce principe stipule que la double négation d'une proposition est la proposition elle-même. On ne fait rien en niant deux fois une proposition. Nier une négation revient à faire une affirmation.

Ainsi, si l'on veut prouver une proposition p, il est possible de montrer que $\neg p$ est fausse. Il en découle alors que $\neg(\neg p)$ est vraie. Ce qui est également une conséquence de la règle précédente.

Commutativité de la disjonction

$$(p \vee q) \leftrightarrow (q \vee p).$$

Cette règle dit simplement que dire que (p **ou** q) est vraie (resp. fausse) est équivalent à dire que (q **ou** p) est vraie (resp. fausse).

Commutativité de la conjonction

$$(p \wedge q) \leftrightarrow (q \wedge p).$$

Ici encore, c'est l'équivalence qui est toujours vraie. Cela signifie que $p \wedge q$ a la même valeur de vérité que $q \wedge p$.

Réfutation par l'absurde

$$((p \to q) \wedge (p \to \neg q)) \to \neg p.$$

Cette règle est très utilisée dans les démonstrations. Elle dit que si une proposition p nous permet de montrer à la fois une proposition q et sa négation $\neg q$, c'est que la proposition p est fausse.

Ponendo ponens

$$((p \to q) \wedge p) \to q.$$

Cette règle aussi est très utilisée. Elle dit que si p est une proposition qui admet une conséquence q, et si p est vraie, alors q est vraie.

Tollendo tollens

$$((p \to q) \wedge \neg q) \to \neg p.$$

Encore une règle très importante. Cette règle dit que si une proposition p implique une proposition q, et que cette proposition q est fausse, c'est parce que la proposition p est elle-même fausse.

Transitivité de l'implication

$$((p \to q) \wedge (q \to r)) \to (p \to r).$$

C'est la règle des syllogismes. Elle dit que si p a comme conséquence q et que q a comme conséquence r, alors p a comme conséquence r.

Toutes ces règles, et quelques autres encore, peuvent être utilisées pour établir des démonstrations. Nous en ferons usage dès que nous devrons prouver des résultats à partir des axiomes.

Distributivité

$$p \wedge (q \vee r) \leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

et

$$p \vee (q \wedge r) \leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

Dans chacun de ces cas, l'expression à gauche de l'équivalence peut être substituée par l'expression à droite du signe d'équivalence. Cette règle est très utile en théorie des ensembles, car elle permet de démontrer la règle correspondante pour l'intersection et la réunion des ensembles.

La contraposée Encore une tautologie, très importante en mathématique, que nous démontrons comme exemple :

$$(p \to q) \leftrightarrow (\neg q \to \neg p).$$

Pour prouver l'équivalence d'une implication $p \to q$ avec sa contraposée $\neg q \to \neg p$ nous allons faire la table de vérité de ces propositions :

p	q	$\neg q$	$\neg p$	$p \to q$	$\neg q \to \neg p$
V	V	F	F	V	V
V	F	V	F	F	F
F	V	F	V	V	V
F	F	V	V	V	V

Nous voyons que les deux dernières colonnes sont identiques, ainsi une implication et sa contraposée sont équivalentes. L'équivalence ci-dessus est bien une tautologie.

Détaillons un peu le sens de cette équivalence. L'implication $p \to q$ signifie que q ne peut être fausse si p est vraie. Ainsi si q est fausse, on ne peut pas avoir p vraie, ce qui s'écrit $\neg q \to \neg p$. C'est la teneur de l'équivalence ci-dessus.

Cette équivalence est très importante en mathématique, où nous sommes souvent portés à démontrer la contraposée d'une implication pour prouver l'implication elle-même, car il est parfois plus simple de démontrer la contraposée plutôt que l'implication.

1.4 Principe de la démonstration

Prouver une assertion revient à montrer qu'il y a un lien logique entre des énoncés réputés vrais et l'assertion que l'on veut prouver. Nous venons de voir qu'une tautologie ne change pas la valeur de vérité d'une proposition. Donc, si une proposition est vraie, en lui appliquant une tautologie elle reste vraie.

Si, maintenant, en partant des propositions vraies de départ (les prémisses, les hypothèses, les axiomes, les théorèmes déjà prouvés) on peut les transformer, en leur appliquant successivement des tautologies, dans la proposition que l'on veut prouver, celle-ci sera alors forcément vraie, puisqu'elle aura la même valeur de vérité que nos axiomes (qui sont vrais).

La *preuve* (ou *démonstration*) consiste en l'énumération des tautologies que l'on doit utiliser pour passer des *hypothèses* (les axiomes ou les prémisses, ou les théorèmes déjà prouvés) à la *thèse* (la proposition finale que l'on veut prouver.)

Il arrive souvent que plusieurs suites de tautologies sont possibles. Il y a alors plusieurs preuves possibles. Du point de vue logique, elles sont également valables. Dans la pratique, on préférera des preuves simples, directes, élégantes, selon les goûts.

1.5 Ce qu'il faut connaître

1. Qu'est-ce qu'une proposition ?
2. Utilisation de la négation $\neg$ et tableau de vérité du $\vee$.
3. Définition et construction du tableau de vérité du $\wedge$.
4. Définition et tableau de vérité de $\to$.
5. Définition et tableau de vérité de $\leftrightarrow$.
6. Utilisation des quantificateurs.
7. Négation du $\vee$ et du $\wedge$.
8. Distributivité du $\vee$ et du $\wedge$.
9. La contraposée d'une implication.
10. La négation d'une implication.
11. Négation des quantificateur.
12. Règle de la double négation et du principe de non-contradiction.
13. Règle de commutativité de $\vee$ et de $\wedge$.
14. Règle de distributivité de $\vee$ et $\wedge$.
15. Règle de transitivité de $\Rightarrow$.

1.6 Exercices

1.6.1 Énoncés et propositions

Exercice 1.2.
Dire si les énoncés suivants sont des propositions. Si un énoncé utilise des notions qui ont besoin d'être précisées pour devenir une proposition, préciser la notion.

a) « La nuit tous les chats sont gris. »	b)« Il fait froid. »
c) « La maison est grande. »	d) « L'ensemble A »
e) « La porte et la fenêtre. »	f) « $1 = 2$ »
g) « $4 + 2$ est chaud. »	h) « Á droite près de la porte. »
i) « $2 - 3$ ne vaut pas 3. »	j) « $34 - 6$ »

Exercice 1.3.
Soit la situation : il pleut, il fait chaud.
Évaluer les propositions suivantes.
a) « Il ne pleut pas ou il fait chaud. »
b) « Il ne pleut pas et il ne fait pas chaud. »
c) « s'il fait chaud, alors il ne pleut pas. »
d) « s'il ne pleut pas, alors il ne fait pas chaud. »
e) « s'il ne fait pas chaud, alors il ne pleut pas. »
f) « il est faux qu'il pleuve et qu'il fasse chaud. »

Exercice 1.4.
Soit les propositions : $p =$« il pleut »et $q =$« les routes sont mouillées ». qui sont les deux vraies
Écrire et évaluer les propositions suivantes.
a) $p \vee \neg q$
b) $\neg p \wedge q$
c) $p \Rightarrow q$
d) $\neg q \Rightarrow \neg p$
e) $p \Rightarrow \neg q$
f) $\neg p \Rightarrow q$
g) $\neg(p \wedge \neg q)$

1.6.2 Connecteurs entre propositions

Exercice 1.5.
Montrer que la double négation $\neg(\neg p)$ d'une proposition p a la même valeur de vérité que la proposition p. Autrement dit

$$\neg(\neg p) \leftrightarrow p.$$

Exercice 1.6.
Établir la table de vérité de $p \wedge q$ à partir de la définition donnée dans le cours.

Exercice 1.7.
Établir le tableau de vérité de l'implication $p \to q$.

Exercice 1.8.
Montrer que : $p \wedge (q \vee r) \leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$.

Exercice 1.9.
Montrer que :

1. $\neg(\forall x, p(x)) \leftrightarrow \exists x, \neg p(x)$.
2. $\neg(\exists x, p(x))) \leftrightarrow \forall x, \neg p(x)$.

1.6.3 Règles

Exercice 1.10.
Sans faire de tableau de vérité, montrer que
a) $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p) \vee (\neg q)$
b) $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p) \wedge (\neg q)$
(Indication : Pour le point b), utiliser le point a) dans l'autre sens et effectuer des substitutions).

Exercice 1.11.
Sans faire de tableau de vérité, montrer que

$$\neg(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow p \wedge (\neg q).$$

Exercice 1.12.
Montrer, sans faire de tableau de vérité, que le tiers exclus est équivalent au principe de non-contradiction

$$(\neg p) \vee p \Leftrightarrow \neg(\neg p \wedge p).$$

Exercice 1.13.
En utilisant les règles et sans tableau de vérité montrer que l'équivalence est commutative

$$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow p)$$

Exercice 1.14.
Montrer, en faisant une table de vérité, que chacune des règles citées est une tautologie.

Exercice 1.15.
Montrer que les expressions du problème 1.10 sont des tautologies

Exercice 1.16.
Montrer que $p \to p$ est une tautologie. Quelle est la règle équivalente à cette tautologie ?

Exercice 1.17.
Prouver, à l'aide d'une table de vérité, que les équivalences suivantes sont des tautologies
a) $p \vee p \leftrightarrow p$ b) $p \wedge p \leftrightarrow p$

Exercice 1.18.
Nier l'implication $p \to q$.

1.6.4 Divers

Exercice 1.19.
On donne deux propriétés P et Q dans un ensemble. Évaluer les propositions $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$ et dire si les propositions P et Q sont équivalentes.

1. Dans l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels
   P : x est divisible par 30, Q : x est divisible par 5.
2. Dans l'ensemble des quadrilatères du plan
   P : x est un rectangle, Q : x est un carré.
3. Dans l'ensemble $\mathbb{N}^*$ des entiers naturels
   P : x est divisible par 10, Q : x se termine par le chiffre 0.
4. Dans l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs
   P : le produit xy est nul, Q : x est nul.
5. Dans l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels
   P : x est divisible par 15, Q : x est divisible par 3 et 5.
6. Dans un ensemble de personnes
   P : x est le fils de y, Q : y est le père ou la mère de x.
7. Dans l'ensemble des triangles du plan
   P : x est isocèle, Q : x est équilatéral.

Exercice 1.20.
En reprenant les propriétés P et Q de l'exercice précédent, écrire la contraposée de la proposition $P \Rightarrow Q$.

Exercice 1.21.
Évaluer les propositions suivantes et les exprimer en utilisant les quantificateurs. Écrire ensuite la négation de chacune de ces propositions.

1. Tous les nombres entiers sont pairs.
2. Il existe au moins un nombre premier divisible par 2.
3. Tout nombre entier est inférieur ou égal à son carré.
4. Il n'existe pas de nombre entier n tel que 2^n est impair.
5. Il existe un seul nombre premier qui n'est pas impair.
6. Tout nombre premier pouvant s'écrire sous la forme $n^2 + 1$, où $n \in \mathbb{N}$, est pair.
7. Il existe au moins un nombre impair diviseur de 42.
8. Il n'existe pas de nombre entier qui est égal à la somme de ses diviseurs.
9. Tout rectangle est un carré.
10. Il n'existe pas de triangle ayant trois angles égaux.
11. Il existe au moins un couple (x, y) de nombres entiers tel que $x^2 - y^3 = 1$.
12. L'addition des nombres entiers est commutative.

Deuxième partie

Théorie des ensembles

Chapitre 1

Axiomes de base

La théorie des ensembles forme le langage unificateur des mathématiques. Quel que soit le domaine d'étude des mathématiques (géométrie, algèbre, analyse, théorie des groupes, géométrie analytique, géométrie différentielle,...) on trouve des ensembles et les notations qui s'y rattachent. Les ensembles servent souvent à définir un domaine d'étude dans un problème.

1.1 Introduction

On considère que les notions d'ensembles et d'éléments sont des notions primitives. On ne tentera pas de les définir en les ramenant à d'autres notions. Un ensemble est représenté par une paire d'accolades $\{\ldots\}$ qui entourent les objets qui constituent ses éléments, par exemple :

$$\{a, b, c, \ldots\}.$$

On utilise les points de suspension "..." pour indiquer que l'on a omis des éléments. On introduit le symbole "$\in$" entre les éléments et les ensembles qui signifie que l'objet de gauche est un élément de l'objet de droite qui est obligatoirement un ensemble. Pour signifier que l'objet a est un élément de l'ensemble A on écrit :

$$a \in A.$$

Si a est un élément de $\{a, b, c, \ldots\}$, on écrit $a \in \{a, b, c, \ldots\}$, que l'on lit : « a est un élément de (ou a appartient à) l'ensemble $\{a, b, c, \ldots\}$. » Dans ce chapitre nous commencerons par énoncer les axiomes qui spécifient la manière de définir un ensemble. Ensuite une série d'axiomes introduiront des outils pratiques pour effectuer des opérations sur les ensembles.

L'ouvrage de Schwartz [Sch91] contient une introduction rapide aux axiomes de base de la théorie des ensembles. C'est un exposé d'un niveau assez élevé. L'ouvrage de Suppes [Sup72] est plus abordable, très détaillé tout en restant tourné vers l'essentiel. On trouvera dans ce dernier ouvrage des démonstrations sur la plupart des opérations effectuées "naturellement" ou intuitivement que l'on utilise, en général, sans démonstration. Mentionnons encore le très connu de Kelley [Kel61] qui contient en annexe un résumé de la théorie des ensembles dans l'axiomatique de Von Neumann–Gödel. Enfin, dans le livre de Halmos [Hal87] on trouve une introduction plus élémentaire de la théorie des ensembles avec des preuves détaillées de la plupart des propriétés.

Ajoutons encore que les axiomes présentés ci-après sont les axiomes de Zermelo-Frænkel, du nom de ceux qui les ont introduits, dans le premier quart du XX$^{\text{e}}$ siècle. D'autres variantes existent, notamment l'axiomatique de von Neumann. Pour l'essentiel, mis à part des détails de niveau avancé, ces axiomatiques sont très proches.

1.2 Les ensembles

La définition suivante définit les ensembles comme étant des objets qui contiennent d'autres objets.

Définition 1 (Les ensembles)

Un objet E est un ensemble s'il existe des objets x qui sont des *éléments* de E ou si E est l'ensemble vide

$$E \text{ est un ensemble} \Leftrightarrow (\exists x,\ x \in E) \vee (E = \varnothing).$$

Un ensemble est un objet qui a des éléments. Les éléments sont les objets contenus par l'ensemble. Il se peut, toutefois qu'un ensemble ne contienne aucun objet, il s'agit alors de l'ensemble vide.

On appelle $\varnothing$ l'*ensemble vide.* Nous verrons par la suite que l'ensemble vide ne contient aucun élément, comme l'indique son nom.

Il n'est pas explicitement fait mention qu'il existe un ou des ensembles. Il est généralement admis, toutefois, que l'ensemble vide existe. C'est une espèce d'axiome 0. Il n'en faut pas plus pour construire toute l'arithmétique (via l'axiome de l'infini, de Peano) et, partant, toutes les mathématiques (ou du moins une grande partie).

On utilise essentiellement deux manières pour représenter les ensembles : par *extension* et par *compréhension.* Ces deux méthodes sont complémentaires et suffisent à représenter convenablement tous les ensembles dont on a besoin.

Dans une attitude sceptique, on peut en venir à se demander s'il existe vraiment ne serait-ce qu'un seul ensemble. L'axiome de sélection nous permettra de définir objectivement un ensemble. En réalité, ce n'est pas une nécessité. Ce qui est important est que la théorie développée ci-après est valable dès que l'on a des ensembles.

Nous pouvons déjà voir que si un ensemble ne contient aucun élément, alors c'est l'ensemble vide.

Théorème 1.1

Soit E un ensemble tel que : $\forall x,\ x \notin E$, alors $E = \varnothing$.

Preuve.

Soit la proposition $p =$« $\exists x, x \in E$ ». La négation de p est alors

$$\neg p = \forall x, x \notin E.$$

Ainsi si $\neg p$ est vraie (il n'existe aucun élément contenu dans E), p est fausse.

Comme E est un ensemble, alors la définition donnée pour les ensembles implique que $E = \varnothing$. Car pour que le **ou** soit vrai, il faut qu'au moins une des deux propositions soit vraie.

□

Pour la réciproque de ce théorème, nous devrons attendre l'axiome de sélection.

1.2.1 Ensembles définis en extension

Un moyen très simple de décrire un ensemble consiste simplement à énumérer tous ses éléments. Par exemple, nous pouvons considérer un jeu de cartes comme un ensemble. Décrire le jeu de cartes consiste alors à énumérer exactement les cartes qu'il contient. C'est l'idée de la définition en extension d'un ensemble donnée par l'axiome suivant.

Axiome 1 (d'extensionnalité, d'extension)

Soit A, B deux ensembles. A et B sont égaux s'ils contiennent exactement les mêmes éléments

$$(A = B) \Leftrightarrow (x \in A \Leftrightarrow x \in B).$$

Remarque 1

Cet axiome permet de déterminer dans quelle situation deux ensembles sont égaux. Rappelons qu'une équivalence est vraie si et seulement si l'implication **et** sa réciproque sont vraies.

Remarque 2

Cet axiome permet de définir un ensemble A en mentionnant qu'il est égal à un ensemble contenant des éléments connus

$$A = \{a, b, c, 1, 2, 3, \dots\}.$$

Pour un ensemble donné A, nous pouvons nous intéresser à certains éléments de cet ensemble uniquement. Nous pouvons, par exemple, nous intéresser uniquement à la partie d'un jeu de carte qui ne contient que des 9, ou que des personnages. On définit alors la partie d'un ensemble de la manière suivante

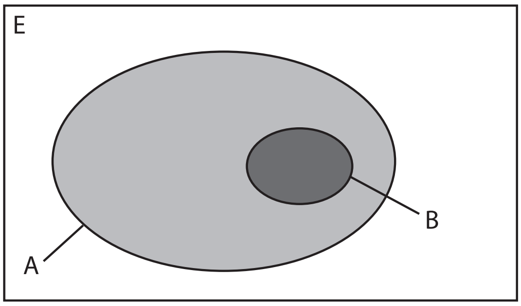


FIGURE 1.1 – L'ensemble B est une partie de l'ensemble A.

Définition 2 (partie)

Soit A un ensemble. On dit qu'un ensemble B est une *partie* ou un *sous-ensemble* de A, on note : $B \subset A$, si tout élément de B est aussi un élément de A

$$B \subset A \Leftrightarrow (x \in B \Rightarrow x \in A).$$

On dit alors « B est inclus dans A ».

Remarque 3

Il est bien clair qu'une partie, ou un sous-ensemble d'un ensemble, est également un ensemble.

Remarque 4

Il est à remarquer qu'une définition n'introduit pas un concept. Elle sert plutôt à donner un nom à un concept qui découle des axiomes, directement, ou indirectement par des théorèmes.

Exemple 1

Soit les ensembles $A = \{a, b, c, d\}$ et $B = \{a, b, c\}$. Il est bien clair que

$$B \subset A,$$

car tous les éléments de B sont également des éléments de A.

De plus, mentionnons que

$$a \not\subset A,$$

car a n'est pas un ensemble et n'a pas d'éléments qui appartiennent à A. Par contre, on peut écrire

$$\{a\} \subset A.$$

En effet, à gauche de $\subset$ il y a maintenant un ensemble. Cet ensemble a comme seul élément a, et cet élément a appartient aussi à l'ensemble A.

Nous donnons ci-après les propriétés de l'inclusion et les démontrons complètement. Ces trois démonstrations simples permettent d'illustrer la méthode utilisée dans les démonstrations.

Propriété 1.2 (de l'inclusion.)

a) Pour tout ensemble A : $A \subset A$.
b) Soit A, B deux ensembles : $A = B \Leftrightarrow (A \subset B$ et $B \subset A)$.
c) Soit A, B, C trois ensembles : $(A \subset B$ et $B \subset C) \Rightarrow A \subset C$.

Preuve.

a) Pour montrer que $A \subset A$ il faut montrer que $x \in A$ implique $x \in A$. Ce qui est clair, car $p \Rightarrow p$ est une tautologie.

b) L'égalité des ensembles entraîne

$$\begin{array}{rrl} A = B \Leftrightarrow & (x \in A \Leftrightarrow x \in B) & \text{(ax. d'extension)} \\ \Leftrightarrow & (x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \Rightarrow x \in A) & \text{(déf. de } \Leftrightarrow\text{)} \\ \Leftrightarrow & (A \subset B) \wedge (B \subset A) & \text{(déf. de l'inclusion)} \end{array}$$

c) Supposons que $A \subset B$ et $B \subset C$. Par la définition de l'inclusion, cela signifie

$$1.\ x \in A \Rightarrow x \in B$$

et

$$2.\ x \in B \Rightarrow x \in C.$$

Par la transitivité de l'implication on a alors : $x \in A \Rightarrow x \in C$. Par définition de l'inclusion, cela signifie : $A \subset C$.

□

La force d'une démonstration, réside dans le fait qu'elle n'utilise que des données fiables. Ces données fiables, dans notre cas, sont représentées principalement par l'axiome d'extension et par la définition de l'inclusion.

Il y a une grande différence entre un axiome et une définition. Un axiome nous donne un objet ou un outil de travail (l'ensemble, l'égalité des ensembles) et la définition se contente de donner un nom à une idée. Elle donne un raccourci commode à une expression complexe (A est inclus dans B, au lieu de « tous les éléments de A sont aussi des éléments de B »).

Nous ne nous sommes jamais appuyés sur un exemple durant la démonstration. En effet un exemple est un cas particulier et risque de mener à une preuve qui n'est correcte que pour l'exemple utilisé. On ne fait jamais appel à un cas particulier dans une preuve, ni aux idées préconçues, qui ne sont pas contenues dans les énoncés des axiomes ou des théorèmes déjà prouvés.

Exercice 1.1.
Reprendre la preuve des propriétés et observez l'usage qui est fait des axiomes, des définitions. Repérer les règles de logique utilisées implicitement (sans les nommer) et explicitement (en les nommant). Pourquoi l'implication de la partie a) de la preuve est-elle claire ?

Définir un ensemble par extension est parfois très pratique, s'il n'y a pas un grand nombre d'éléments. On peut, ainsi, en un coup d'œil se rendre compte du contenu de l'ensemble.

Par contre, lorsque l'on veut définir un ensemble avec un très grand nombre d'éléments, cet axiome n'est plus très pratique.

1.2.2 Ensembles définis en compréhension

L'axiome suivant affirme qu'en sélectionnant, dans un ensemble A, uniquement certains éléments x qui vérifient une propriétés $p(x)$ choisie à l'avance, on obtient encore un ensemble.

Axiome 2 (de sélection, de compréhension)

Si A est un ensemble et $p(x)$ une proposition contenant la variable x, alors il existe un ensemble B contenant les éléments x de A pour lesquels la proposition $p(x)$ est vraie

$$\exists B, \big(x \in B \Leftrightarrow (\ x \in A \wedge p(x)\ )\ \big).$$

On note $B = \{x \in A \mid p(x)\}$, ou encore $B = \{x | x \in A \text{ et } p(x)\}$.

Remarque 5

Définir un ensemble A en compréhension, consiste à spécifier dans quel ensemble E on prend les éléments que l'on sélectionne (on appelle cet ensemble le *référentiel*, ou l'*univers*) ainsi que la propriété de sélection

$$A = \{x \in E | p(x)\} \qquad \text{ou} \qquad A = \{x | x \in E \wedge p(x)\}.$$

Exemple 2

Soit E l'ensemble des lettres de l'alphabet et $p(x)$ la proposition « x est une voyelle ». On a alors

$$\begin{aligned} A &= \{x|x \in E \wedge p(x)\} \\ &= \{x|x \in E \wedge x \text{ est une voyelle}\} \\ &= \{a, e, i, o, u\}. \end{aligned}$$

Remarque 6

On devrait ajouter une restriction sur la proposition p. Par exemple : « ne contenant pas le symbole B », car si on l'omet, on peut avoir des problèmes. Le célèbre **paradoxe de Russel**, par exemple, est obtenu en choisissant $p(x) = x \notin B$. On trouve alors

$$B = \{x \in A|x \notin B\}.$$

Ainsi, si $x \in B$, alors, par définition de B, $x \notin B$ ce qui est absurde. En outre, si $x \notin B$, alors, par définition de B, il faut que $x \in B$, ce qui est également absurde.

En fait, la restriction que l'on vient de poser n'est pas suffisante. Il faut un nouvel axiome, l'axiome de *fondement*, pour exclure définitivement ce genre de problème. En effet, si nous posons $p(x) = x \notin x$, nous obtenons à nouveau le paradoxe de Russel.

Remarque 7

Cet axiome est, en fait, un *schéma* d'axiomes. Pour chaque définition de $p(x)$, on obtient un nouvel axiome. Ainsi, l'axiome de sélection est tout un ensemble d'axiomes.

Remarque 8

Cet axiome permet ainsi de définir un ensemble B à partir d'un ensemble A donné et d'une propriété $p(x)$ portant sur un élément x et ne contenant pas le symbole B. On définit alors l'ensemble B des éléments de A qui vérifient la propriété $p(x)$ par

$$B = \{x \in A \mid p(x)\},$$

qui se lit : « B est l'ensemble des éléments x de A ($x \in A$), tels que ($|$) p de x est vraie. »

Exemple 3

Si $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et $p(x) = \frac{x}{2} \in A$. $p(x)$ ne contient pas le symbole B, on peut alors définir l'ensemble

$$B = \left\{x \in A \mid \frac{x}{2} \in A\right\} = \{2, 4, 6\}.$$

Le définition de B se lit : « B est l'ensemble des éléments x de A, qui sont tels que $\frac{x}{2}$ est encore un élément de A. »

Nous sommes maintenant en mesure de prouver la réciproque du théorème 1.1 en page p.18.

Théorème 1.3

Si $E = \varnothing$, alors $\forall x, x \notin E$.

Preuve.

Soit A un ensemble et posons $E = \{x \in A \,|\, x \neq x\}$. On a : $\forall x,\ x \notin E$. En effet, si ce n'était pas le cas, il existerait un élément $x \in E$. Par définition de E, on aurait alors $x \neq x$, ce qui est absurde. Donc $\forall x \in A, x \notin E$.

De plus, si un objet x n'est pas élément de A, il n'est pas non plus élément de E, puisque seuls les éléments de A

peuvent appartenir à E. Ainsi :

$$\forall x, x \notin E.$$

Par le théorème 1.1 on a alors

$$E = \varnothing.$$

En définissant l'ensemble $\varnothing$ comme l'ensemble E, on obtient le théorème.

□

Le théorème précédent et le théorème 1.1 affirment que

$$E = \varnothing \Leftrightarrow \forall x,\ x \notin E.$$

Définition 3 (Ensemble vide)

Soit $p(x)$ la proposition « $x \neq x$ » et A un ensemble. On appelle *ensemble vide* l'ensemble

$$\varnothing = \{x \in A | x \neq x\}.$$

Remarque 9

Ce qui est important dans la définition de $\varnothing$ est que $p(x)$ soit toujours fausse. On obtiendrait une définition équivalente pour toute propriété de x, $p(x)$, toujours fausse. Le choix de cette définition de $p(x)$ est approprié, puisqu'il ne s'appuie que sur la propriété de l'égalité qui est que l'on a toujours $x = x$.

Cet ensemble ne contient aucun élément.

Théorème 1.4

La relation $x \in \varnothing$ est toujours fausse.

Preuve.

Par le théorème 1.3, on a, en remplaçant E par $\varnothing$, $\forall x, x \notin \varnothing$ est toujours vraie.
Ainsi, $\exists x, x \in \varnothing$ est toujours fausse, puisque c'est la négation de la proposition précédente.

Ou encore(deuxième preuve) :

Procédons par le tiers exclu. S'il existe $x \in \varnothing$, alors, par définition de l'ensemble vide, on doit avoir : $x \neq x$, ce qui est absurde. Ainsi on ne peut pas avoir $x \in \varnothing$.

Enfin, pour terminer, nous donnons une troisième preuve :

Le théorème 1.3 affirme que $\forall x, x \notin \varnothing$, ce qui est justement l'énoncé que nous devons prouver. Ce théorème paraphrase, en fait, le théorème 1.3.

□

Propriété 1.5 (de l'ensemble vide)

a) $\varnothing$ est unique.
b) Pout tout ensemble A on a $\varnothing \subset A$.

Preuve.

a) Supposons qu'il existe deux ensembles vides. Soit $\varnothing_1$ et $\varnothing_2$ ces deux ensembles. Si $\varnothing_1 \neq \varnothing_2$ il existe un élément $x \in \varnothing_1$ tel que $x \notin \varnothing_2$. Or $x \in \varnothing_1$ est toujours fausse, donc un tel élément n'existe pas. De même il n'existe aucun élément de $\varnothing_2$ qui n'est pas dans $\varnothing_1$ puisque $x \in \varnothing_2$ est toujours fausse. Donc on en conclut que $\varnothing_1 = \varnothing_2$. Il ne peut pas y avoir deux ensembles vides.
b) Soit A un ensemble. Supposons que $\varnothing \not\subset A$. Il existe alors un élément $x \in \varnothing$ tel que $x \notin A$. Or $x \in \varnothing$ est toujours fausse, donc un tel élément n'existe pas. Ainsi on a bien $\varnothing \subset A$.

□

Puisque $\varnothing$ est unique, $\varnothing$ ne dépend pas de l'ensemble utilisé pour le définir. Ainsi l'existence de $\varnothing$ est indépendante de tout ensemble. Il peut sembler paradoxal que toute l'arithmétique et les mathématiques reposent sur cet ensemble, l'ensemble qui ne contient rien. Mais nous verrons que c'est bien le cas.

L'ensemble vide permet de définir la notion de nombre à l'intérieur même de la théorie des ensembles, sans faire référence à d'autres concepts que ceux afférents aux ensembles. Toutes les propriétés des nombres et de leurs opérations élémentaires découlent naturellement de cette théorie.

La déduction de l'arithmétique à partir de la théorie des ensembles (cf. appendice IV.A ou [Lan01], [Sup72] et [Sch91]) a permis, pour la première fois, de donner une assise solide à toutes les techniques de calcul sur les nombres. Cela a contribué à bien comprendre ce qu'est un nombre et, surtout, a permis de démontrer que les propriétés des opérations élémentaires des nombres, que l'on utilise couramment, sont toujours vraies.

Exercice 1.2.
Faire un résumé des résultats concernant l'ensemble vide.

1.3 L'Ensemble des parties

L'axiome de l'ensemble des parties affirme que pour tout ensemble A, il existe un ensemble B dont les éléments sont les sous-ensembles de A.

Axiome 3 (Ensemble des parties)

Si A est un ensemble, il existe un ensemble B dont les éléments sont les parties de A,

$$\forall A, \exists B, (X \in B \Rightarrow X \subset A).$$

L'axiome affirme l'existence de l'ensemble B, que l'on notera $\mathcal{P}(A)$, et dont l'usage est fixé par la définition suivante.

Définition 4 (Ensemble des parties)

Soit A un ensemble. On appelle *ensemble des parties* de A, l'ensemble $\mathcal{P}(A)$ dont les éléments sont toutes les parties de l'ensemble A.

Remarque 10

Les éléments de $\mathcal{P}(A)$ sont des ensembles, les sous-ensembles, ou les parties de A. Son existence est affirmée par l'axiome de l'ensemble des parties.

Exemple 4

Soit A l'ensemble défini en extension par $A = \{a, b\}$. L'ensemble des parties de A est

$$\mathcal{P}(A) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}.$$

On observe en effet que chaque élément de $\mathcal{P}(A)$ est inclus dans A.

Exemple 5

Si $A = \varnothing$, on a alors

$$\mathcal{P}(\varnothing) = \{\varnothing\}$$

et

$$\mathcal{P}(\mathcal{P}(\varnothing)) = \{\varnothing, \{\varnothing\}\},$$

et encore

$$\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\varnothing))) = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\ \}.$$

Théorème 1.6

Pour tout ensemble A, on a

a) $\varnothing \in \mathcal{P}(A)$

b) $A \in \mathcal{P}(A)$

Preuve.

a) C'est clair puisque $\varnothing$ est inclus dans tout ensemble A.

b) C'est clair puisque A est toujours inclus dans A.

$\square$

1.4 Constructions

1.4.1 Intersection

L'axiome de sélection permet de construire l'intersection de deux ensembles donnés, qui est l'ensemble des éléments qui sont communs aux deux ensembles :

Définition 5 (intersection)

Soit A, B deux ensembles. L'*intersection de A et de B,* notée $A \cap B$ est l'ensemble défini par l'axiome de sélection en posant $p(x) = x \in B$

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B).$$

On lit $A \cap B$: « A inter B ».

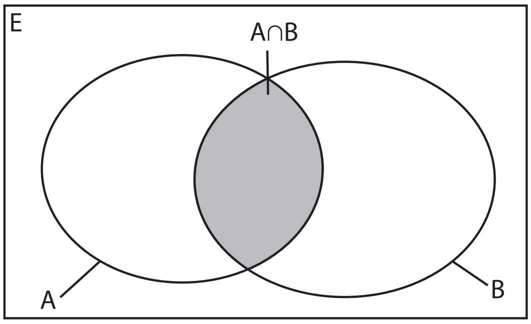


FIGURE 1.2 – En gris : l'intersection de deux ensembles A et B.

Propriété 1.7 (de l'intersection)

Soit A, B, C trois ensembles. Les égalités suivantes sont vérifiées

a) $(x \in A \cap B) \Leftrightarrow (x \in A$ et $x \in B)$.

b) $A \cap \varnothing = \varnothing$.

c) $A \cap A = A$.

d) $A \cap B = B \cap A$.

e) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

Preuve.

a) C'est le contenu de la définition de $A \cap B$.

b) Par définition de l'intersection de $A \cap \varnothing$, on a

$$x \in A \cap \varnothing \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in \varnothing).$$

Or, la propriété $x \in \varnothing$ est toujours fausse. Il en découle, par définition du $\wedge$ que la parenthèse de droite est toujours fausse. Ainsi, à cause de l'équivalence, l'expression de droite est également toujours fausse. On a alors : $\forall x, x \notin A \cap \varnothing$. Ainsi, nous pouvons affirmer, par le théorème 1.1 que

$$A \cap \varnothing = \varnothing.$$

c) Par définition de l'intersection, nous avons

$$(x \in A \cap A) \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in A) \Leftrightarrow (x \in A).$$

Ainsi, nous avons

$$x \in A \cap A \Leftrightarrow x \in A.$$

Par l'axiome d'extension, nous concluons que

$$A \cap A = A.$$

d) Il découle de la définition du $\wedge$ (le **et** de la logique) que $\wedge$ est commutatif. Il s'en suit que $x \in A \wedge x \in B$ est équivalent à $x \in B \wedge x \in A$. Ainsi

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \Leftrightarrow (x \in B \wedge x \in A) \Leftrightarrow x \in B \cap A.$$

Par l'axiome d'extension, nous en déduisons que $A \cap B = B \cap A$.

e) Cette propriété revient à prouver que

$$(x \in A \wedge x \in B) \wedge x \in C \Leftrightarrow x \in A \wedge (x \in B \wedge x \in C),$$

soit

$$(p \wedge q) \wedge r \leftrightarrow p \wedge (q \wedge r),$$

ce qui est clair en faisant les tables de vérité de ces constructions.

□

Exercice 1.3.
Prouver, en faisant les tables de vérité, que $(p \wedge q) \wedge r \leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$, autrement dit, que la conjonction des propositions est associative.

Définition 6 (disjoints)

Deux ensembles A et B sont dits *disjoints* s'ils n'ont aucun élément en commun

$$A \cap B = \varnothing.$$

1.4.2 Paire

L'axiome de la paire permet de construire un ensemble à partir de deux objets quelconques.

Axiome 4 (de la paire)

Soit a, b deux objets, il existe un ensemble, appelé *paire*, ne contenant que ces deux objets comme éléments

$$\forall a, \forall b, \exists A (x \in A \Leftrightarrow x = a \vee x = b).$$

On note

$$A = \{a, b\}.$$

La première paire que l'on va considérer est celle qui contient deux fois le même élément. On constate, d'après l'axiome d'extension, qu'un élément donné a peut figurer autant de fois que l'on veut dans un ensemble A. Seule la présence ou non du symbole a compte. Le nombre d'occurrence n'a, quant à lui, aucune importance. La définition suivante formalise ce principe.

Définition 7 (singleton)

On appelle *singleton* $\{a\}$ la paire $\{a\} = \{a, a\}$.

Passons à un petit jeu. Nous avons vu que le seul ensemble dont on peut légitimement affirmer l'existence est $\varnothing$.

Grâce à l'axiome de la paire et la définition du singleton, nous pouvons construire, à partir de $\varnothing$, le singleton

$$\{\varnothing\},$$

le singleton qui contient l'ensemble $\varnothing$. Attention ! cet ensemble n'est pas vide. Il contient un objet, l'ensemble $\varnothing$, qui, lui, est vide.

Nous nous trouvons maintenant avec deux ensembles : $\varnothing$ et $\{\varnothing\}$. On peut alors construire la paire

$$\{\varnothing, \{\varnothing\}\}.$$

Cette paire contient deux objets distincts. Et on peut continuer ainsi de suite. Ce petit jeu de construction est le point de départ des nombres naturels.

Il peut sembler utile de définir des paires où l'ordre des éléments est important. Dans les ensembles, l'ordre des éléments n'a aucune importance. L'ensemble $\{a, b\}$ et l'ensemble $\{b, a\}$ sont le même ensemble. Cela découle directement de l'axiome d'extension.

Il faudra attendre la construction des couples, pour générer des ensembles dans lesquels l'ordre est important.

1.4.3 Réunion

Contrairement à l'intersection, l'axiome de sélection ne permet pas de définir la réunion de deux ensembles, car cette réunion fait appel au connecteur $\vee$ au lieu du connecteur $\wedge$ de l'axiome de sélection. Nous avons donc besoin d'un nouvel axiome pour affirmer l'existence de la réunion de deux ensembles A et B.

Axiome 5 (de la réunion)

Soit A, B deux ensembles. Il existe un ensemble C, appelé l'union de A et de B dont les éléments sont ceux de A et ceux de B

$$\forall A, \forall B, \exists C\,(x \in C \Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B))\,.$$

On écrit $C = A \cup B$, ce qui se lit : « A union B. »

L'ensemble C défini par l'axiome précédent introduit une nouvelle notation

Définition 8 (union)

Soient A et B deux ensembles. On appelle réunion de A et B l'ensemble, dont l'existence est affirmée par l'axiome précédent et qui se note $A \cup B$ et défini par

$$A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}.$$

On lit :« A union B ».

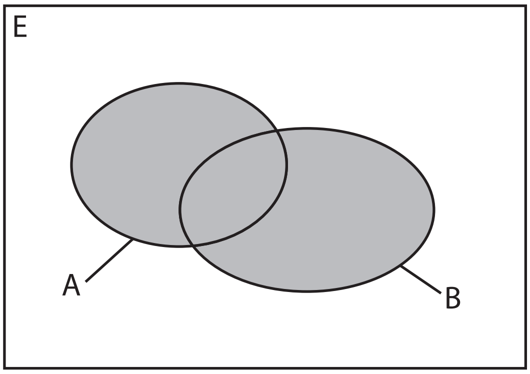


FIGURE 1.3 – En gris : la réunion des deux ensembles A et B.

La réunion des ensembles possède les propriétés suivantes.

Propriété 1.8 (de la réunion.)

Soit A, B, C trois ensembles. On a les propriétés suivantes
a) $(x \in A \cup B) \Leftrightarrow (x \in A$ ou $x \in B)$.
b) $A \cup \varnothing = A$.
c) $A \cup A = A$.
d) $A \cup B = B \cup A$.
e) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.

Preuve.

a) Il découle de l'axiome de la réunion, en remplaçant C par $A \cup B$ que

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B).$$

Ce qui est le résultat cherché.

b) $x \in A \cup \varnothing \Leftrightarrow (x \in A \ \vee x \in \varnothing)$. Or la propriété $x \in \varnothing$ est toujours fausse. Ainsi, la proposition

$$x \in A \ \vee x \in \varnothing.$$

c) Pour montrer l'égalité des deux ensembles, utilisons l'axiome d'extension. Il faut prouver que

$$(x \in A \cup A) \Leftrightarrow (x \in A).$$

Cela signifie que $x \in A \vee x \in A \Leftrightarrow x \in A$. Or il est toujours vrai que $p \vee p \Leftrightarrow p$. Ainsi, par l'axiome d'extension : $A \cup A = A$.

d) Il découle de la définition du $\vee$ (le **ou** de la logique) que $\vee$ est commutatif. Il s'en suit que $x \in A \vee x \in B$ est équivalent à $x \in B \vee x \in A$. Ainsi

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \Leftrightarrow (x \in B \vee x \in A) \Leftrightarrow x \in B \cup A.$$

Par l'axiome d'extension, nous en déduisons que $A \cap B = B \cap A$.

e) Cette propriété revient à prouver que

$$(x \in A \vee x \in B) \vee x \in C = x \in A \vee (x \in B \vee x \in C),$$

soit

$$(p \vee q) \vee r = p \vee (q \vee r),$$

ce qui est clair en faisant les tables de vérité de ces constructions.

□

Théorème 1.9

Soit A, B, C trois ensembles. On a les relations suivantes
a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$,
b) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Ces trois derniers théorèmes définissent l'algèbre de Boole. C'est l'ensemble des règles qui gèrent les opérations sur les ensembles.

1.5 Partition

Définition 9 (Partition)

Soit A un ensemble. On appelle *partition* de A une partie P de $\mathcal{P}(A)$ telle que
a) $\varnothing \notin P$.
b) Tous les éléments de P sont deux à deux disjoints :

$$X \cap Y = \varnothing, \quad \forall X, Y \in P.$$

c) La réunion de tous les éléments de P est l'ensemble A.

Remarque 11

Les éléments d'une partition sont des ensembles. Une partition d'un ensemble A est un ensemble dont les éléments sont certains sous-ensembles (certaines parties) de A.

1.6 Complémentaire

La notion de complémentaire est en étroite relation avec la logique. Si, dans un référentiel E, A représente l'ensemble de tous les éléments x de E qui vérifient une propriété $p(x)$, le complémentaire de A représente l'ensemble des éléments qui restent. C'est-à-dire l'ensemble des éléments x de E qui ne satisfont pas la propriété $p(x)$. La notion de complémentaire permet ainsi de séparer un ensemble en deux parties selon que les éléments de E vérifient ou non une propriété donnée.

La notion de complémentaire est le correspondant mathématique de la notion exprimée par l'expression "les autres".

Définition 10 (complémentaire)

Soit $A \subset E$. On appelle *complémentaire de A dans E* l'ensemble

$$\complement_E A = \{x \in E | x \notin A\}.$$

Notation 1

Lorsqu'il n'y a pas de doute pour l'ensemble E, on note : $\bar{A}$ au lieu de $\complement_E A$.

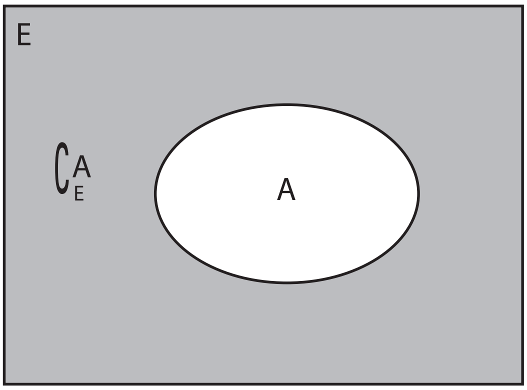


FIGURE 1.4 – En gris : Le complémentaire de A dans E.

Proposition 1.10 (Lois de Morgan)

Soit $A \subset E$ et $B \subset E$, alors
a) $\complement_E E = \varnothing$.
b) $\complement_E \varnothing = E$.
c) $\complement_E (A \cup B) = \complement_E A \cap \complement_E B$.
d) $\complement_E (A \cap B) = \complement_E A \cup \complement_E B$.

Définition 11 (différence)

Soit A et B deux parties d'un ensemble E. On appelle *différence* de A par B, on note $A - B$ (ou $A \setminus B$,) l'ensemble

$$A - B = A \setminus B = \{x \in E | x \in A \text{ et } x \notin B\}.$$

Remarque 12

Si $B \subset A$, alors : $\complement_A B = A - B$.

Définition 12 (différence symétrique)

Soit A et B deux parties d'un ensemble E. On appelle *différence symétrique de A et B*, on note $A \triangle B$ l'ensemble

$$A \triangle B = (A - B) \cup (B - A).$$

Remarque 13

Les symboles $\in, \subset, \cup, \cap$ sont très différents. Il convient de bien les utiliser.
$\in$ a un élément à sa gauche et un ensemble à sa droite : $a \in A$. Cette assemblage est une *proposition*.
$\subset$ a un ensemble de chaque côté : $A \subset B$. Cette assemblage est une *proposition*.
$\cup, \cap$ ont un ensemble de chaque côté : $A \cup B$, $A \cap B$. Ces assemblages sont des *ensembles*.

1.7 Axiome de fondement

Comme nous l'avons vu en page 20, on peut facilement créer des contradictions avec l'axiome de sélection. Il nous faut alors un axiome qui élimine les propositions “illicites” lors de la formation des ensembles à partir de l'axiome de sélection. Cet axiome est l'axiome de fondement :

Axiome 6 (de fondement)

Tout ensemble non vide A contient un élément B, tel que $A \cap B = \varnothing$:

$$\forall A \neq \varnothing (\exists B \in A \ \wedge \ A \cap B = \varnothing).$$

Il en découle le théorème

Théorème 1.11

Pour tout ensemble A : $A \notin A$.

Preuve.

Supposons qu'il existe un ensemble A tel que $A \in A$.
On a alors : $A \in \{A\} \cap A$. Or d'après l'axiome de fondement, il existe un élément de $\{A\}$ qui est disjoint de $\{A\}$. Comme le seul élément de $\{A\}$ est A, on doit avoir :

$$A \cap \{A\} = \varnothing.$$

Ce qui contredit l'hypothèse de départ.

□

Corollaire 1.12

Il n'existe pas d'ensemble de tous les ensembles. Autrement dit, la collection de tous les ensembles n'est pas un ensemble.

Preuve.

Si la collection de tous les ensembles était un ensemble, il devrait se contenir lui-même. Ce qui contredit le théorème précédent.

□

1.8 Pour conclure

En plus des axiomes que nous avons cités dans les sections précédentes, la théorie des ensembles utilise encore trois autres axiomes.

Les axiomes de remplacement et du choix qui complètent l'axiomatique de base des ensembles. Enfin l'axiome de Peano, ou l'axiome de l'infini (cf. p. 192), permet d'introduire les nombres entiers naturels dans le cadre de la théorie des ensembles. Ce dernier axiome donne un sens concret à la notion de nombre et permet ainsi de construire toute l'arithmétique à partir de la théorie des ensembles, en bénéficiant de sa solidité et de sa rigueur.

L'axiome du choix dit si l'on dispose d'un ensemble E d'ensembles

$$E = \{E_1, E_2, \ldots\}$$

alors on peut toujours choisir un élément de chacun de ces ensembles, même (surtout, car sinon l'axiome du choix est inutile) si l'ensemble contient une infinité d'ensembles.

Axiome 7 (du choix)

Pour tout ensemble E d'ensembles non vides et disjoints, il existe un ensemble A contenant exactement un élément de chacun des ensembles de E.

L'axiome du choix permet de démontrer des résultats surprenants [1]

Enfin l'axiome de remplacement, ou de substitution (qui est en réalité un schéma d'axiomes, comme l'axiome de compréhension) affirme que tout ensemble a comme image un ensemble par une fonction.

1. Le paradoxe de Banach-Tarski, par exemple, montre qu'il est possible de découper une sphère et par des isométries, recoller les morceaux pour obtenir deux sphères qui ont chacune le même volume que la sphère initiale.

1.9 Ce qu'il faut connaître

1. Comment montre-t-on que deux ensembles sont égaux ?
2. Énoncer l'axiome d'extensionalité.
3. Énoncer l'axiome de compréhension.
4. Définition de l'inclusion, d'une partie.
5. Propriétés de l'inclusion (énoncés et preuves).
6. Propriétés de l'ensemble vide (et preuves).
7. Définition de l'ensemble des parties et propriétés des parties.
8. Définition et propriétés de l'intersection (énoncés et preuves).
9. Axiome, définition et propriétés de la réunion (énoncés et preuves).
10. Définition de la partition.
11. Définition et propriétés des complémentaires.
12. Maîtriser le vocabulaire et la notation ensembliste.

1.10 Exercices

1.10.1 Ensembles

Exercice 1.4.
Définir en extension les ensembles suivants

1. L'ensemble A des doigts d'une main.
2. L'ensemble B des lettres de l'alphabet figurant dans le mot « anticonstitutionnellement ».
3. L'ensemble C des noms de saisons.
4. L'ensemble D des noms de saisons dont l'initiale est une voyelle.
5. L'ensemble E des noms de saisons dont l'initiale est la lettre « s ».
6. L'ensemble F des nombres premiers compris entre 30 et 40.
7. L'ensemble G des nombres pairs positifs qui sont premiers.
8. L'ensemble H des nombres impairs divisibles par 10.
9. L'ensemble I des multiples positifs du nombre 10 inférieurs à 36.
10. L'ensemble J des nombres négatifs divisibles par 5 et supérieurs à -24.
11. L'ensemble K des nombres impairs compris entre 10 et 20.

Exercice 1.5.
Lire en français et définir en extension les ensembles suivants

1. $A = \{x | x \in \mathbb{N} \text{ et } x < 10\}$
2. $B = \{x | x \in \mathbb{N} \text{ et } 3 \leq x < 8\}$
3. $C = \{x | x \in \mathbb{Z} \text{ et } -3 \leq x \leq 3\}$
4. $D = \{x | x \in \mathbb{N}^* \text{ et } \frac{x}{3} \in \mathbb{N}\}$
5. $E = \{x | x = 2n \text{ et } n \in \mathbb{N}\}$
6. $F = \{x | x \in \mathbb{Z} \text{ et } \frac{x}{4} \in \mathbb{Z}\}$
7. $G = \{x | x \in \mathbb{N} \text{ et } \frac{x+1}{2} \in \mathbb{N}\}$
8. $H = \{x | x \in \mathbb{Z} \text{ et } x + 2 \in \mathbb{N}\}$
9. $I = \{x | x \in \mathbb{N} \text{ et } \frac{2x+3}{5} \in \mathbb{N}\}$
10. $J = \{x | x \in \mathbb{Z} \text{ et } 0 \cdot x = 0\}$
11. $K = \{x | x \in \mathbb{N} \text{ et } x - 2 \in \mathbb{N}^*\}$
12. $L = \{x | x \in \mathbb{Z} \text{ et } x^2 = 4\}$
13. $M = \{x | x \in \mathbb{Z} \text{ et } x^2 + 9 = 0\}$
14. $N = \{x | x \in \mathbb{Z} \text{ et } x + 2 = 0\}$
15. $P = \{x | x \in \mathbb{N} \text{ et } 2x = 1\}$
16. $Q = \{x | x \in \mathbb{N} \text{ et } 5 \leq x \leq 10 \text{ et } x \text{ est premier}\}$

Exercice 1.6.
Traduire en français l'énoncé suivant

$$x \in \mathbb{N} - \{1\} \text{ tel que } \frac{x}{n} \in \mathbb{N} \Rightarrow (n = 1 \vee n = x)$$

Que sont ces nombres x ?

Exercice 1.7.
Définir en compréhension les ensembles suivants

1. $A = \{\text{nord, sud, est, ouest}\}$
2. $B = \{\text{goût, odorat, ouïe, toucher, vue}\}$
3. $C = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$
4. $D = \{0, 6, 12, 18, 24, 30, 36, \ldots\}$
5. $E = \{\ldots, -7, -5, -3, -1, 1, 3, 5, 7, \ldots\}$
6. $F = \{2, 4, 6, 8\}$
7. $G = \{17, 34, 51, 68, 85\}$
8. $H = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 31, \ldots, 97\}$
9. $I = \{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100\}$

Exercice 1.8.
Soit les ensembles $A = \{a, b, c, d, 1, 2, 3\}$ et $B = \{a, d, 2\}$. Définir en extension l'ensemble

$$E = \{x | x \in A \text{ et } x \notin B\}.$$

Exercice 1.9.
Les ensembles suivants sont-ils égaux ?

1. $A = \{a, b, c, d\}$ et $B = \{c, a, d, b\}$
2. $A = \{1, 2, 3\}$ et $B = \{123\}$
3. $A = \{x | x \in \mathbb{N} \text{ et } \frac{x}{5} \in \mathbb{N} \text{ et } 10 < x < 15\}$
   et $B = \{x | x \in \mathbb{N} \text{ et } x \text{ est premier et } 24 < x < 28\}$
4. $A = \{x | x = 3n \text{ et } n \in \mathbb{N}^*\}$ et $B = \{x | x \in \mathbb{N} \text{ et } \frac{x}{3} \in \mathbb{N}\}$
5. $A = \{a, 1, 2\}$ et $B = \{1, 2, \{a\}\}$
6. $A = \{x | x \in \mathbb{N} \text{ et } x \text{ est impair}\}$ et $B = \{x | x \in \mathbb{N} \text{ et } 2x + 1 \in \mathbb{N}\}$

Exercice 1.10.
À quelle(s) condition(s) les ensembles A et B suivants sont-ils égaux ?

1. $A = \{a, b, c, d\}$ et $B = \{a, 1, c, b\}$
2. $A = \{a, b\}$ et $B = \{1, 2\}$
3. $A = \{a, b, c, d, e\}$ et $B = \{1, 2, a, c, e\}$

Exercice 1.11.
Soit les ensembles $A = \{a, b\}$, $B = \{a, b, 1\}$ et $C = \{A, B, \{1\}\}$. Les affirmations suivantes sont-elles correctes ?

1) $a \in A$	2) $2 \notin B$	3) $\{a\} \in A$	4) $\{a, b\} \in B$
5) $B \in C$	6) $\{a, b\} \in C$	7) $1 \in C$	8) $\{1\} \in C$

Exercice 1.12.
Les écritures suivantes sont-elles correctes ?

$$\varnothing \in \mathbb{N}, \ \varnothing = \{\varnothing\}, \ \varnothing \in \{\varnothing\}.$$

Exercice 1.13.
Les écritures suivantes sont-elles correctes ? Si tel n'est pas le cas, apporter les corrections nécessaires.

1) $1 \subset \{1, 2, 3\}$	2) $\{a\} \in \{2, a, b\}$	3) $\{4, 6\} \subset \{6, 4\}$
4) $\{1, 2, 3\} \in \mathbb{N}$	5) $\varnothing \subset \{a, b, c\}$	6) $\varnothing \subset \{\varnothing, \{a, b\}\}$
7) $\varnothing \in \varnothing$	8) $\varnothing \subset \{\varnothing\}$	9) $\{\varnothing\} \subset \varnothing$

Exercice 1.14.
Illustrer par un diagramme de Venn les inclusions existant entre les trois ensembles suivants

$$A = \{3, 6, 9\}, \ B = \{2, 3, 4, 6, 8, 9\} \text{ et } C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}.$$

Exercice 1.15.
Soit l'ensemble $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Former tous les sous-ensembles possibles de E ayant deux, trois ou quatre éléments.

Exercice 1.16.
Soit $\mathcal{T}$ l'ensemble des triangles du plan. Écrire toutes les inclusions possibles entre les ensembles suivants.

1. $A = \{x \in \mathcal{T} |\ x \text{ est isocèle}\}$
2. $B = \{x \in \mathcal{T} |\ x \text{ est équilatéral}\}$
3. $C = \{x \in \mathcal{T} |\ x \text{ est rectangle}\}$
4. $D = \{x \in \mathcal{T} |\ x \text{ est rectangle et isocèle}\}$
5. $E = \{x \in \mathcal{T} |\ x \text{ possède au plus un axe de symétrie}\}$
6. $F = \{x \in \mathcal{T} |\ x \text{ a au moins deux angles égaux }\}$

Exercice 1.17.
Soit trois ensembles A, B et C. Démontrer l'implication

$$(A \subset B \text{ et } B \subset C) \Rightarrow (A \subset C).$$

1.10.2 Ensemble des parties

Exercice 1.18.
Soit l'ensemble $E = \{a, b, c\}$. Déterminer $\mathcal{P}(E)$.

Exercice 1.19.
Soit le singleton $E = \{a\}$. Déterminer $\mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$.

Exercice 1.20.
Construire $\mathcal{P}(\varnothing), \mathcal{P}(\mathcal{P}(\varnothing))$ et $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\varnothing)))$. Combien d'éléments contiennent ces ensembles ?

Exercice 1.21.
Soit l'ensemble $E = \{a, b, c, d\}$. Les écritures suivantes sont-elles correctes ?

1) $a \in \mathcal{P}(E)$	2) $\{b, c\} \in \mathcal{P}(E)$
3) $\varnothing \subset \mathcal{P}(E)$	4) $\{\{a\}, \{d\}\} \subset \mathcal{P}(E)$
5) $E \in \mathcal{P}(E)$	6) $E \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$

Exercice 1.22.
Si un ensemble E a n éléments, alors l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ de ses parties a 2^n éléments. Vérifier ce théorème dans les cas particuliers où n prend les valeurs $0, 1, 2, 3$ ou 4.

Exercice 1.23.
Démontrer le théorème cité dans l'exercice précédent.

Exercice 1.24.
Prouver le théorème 1.6.

Exercice 1.25.
Soit les ensembles $A = \{1\}$ et $B = \{a\}$. Construire les ensembles $A \cup B$, $\mathcal{P}(A \cup B)$ et $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B))$.

1.10.3 Intersection et réunion

Exercice 1.26.
On donne deux parties A et B de l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels. Déterminer (en compréhension et en extension) $A \cap B$ et $A \cup B$ dans chacun des cas suivants

1. $A = \{x \in \mathbb{N} | 3 \leq x \leq 9\}$ et $B = \{x \in \mathbb{N} | x > 5\}$
2. $A = \{x \in \mathbb{N} | x \text{ est divisible par } 3\}$ et $B = \{x \in \mathbb{N} | x \text{ est divisible par} 4\}$
3. $A = \{x \in \mathbb{N} | x \text{ est premier}\}$ et $B = \{x \in \mathbb{N} | x \text{ est pair}\}$
4. $A = \{x \in \mathbb{N} | \frac{x}{5} \in \mathbb{N}\}$ et $B = \{x \in \mathbb{N} | \frac{x}{10} \in \mathbb{N}\}$
5. $A = \{x \in \mathbb{N} | x < 7\}$ et $B = \{x \in \mathbb{N} | x \geq 7\}$

Exercice 1.27.
Dans l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels, on considère le sous-ensemble P des nombres pairs et le sous-ensemble I des nombres impairs. Déterminer

1) $P \cap I$	2) $P \cup I$	3) $\complement_{\mathbb{N}} P$
4) $\complement_{\mathbb{N}} I$	5) $\complement_{\mathbb{N}} P \cup I$	6) $\complement_{\mathbb{N}} (P \cap I)$
7) $\complement_{\mathbb{N}} P \cap \complement_{\mathbb{N}} I$	8) $\complement_{\mathbb{N}} P \cup \complement_{\mathbb{N}} I$	

Exercice 1.28.
Soit l'ensemble $E = \{a, b, c, d, e\}$ et deux parties de cet ensemble $A = \{a, c, d\}$ et $B = \{a, d\}$. Trouver toutes les parties X de E telles que $A \cap X = B$.

Exercice 1.29.
Soit l'ensemble $E = \{a, b, c, d, e\}$ et deux parties de cet ensemble $A = \{a, c\}$ et $B = \{a, b, c, e\}$. Trouver toutes les parties X de E telles que $A \cup X = B$.

Exercice 1.30.
Soit $A = \{x \in \mathbb{Z} | x \leq 7\}$ et $B = \{x \in \mathbb{N} | 4 \leq x \leq 9\}$. Déterminer en compréhension

1) $A \cap B$	2) $A \cup B$	3) $\complement_{\mathbb{Z}} (A \cap B)$
4) $\complement_{\mathbb{Z}} A \cup \complement_{\mathbb{Z}} B$	5) $\complement_{\mathbb{Z}} (A \cup B)$	6) $\complement_{\mathbb{Z}} A \cap \complement_{\mathbb{Z}} B$

Exercice 1.31.
Soit l'ensemble $E = \{x \in \mathbb{N} | x < 10\}$ et deux parties de cet ensemble $A = \{x \in E | x \text{ est un multiple de } 3\}$ et $B = \{x \in E | x \text{ est un diviseur de } 24\}$. Déterminer en extension

1) $A \cap B$	2) $A \cup B$	3) $\overline{A \cap B}$
4) $\overline{A} \cup \overline{B}$	5) $\overline{A \cup B}$	6) $\overline{A} \cap \overline{B}$

Exercice 1.32.
Démontrer le théorème 1.9 sur la distributivité de l'intersection et de la réunion.

Exercice 1.33.
Dans un collège, les cours de langues à option comprennent l'anglais, le latin et l'italien. Parmi les 500 élèves de ce collège, 360 étudient au moins l'anglais, 230 au moins le latin et 125 au moins l'italien. D'autre part, 160 élèves étudient au moins l'anglais et le latin, 85 au moins l'anglais et l'italien et 45 au moins le latin et l'italien. Enfin, 20 élèves apprennent les trois langues.

Déterminer le nombre d'élèves qui étudient uniquement l'anglais, ou uniquement le latin, ou uniquement l'italien, ainsi que le nombre de ceux qui n'étudient aucune de ces trois langues.

Exercice 1.34.
Soit A, B et C trois parties d'un ensemble E, telles que $A \cap B \cap C \neq \varnothing$. Représenter par un diagramme de Venn les sous-ensembles de E suivants.

1. $(A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)$	2. $\overline{A} \cup B \cup C$
3. $A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$	4. $\overline{A} \cap (B \cup C)$
5. $\overline{A} \cap (\overline{B} \cup \overline{C})$	6. $(A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{C})$
7. $(A \cap B \cap C) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C})$	8. $A \cap [(B \cap \overline{C}) \cup (\overline{B} \cap C)]$

1.10.4 Complémentaires

Exercice 1.35.
Soit l'ensemble $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Définir en extension le complémentaire dans E de chacune des parties de E suivantes. Illustrer par un diagramme de Venn.

1. $A = \{x \in E | x \text{ est un multiple de } 3\}$
2. $B = \{x \in E | x \text{ est un nombre premier}\}$
3. $C = \{x \in E | x \text{ est divisible par 2 ou par } 3\}$
4. $D = \{x \in E | x \text{ est un diviseur de } 24\}$

Exercice 1.36.
Définir en compréhension et en extension, le complémentaire dans $\mathbb{Z}$ de chacun des sous-ensembles de $\mathbb{Z}$ suivants.

1) $A = \{x \in \mathbb{Z} | x \geq -3\}$	2) $B = \{x \in \mathbb{Z} | -5 \leq x < 7\}$
3) $C = \{x \in \mathbb{Z} | \, |x| \leq 3\}$	4) $D = \{x \in \mathbb{Z} | \, |x| > 5\}$
5) $E = \{x \in \mathbb{Z} | \frac{1}{x} \in \mathbb{Z}\}$	6) $F = \{x \in \mathbb{Z} | x^2 + 1 = 0\}$
7) $G = \{x \in \mathbb{Z} | 1 - x \in \mathbb{Z}\}$	8) $H = \{x \in \mathbb{Z} | x^2 \in \mathbb{N}^*\}$

Exercice 1.37.
Soit A et B deux parties d'un ensemble E. Démontrer l'équivalence

$$(A \subset B) \Leftrightarrow (\complement_E B \subset \complement_E A).$$

Exercice 1.38.
Soit A et B deux parties d'un ensemble E. Démontrer l'équivalence

$$(A = B) \Leftrightarrow (\complement_E A = \complement_E B),$$

en utilisant le résultat de l'exercice précédent.

Exercice 1.39.
Soit A, B et C trois parties d'un ensemble E. Simplifier les écritures suivantes

1. $A \cap (\overline{A} \cup B)$	2. $A \cup (\overline{A} \cap B)$
3. $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$	4. $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$
5. $[A \cup (A \cap B)] \cap B$	6. $(\overline{A \cup B}) \cap (\overline{A} \cup B)$
7. $A \cap B \cap (B \cup C)$	8. $(A \cup B) \cap (A \cup C) \cap (B \cap C)$
9. $(\overline{A \cup B}) \cap (\overline{A \cap C})$	10. $(\overline{A \cap B}) \cap (\overline{A \cap C}) \cap \overline{C}$

Exercice 1.40.
Prouver les lois de Morgan, i. e. les propriétés 1.10.

1.10.5 Divers

Exercice 1.41.
Soit l'ensemble $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Trouver une partition de E comprenant quatre parties A, B, C et D, telles que $A \cup B = \{0, 1, 3, 5\}$, $A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 8\}$ et $D \cap E = \{6, 7, 9\}$.

Exercice 1.42.
Soit A et B deux parties non vides d'un ensemble E, telles que $A \cap B \neq \varnothing$. Indiquer une partition de E en quatre parties.

Exercice 1.43.
Soit A, B et C trois parties non vides d'un ensemble E, telles que $A \cap B \cap C \neq \varnothing$. Indiquer une partition de E comprenant huit éléments.

Chapitre 2

Relations

Le sens commun du terme relation implique un lien entre deux ou plusieurs objets. On considère que l'on a fait un grand bond en avant dans l'effort de clarification des mathématiques lorsque, en 1921, un certain Kuratowski s'appuyant sur une approche de Wiener de 1914, s'aperçut que l'on pouvait réduire la notion de relation à une construction sur les ensembles.

Le point de départ réside dans le théorème suivant, qui permet de construire des ensembles à partir de deux éléments, dans lesquels l'ordre est important, contrairement aux paires.

Théorème 2.1

Soit $a, x \in A$ et $y, b \in B$. Alors on a

$$\{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{a\}, \{a, b\}\} \Leftrightarrow \begin{cases} x &= a \\ y &= b. \end{cases}$$

Preuve.

La réciproque est claire, montrons l'implication directe. Procédons par étapes selon que $a = b$ ou que $a \neq b$.

1^er^ cas : a = b. On a alors

$$\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{a\}, \{a, a\}\} = \{\{a\}, \{a\}\} = \{\{a\}\},$$

par la définition du singleton. Ainsi, puisque $\{\{a\}\}$ est égal à $\{\{x\}, \{x, y\}\}$, il faut que

$$\{x\} = \{a\} \qquad \text{et} \qquad \{a\} = \{x, y\}.$$

Soit

$$x = y = a.$$

Ainsi, nous avons montré que

$$\begin{cases} a &= x \\ b &= y. \end{cases}$$

2^e^ cas : a $\neq$ b. Supposons

$$\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{x\}, \{x, y\}\}.$$

On exclut le cas $\{a\} = \{x, y\}$, car il revient au cas précédent. On a alors

$$\{a\} = \{x\}.$$

Ainsi, $x = a$. On obtient alors

$$\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{a\}, \{a, y\}\}.$$

D'où

$$\{a, b\} = \{a, y\},$$

soit

$$b = y.$$

Ainsi

$$\begin{cases} a &= x \\ b &= y. \end{cases}$$

□

2.1 Couples, n-uplets et produits cartésiens

Afin d'alléger la notation, on définit

Définition 1 (couple)

Soit $a \in A$ et $b \in B$. On définit le *couple* (a, b) par la paire $\{\{a\}, \{a, b\}\}$. Ainsi $(a, b) \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B))$.

Remarque 1

Ainsi le théorème 2.1 devient

$$(x, y) = (a, b) \Leftrightarrow \begin{cases} x & = a \\ y & = b. \end{cases}$$

Les couples, dont le premier élément est dans A et le second élément dans B, sont des éléments de l'ensemble des parties de l'ensemble des parties de $A \cup B$.

Définition 2 (produit cartésien)

Soit A et B deux ensembles. On appelle *produit cartésien de A et B*, on note $A \times B$ l'ensemble contenant tous les couples (a, b) où $a \in A$ et $b \in B$.

$$A \times B = \{(a, b) \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B)) \mid a \in A \text{ et } b \in B\}.$$

Comme $A \times B$ est inclus dans $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B))$, c'est bien un ensemble.

Notation 1

On note $A^2 = A \times A$.

Exemple 1

Soit $A = \{a, b\}$ et $B = \{1, 2, 3\}$, on a alors

$$A \times B = \{(a, 1); (a, 2); (a, 3); (b, 1); (b, 2); (b, 3)\}$$

et

$$B \times A = \{(1, a); (2, a); (3, a); (1, b); (2, b); (3, b)\}.$$

On constate, dans cet exemple que $A \times B \neq B \times A$.

Remarque 2

En général : $A \times B \neq B \times A$.

Remarque 3

Pour tout ensemble A on a : $\varnothing \times A = A \times \varnothing = \varnothing$.

Définition 3 (triplet)

Soit $a \in A$, $b \in B$ et $c \in C$. On définit le *triplet* (a, b, c) par le couple

$$(a, b, c) = ((a, b), c).$$

Théorème 2.2

Soit $a, x \in A$, $b, y \in B$ et $c, z \in C$. On a :

$$(x, y, z) = (a, b, c) \Leftrightarrow \begin{cases} x &= a \\ y &= b \\ z &= c. \end{cases}$$

Preuve.
Supposons $(x, y, z) = (a, b, c)$.
On a alors, par définition des triplets

$$((x, y), z) = ((a, b), c).$$

Par le théorème sur l'égalité des couples, on a

$$((x, y), z) = ((a, b), c) \Leftrightarrow \begin{cases} (x, y) &= (a, b) \\ z &= c. \end{cases}$$

On applique à nouveau le théorème de l'égalité des couples

$$(x, y) = (a, b) \Leftrightarrow \begin{cases} x &= a \\ y &= b. \end{cases}$$

Ainsi, nous avons montré que

$$(x, y, z) = (a, b, c) \Leftrightarrow \begin{cases} x &= a \\ y &= b \\ z &= c. \end{cases}$$

□

Remarque 4

On a $(a, b, c) \in A \times B \times C = (A \times B) \times C$.

Remarque 5

On définit de même les n-uplets

$$(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n) = ((a_1, a_2, \dots, a_{n-1}), a_n)$$

comme les éléments de

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = (A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_{n-1}) \times A_n.$$

On montre que deux n-uplets $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ sont égaux si et seulement si $x_i = a_i$ pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

2.2 Relations

Soit $A = \{1, 4, 9, 15, 24, 29, 50\}$ et $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Soit $\mathcal{R}$ la relation définie par

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x \text{ est un multiple de } y.$$

On a alors

$$\begin{array}{ccccccc} 4\mathcal{R}1, & 4\mathcal{R}2, & 9\mathcal{R}1, & 9\mathcal{R}3, & 15\mathcal{R}1, & 15\mathcal{R}3, & 15\mathcal{R}5, \\ 24\mathcal{R}1, & 24\mathcal{R}2, & 24\mathcal{R}3, & 24\mathcal{R}4, & 50\mathcal{R}1, & 50\mathcal{R}2, & 50\mathcal{R}5. \end{array}$$

Pour exprimer de manière plus compacte la relation qui existe entre ces couples de nombres, on met les nombres en relation sous la forme de couples

$$\begin{array}{ccccccc} (4,1) & (4,2) & (9,1) & (9,3) & (15,1) & (15,3) & (15,5) \\ (24,1) & (24,2) & (24,3) & (24,4) & (50,1) & (50,2) & (50,5). \end{array}$$

L'ensemble défini par tous ces couples forme le graphe de la relation $\mathcal{R}$ définie ci-dessus.

Cette manière de définir une relation est très générale et suffit à prendre en compte tous les types de relations.

Ainsi, de manière générale, on définit une relation en donnant deux ensembles (pas forcément différents) entre lesquels on définit la relation désirée en donnant tous les couples d'éléments en relation :

Définition 4 (relation)

On appelle *relation* $\mathcal{R}$ de A vers B le triplet (A, B, G), où A est l'*ensemble de départ* (ou source), B est l'*ensemble d'arrivée* (ou destination) et $G \subset A \times B$ est le *graphe*.

Notation 2

Si $(a, b) \in G$, on dit que a est en relation $\mathcal{R}$ avec b et on note

$$a\mathcal{R}b.$$

Remarque 6

On dit que $\mathcal{R}$ est une *opération interne* ou une relation dans l'ensemble A, si l'ensemble de départ est $A \times A$ et l'ensemble d'arrivée est A.

C'est le cas de l'addition des nombres entiers, du produit des nombres entiers, etc.

On représente traditionnellement une relation par deux types de schémas, appelés *diagrammes*.

Diagramme sagittal Dans un diagramme sagittal, l'ensemble de départ, A, et l'ensemble d'arrivée, B, sont représentés par des ellipses allongées verticalement. Les éléments de chaque ensemble sont représentés par un point. Si l'élément $a \in A$ est en relation avec l'élément $b \in B$, on trace une flèche qui va de a jusque vers b. On répète l'opération pour tous les couples du graphe G.

Le diagramme sagittal de la relation donnée dans l'exemple de l'introduction est représenté dans la figure Fig.-2.1.

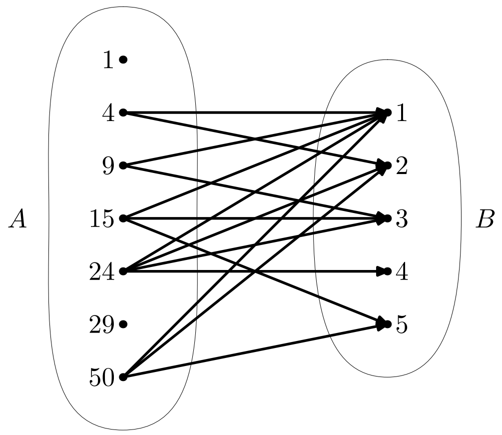


FIGURE 2.1 – Diagramme sagittal de la relation donnée en exemple.

Déjà sur cet exemple, on peut constater que losrque le nombre de liens qui lient les deux ensembles devient grand, le diagramme sagittal n'est plus très bien adapté pour représenter la relation. Le nombre de flèches devient alors grand et la lecture du diagramme est pénible.

Diagramme cartésien Le diagramme cartésien d'une relation se construit en traçant un axe horizontal, sur lequel on note les éléments de l'ensemble de départ, que coupe un axe vertical, et sur lequel on note les éléments de l'ensemble d'arrivée. On trace ensuite un réseau de lignes verticales et horizontales à partir de chaque élément. Si un élément $a \in A$ est en relation avec un élément $b \in B$, donc si $(a, b) \in G$, alors on dessine un point à l'intersection de la verticale issue de a et de l'horizontale issue de b. On réitère l'opération pour tous les couples du graphe G.

Le diagramme cartésien de la relation donnée dans l'exemple de l'introduction est représenté dans la figure Fig.-2.2.

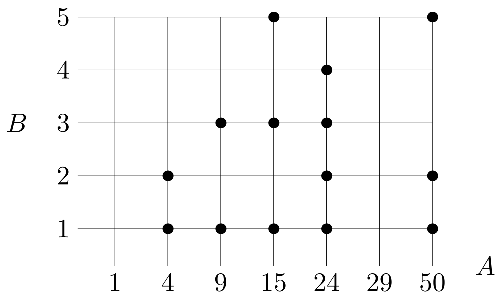


Figure 2.2 – Diagramme cartésien de cette même relation.

2.3 Relations particulières

En vue de caractériser les relations, on met en évidence les propriétés suivantes, présentes dans certaines relations

Définition 5

Soit $\mathcal{R} = (A, A, G)$ une relation dans l'ensemble A. On dit que $\mathcal{R}$ est

a) *réflexive* si pour tout $x \in A$: $x\mathcal{R}x$.
b) *symétrique* si pour tout $x, y \in A$: $x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$.
c) *antisymétrique* si pour tout $x, y \in A$: $(x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x) \Rightarrow x = y$.
d) *transitive* si pour tout $x, y, z \in A$: $(x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z) \Rightarrow x\mathcal{R}z$.
e) *connexe* (ou *totale*) si pour tout $x, y \in A$: $x\mathcal{R}y$ ou $y\mathcal{R}x$.

2.3.1 Relations d'équivalence

Bien souvent, différents éléments d'un ensemble se comporte de la mêmes manière relativement aux autres éléments. Il en découle que ces différents éléments, bien que distincts, ne se différencient pas par rapport à la relation. On peut regrouper les éléments qui se comportent de la même manière en *classes*.

Ainsi, deux éléments de la même classe se comporteront exactement de la même manière par rapport à la relation donnée.

Cette idée de regrouper des éléments *semblables* est au coeur de la notion d'*abstraction*.

Abstraire, c'est voir ce que différents objets ont en commun. C'est ainsi que la notion de *cheval* est une abstraction de tous les chevaux. Quand on parle d'un cheval en général, n'importe quel cheval est concerné. On parle de tous à la fois. C'est-à-dire tous les mammifères herbivores, quadrupèdes, qui ont des sabots faits d'un seul ongle, etc.

Cette démarche d'abstraction trouve sa justification mathématique dans la construction des relations d'équivalence et des classes d'équivalences.

Définition 6 (relation d'équivalence)

Une relation $\mathcal{R} = (A, A, G)$ est une *relation d'équivalence* si elle est réflexive, symétrique et transitive (rst).

Exemple 2

Le parallélisme dans l'ensemble $\mathbb{D}$ des droites du plan est une relation d'équivalence.

Exemple 3

Soit $A = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ l'ensemble des couples d'entiers naturels. La relation de A dans A définie par

$$(m, n)\mathcal{R}(p, q) \Leftrightarrow m + q = n + p$$

est une relation d'équivalence dans A.

Définition 7 (classe)

Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur un ensemble A. On appelle *classe d'équivalence de l'élément* $a \in A$, on note $[a]$, l'ensemble des éléments de A équivalents à a

$$[a] = \{x \in A \mid a\mathcal{R}x\}.$$

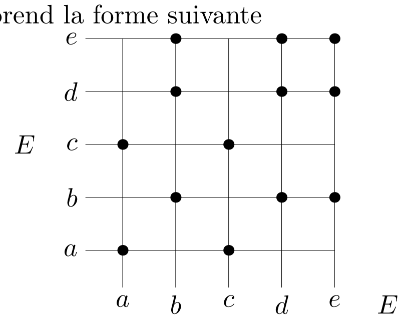
Illustrons le concept de classe par un exemple

Exemple 4

Soit $E = \{a, b, c, d, e\}$ et $\mathcal{R}$ la relation dans E définie par le graphe

$$G = \{(a,a),(a,c),(b,b),(b,d),(b,e),(c,a),(c,c),\\ (d,b),(d,d),(d,e),(e,b),(e,d),(e,e)\}.$$

et dont le diagramme cartésien prend la forme suivante



On reconnaît visuellement, dans la représentation graphique, qu'il y a deux groupes d'éléments qui sont en relation de la même façon, qui ont des points à la même hauteur.

On vérifie sans peine que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence, car elle est réflexive, symétrique et transitive. On constate de plus que

$$a\mathcal{R}c \quad \text{et} \quad b\mathcal{R}d \quad \text{et} \quad b\mathcal{R}e$$

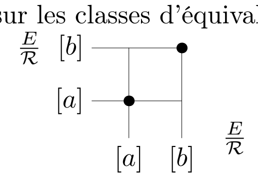
On a alors les classes d'équivalence

$$[a] = \{a, c\}$$

et

$$[b] = \{b, d, e\}.$$

Le diagramme cartésien de la relation sur les classes d'équivalence devient ainsi



Théorème 2.3

Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence dans un ensemble E et $\{a, b\} \subset E$. Si $a \not\mathcal{R} b$ alors les classes d'équivalence $[a]$ et $[b]$ sont disjointes

Preuve.

Procédons par le tiers exclus. Soit $\mathcal{R}$ une relation dans un ensemble E et $\{a, b\} \subset E$ tels que

$$a \not\mathcal{R} b.$$

Supposons qu'il existe $c \in [a] \cap [b]$. On a alors

$$a\mathcal{R}c \quad \text{et} \quad b\mathcal{R}c.$$

Par symétrie de $\mathcal{R}$ on a $c\mathcal{R}b$. Par la transitivité de $\mathcal{R}$

$$a\mathcal{R}b,$$

ce qui contredit l'hypothèse de départ. Donc la supposition est fausse et

$$[a] \cap [b] = \varnothing.$$

□

Ainsi

Théorème 2.4

Si deux classes ont un élément en commun, ces deux classes sont égales.

De plus, comme tous les éléments de A appartiennent à une classe, la réunion de toutes les classes d'équivalence redonne A.

Enfin, si $A \neq \varnothing$, il existe au moins une classe. On a donc le théorème suivant

Théorème 2.5

L'ensemble des classes d'équivalences d'une relation d'équivalence dans un ensemble A forme une partition de A.

Exemple 5

Dans l'exemple précédent, l'ensemble des classes d'équivalences de $\mathcal{R}$ dans E est

$$P = \{[a], [b]\} = \{\{a, c\}, \{b, d, e\}\}.$$

On constate que c'est bien une partition de E.

Définition 8 (ensemble quotient)

Soit E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence définie sur E. L'ensemble des classes d'équivalences de E défini par $\mathcal{R}$, noté $\frac{E}{\mathcal{R}}$ est l'*ensemble quotient* de $\mathcal{R}$ dans E.

Exemple 6

Dans l'exemple précédent, l'ensemble quotient est

$$\frac{E}{\mathcal{R}} = \{[a], [b]\}.$$

Exemple 7

Le parallélisme dans $\mathbb{D}$ détermine dans $\mathbb{D}$ une partition en familles de droites parallèles entre elles. Si d est une droite du plan, alors la classe d'équivalence de d dans $\mathbb{D}$ est une *direction* du plan

$$\Delta_d = \{d' \in \mathbb{D} \mid d' \parallel d\}.$$

2.3.2 Relations d'ordre

On peut ordonner les éléments d'un ensemble A par une relation $\mathcal{R}$, si cette relation est telle que les divers éléments $a \in A$ sont en relation avec un nombre différent d'éléments de A. On peut alors classer les éléments de A, de ceux qui sont en relation avec le moins d'éléments de A, de ceux qui sont en relation avec le plus d'éléments de A.

Par exemple, considérons la relations $\mathcal{R}$ dans $A = \{1, 2, 3, 4\}$ définie par le graphe $G = \{(1, 1), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 3), (3, 4), (4, 4)\}$.

Cette relation est telle que l'élément 4 est celui qui est en relation avec le moins d'éléments, ensuite viennent par ordre de mise en relation croissante : 1,3,2. Ainsi, grâce à la relation $\mathcal{R}$ on peut ordonner les éléments de A

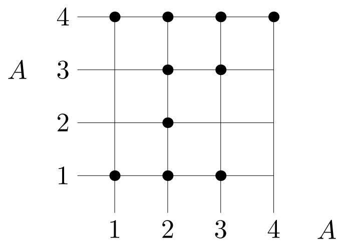


FIGURE 2.3 – Diagramme cartésien de la relation d'ordre du texte.

dans l'ordre

$$4, 1, 3, 2.$$

De plus, la relation $\mathcal{R}$ a la propriété intéressante suivante que si un élément a a moins de liaisons qu'un autre élément b, et que cet élément b a moins de liaisons qu'un troisième élément c, alors l'élément a a moins de liaisons que l'élément c. Si on écrit $\leq$ au lieu de $\mathcal{R}$, on a

$$\begin{aligned}
&4 \leq 4,\ 4 \leq 1,\ 4 \leq 3,\ 4 \leq 2,\\
&1 \leq 1,\ 1 \leq 3,\ 1 \leq 2,\\
&3 \leq 3,\ 3 \leq 2,\\
&2 \leq 2.
\end{aligned}$$

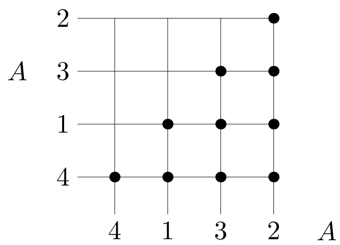


FIGURE 2.4 – Diagramme cartésien de la relation d'ordre du texte avec les éléments ordonnés.

De manière générale, on appelle relation d'ordre une relation définie par

Définition 9 (relation d'ordre)

Une relation $\mathcal{R} = (A, A, G)$ est une *relation d'ordre* si elle est réflexive, antisymétrique et transitive (rat).

Définition 10 (ordre total)

Une relation d'ordre est dite *totale* si elle est connexe.

La relation d'ordre de l'exemple est une relation d'ordre totale. Cela signifie que l'on peut prendre deux éléments quelconques de l'ensemble, on peut toujours les comparer et dire lequel est le plus grand.

Nous donnons encore la définition suivante

Définition 11 (ordre strict)

On dit qu'une relation $\mathcal{R}$ est une relation *d'ordre strict* si elle est *antisymétrique, transitive* et *connexe.*

La relation d'ordre de l'exemple n'est pas une relation d'ordre strict, car c'est une relation d'ordre, au sens général, et donc elle est réflexive. Si elle est réflexive, elle n'est pas stricte.

Ainsi, malgré son nom, une relation d'ordre strict n'est pas une relation d'ordre.

2.4 Ce qu'il faut connaître

1. Quelle est la différence entre un couple et une paire ?
2. Définition du produit cartésien de deux ensembles.
3. La définition de la relation.
4. Définition d'une relation réflexive, symétrique, antisymétrique, transitive, totale ou connexe.
5. Définition de la relation d'équivalence et des classes d'équivalences.
6. Définition de la relation d'ordre et d'ordre totale.

2.5 Exercices

Exercice 2.1.
Soit les ensembles $A = \{1, 2, 3, 4\}$ et $B = \{1, 2, 3\}$. Déterminer les ensembles $A \times B$, $B \times A$ et $B \times B$.

Exercice 2.2.
Soit l'ensemble $E = \{1, 2, 3, 4\}$ et ses deux parties $A = \{1, 2, 3\}$ et $B = \{3, 4\}$. Déterminer

$$1)\ \complement_{E\times E}(A \times B) \quad 2)\ \complement_E A \times \complement_E B \quad 3)\ \complement_E A \times B \quad 4)\ A \times \complement_E B$$

Exercice 2.3.
Soit les ensembles $A = \{a, b, c\}$, $B = \{a, b\}$ et $C = \{a, d\}$. Déterminer

$$\begin{array}{lll} 1)\ A \times A & 2)\ A \times B & 3)\ (A \times B) \times C \\ 4)\ B \times (C \times C) & 5)\ A \times (B \cap C) & 6)\ (A \times B) \cap (A \times C) \end{array}$$

Exercice 2.4.
Soit $\mathcal{R}$ la relation de l'ensemble $A = \{w, x, y, z\}$ vers l'ensemble $B = \{0, 1, 2, 3\}$ déterminée par son graphe G. Donner, dans chacun des cas suivants le diagramme sagittal et le diagramme cartésien de cette relation.

1. $G = \{(x, 1), (y, 0), (y, 2), (z, 0)\}$
2. $G = \{(x, 0), (x, 1), (x, 2), (x, 3)\}$
3. $G = \{(w, 0), (w, 1), (x, 1), (x, 2), (y, 2), (y, 3), (z, 1)\}$

Exercice 2.5.
Démontrer que le produit cartésien est distributif relativement aux opérations d'intersection et de réunion des ensembles.

Exercice 2.6.
Montrer que l'intersection et la réunion ne sont pas distributives relativement au produit cartésien.

Exercice 2.7.
Soit la relation $\mathcal{R}$ de l'ensemble $A = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$ vers l'ensemble $B = \{-3, 0, 1, 4\}$, définie par

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow (\ y \text{ est le carré de } x\ )$$

Donner son graphe, son diagramme sagittal et son diagramme cartésien.

Exercice 2.8.
Soit les ensembles $A = \{1, 2, 3\}$ et $B = \{x, y\}$. Donner le diagramme sagittal et le diagramme cartésien de la relation de A vers B dont le graphe est l'ensemble $A \times B$.

Exercice 2.9.
Dans l'ensemble $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 8\}$ on définit la relation $\mathcal{R}$ par

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow (\text{ il existe } a \in E \text{ tel que } x = a^y\ ).$$

Donner son graphe, son diagramme sagittal et son diagramme cartésien.

Exercice 2.10.
Dans l'ensemble $E = \{a, b, c\}$, on définit une relation $\mathcal{R}$ par son graphe $G = \{(a, b), (b, c), (b, a), (c, b)\}$. Construire son diagramme sagittal et son diagramme cartésien. Indiquer les propriétés de cette relation.

Exercice 2.11.
Indiquer les propriétés de la relation $\mathcal{R}$ définie dans l'ensemble $E = \{2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 12\}$ par

$$(x\mathcal{R}y) \Leftrightarrow (\ x \text{ divise } y\ ).$$

Exercice 2.12.
Indiquer les propriétés de la relation $\mathcal{R}$ définie dans l'ensemble $E = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ par

$$(x\mathcal{R}y) \Leftrightarrow (\ x^2 = y^2\ ).$$

Exercice 2.13.
Indiquer les propriétés de la relation $\mathcal{R}$ définie dans l'ensemble $E = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ par

$$(x\mathcal{R}y) \Leftrightarrow (\ x + y \text{ est pair }).$$

Exercice 2.14.
Indiquer les propriétés de la relation $\mathcal{R}$ définie dans l'ensemble $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ par

$$(x\mathcal{R}y) \Leftrightarrow (\ x - y = 1\ ).$$

Exercice 2.15.
Indiquer les propriétés de la relation $\mathcal{R}$ définie dans l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels par

$$(x\mathcal{R}y) \Leftrightarrow (\ x \text{ et } y \text{ sont premiers entre eux }).$$

Exercice 2.16.
Indiquer les propriétés de la relation $\mathcal{R}$ définie dans l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels par

$$(x\mathcal{R}y) \Leftrightarrow (\ x + y = 15\ ).$$

Construire le diagramme cartésien de cette relation.

Exercice 2.17.
Dans l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties de l'ensemble $E = \{1, 2\}$, on définit la relation $\mathcal{R}$ par

$$(A\mathcal{R}B) \Leftrightarrow (\ A \subset B\ ).$$

Donner le graphe et indiquer les propriétés de cette relation.

Exercice 2.18.
Dans l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties de l'ensemble $A = \{1, 2, 3\}$, on définit la relation $\mathcal{R}$ par

$$(A\mathcal{R}B) \Leftrightarrow (\ A \cap B = \varnothing\ ).$$

Donner le diagramme sagittal et indiquer les propriétés de cette relation.

Exercice 2.19.
Soit une relation $\mathcal{R}$ définie dans un ensemble E. Écrire les énoncés suivants en langage symbolique.

1. La relation $\mathcal{R}$ n'est pas réflexive.
2. La relation $\mathcal{R}$ n'est pas symétrique.
3. La relation $\mathcal{R}$ n'est pas antisymétrique.
4. La relation $\mathcal{R}$ n'est pas transitive.

Exercice 2.20.
Dans l'ensemble $E = \{a, b, c, d\}$, définir par son diagramme sagittal et son diagramme cartésien une relation qui possède les propriétés mentionnées, dans chacun des cas suivants

1. La relation est réflexive et symétrique.
2. La relation est réflexive et transitive, mais pas symétrique.
3. La relation est antisymétrique.
4. La relation n'est ni symétrique, ni antisymétrique.
5. La relation est réflexive, symétrique et transitive.
6. La relation est antisymétrique et transitive, mais elle n'est ni réflexive, ni symétrique.

2.5.1 Relations d'équivalence

Exercice 2.21.
Dans l'ensemble $E = \{a, b, c, d\}$, on définit la relation $\mathcal{R}$ par son graphe

$$G = \{(a, a), (a, c), (b, b), (b, d), (c, a), (c, c), (d, b), (d, d)\}.$$

Vérifier que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence et indiquer les classes d'équivalences.

Exercice 2.22.
Dans l'ensemble $E = \{x \in \mathbb{N} | 1 \leq x \leq 15\}$, on définit la relation $\mathcal{R}$ par

$$(x\mathcal{R}y) \Leftrightarrow (\ x \text{ a le même nombre de diviseurs que } y\ ).$$

Vérifier que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence et écrire les classes d'équivalences.

Exercice 2.23.
Montrer que la relation définie dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ par

$$(a,b)\mathcal{R}(x,y) \Leftrightarrow (\ a + y = x + b\ ).$$

est une relation d'équivalence.

Les classes d'équivalences de la forme $(a, 0)$ sont appelés *nombres positifs* et sont notés $+a$. Les classes d'équivalences de $(0, a)$ sont appelés *nombres négatifs* et sont notés $-a$. Un élément du type (a, b) représente la différence de a par b, $a - b$.

Exercice 2.24.
Soit l'ensemble $E = \{x \in \mathbb{N} | 0 \leq x \leq 11\}$. Vérifier que les sous-ensembles suivants constituent une partition de E

$$A_1 = \{9\},\ A_2 = \{6, 8\},\ A_3 = \{0, 3, 4, 11\},\ A_4 = \{5, 10\},\ A_5 = \{1, 2, 7\}.$$

Construire le diagramme cartésien de la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ induite dans l'ensemble E par cette partition. Écrire l'ensemble quotient $E/\mathcal{R}$.

2.5.2 Relations d'ordre

Exercice 2.25.
Dans l'ensemble $E = \{a, b, c, d, e, f\}$, on définit la relation $\mathcal{R}$ par son graphe $G = \{(a, b), (a, c), (b, c), (d, e)\}$. Vérifier que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre strict.

Exercice 2.26.
Dans l'ensemble $E = \{a, b, c, d\}$, on définit la relation $\mathcal{R}$ par son graphe

$$G = \{(a, a), (a, b), (a, d), (b, b), (c, a), (c, b), (c, c), (c, d), (d, b), (d, d)\}.$$

Vérifier que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre total et ordonner l'ensemble E à l'aide de cette relation. Définir et étudier la relation réciproque $\mathcal{R}^{-1}$.

Chapitre 3

Opérations

3.1 Les opérations internes

Définition 1 (opération interne)

Soit E un ensemble. On dit que $*$ est une *opération interne dans* E si $*$ est une relation de $E \times E$ vers E. L'image de $(a, b) \in E \times E$ par l'opération $*$, $*(a, b)$, est notée $a * b$, et est un élément de E

$$*(a, b) = a * b \in E.$$

Les opérations internes dans un ensemble E sont caractérisées par les propriétés suivantes. Certaines n'en ont aucune, d'autres en ont plusieurs.

En termes ensemblistes, la relation $*$ est alors un triplet de la forme $* = (E \times E, E, G)$, où le graphe est une partie du produit cartésien $(E \times E) \times E$, dont les éléments sont des couples de la forme $((a, b), c)$, avec a, b et c des éléments de E.

Définition 2 (associativité)

Soit $*$ une opération interne dans E. On dit que $*$ est *associative* si pour tout $\{a, b, c\} \subset E$ on a

$$(a * b) * c = a * (b * c).$$

Autrement dit, l'ordre des opérations n'est pas important. Les parenthèses sont alors inutiles.

Définition 3 (élément neutre)

Soit $*$ une opération interne dans E.

1. $*$ *admet un élément neutre à droite* $e_d \in E$ si pour tout $a \in E$, on a
$$a * e_d = a.$$
2. $*$ *admet un élément neutre à gauche* $e_g \in E$ si pour tout $a \in E$, on a
$$e_g * a = a.$$
3. $*$ *admet un élément neutre* $e \in E$ si e est élément neutre à gauche et à droite
$$e * a = a * e = a, \ \forall a \in E$$

Théorème 3.1

Soit une opération $*$ interne dans un ensemble E. Si $*$ possède un élément neutre à droite e_d et un élément neutre à gauche e_g, alors ces éléments neutres sont égaux

Preuve.
Soit e_g et e_d les éléments neutre à gauche et à droite de l'opération $*$ respectivement, alors

$$e_g * e_d = e_g$$

par définition de e_d.
Mais, par définition de e_g on doit avoir

$$e_g * e_d = e_d.$$

Ainsi

$$e_g = e_g * e_d = e_d.$$

□

Dans la plupart des opérations que l'on rencontre dans les ensembles de nombres, l'élément neutre à droite et l'élément neutre, à gauche coïncident. C'est ainsi que zéro est élément neutre de l'addition, à droite et à gauche et que l'unité 1 est élément neutre de la multiplication à droite et à gauche également.

Définition 4 (élément symétrique)

Soit $*$ une opération interne dans E.

1. Un élément a de E a un *symétrique à droite* a'_d, si

$$a * a'_d = e_d.$$

2. Un élément a de E a un *symétrique à gauche* a'_g, si

$$a'_g * a = e_g.$$

3. L'élément $a' \in E$ est le *symétrique* d'un élément $a \in E$, s'il est son symétrique à droite et à gauche.

Autrement dit, si l'on compose un élément avec son symétrique, on obtient l'élément neutre.

Théorème 3.2

Soit $*$ une opération dans un ensemble E. Si l'opération $*$ est associative et admet un élément neutre e (à droite et à gauche), alors l'élément symétrique à gauche et l'élément symétrique à droite d'un élément sont égaux.

Preuve.
Soit $a \in E$ et a_g et a_d ses symétriques à gauche et à droite respectivement.
On a alors

$$a_g * a = e$$

en composant par a_d à droite

$$(a_g * a) * a_d = e * a_d$$

par associativité

$$a_g * (a * a_d) = e * a_d \quad \Leftrightarrow \quad a_g * e = e * a_d$$

et par définition de l'élément neutre

$$a_g = a_d.$$

□

Définition 5 (élément absorbant)

Soit $*$ une opération interne dans E. $o \in E$ est un *élément absorbant à droite (ou à gauche)*, si pour tout $a \in E$ on a

$$a * o = o \quad (\text{ou } o * a = o).$$

On dit que o est *absorbant*, s'il est absorbant à droite et à gauche.

Proposition 3.3

Soit un ensemble E muni d'une opération interne $*$ associative et soit $o \in E$ un élément absorbant à droite. Alors o est aussi un élément absorbant à gauche.

Preuve.
Soit $o \in E$ un élément absorbant à droite et soit $a \in E$. On a

$$a * o = o$$

En composant à droite par a, on a

$$(a * o) * a = o * a$$

par associativité de $*$

$$a * (o * a) = o * a$$

soit

$$o = a * o = o * a$$

ce qui montre que o est également absorbant à gauche.

$\square$

Proposition 3.4

Soit un ensemble E non vide et non réduite à un singleton, muni d'une opération interne $*$. Soit $e \in E$ un élément neutre et $o \in E$ un élément absorbant, alors

$$e \neq o.$$

Propriété 3.5

Soit $*$ une opération interne d'un ensemble E. Si $o \in E$ est absorbant dans E, alors il n'a pas de symétrique.

Preuve.
En effet, en supposant que $e \in E$ soit un élément neutre de l'opération $*$, si $o \in E$ avait un symétrique $o' \in E$ on devrait avoir

$$o * o' = e.$$

Or o est absorbant, donc $o * o' = o$, pour tout $o' \in E$. Enfin, $o \neq e$, car un élément neutre ne peut pas être absorbant, si E contient d'autres éléments que e. On en conclut que o n'a pas de symétrique.

$\square$

Définition 6 (commutativité)

Soit $*$ une opération interne dans E. L'opération $*$ est *commutative* si, pour tout $\{a, b\} \subset E$ on a

$$a * b = b * a.$$

Clairement, si l'opération est commutative, l'élément neutre à gauche est aussi l'élément neutre à droite et le symétrique à gauche est aussi symétrique à droite.

Dans les section suivantes, nous allons nous intéresser à quelques cas particuliers où une opération $*$ dans un ensemble E possède un certain nombre des ces propriétés. L'assemblage d'une ou plusieurs opérations avec un ensemble E, noté entre parenthèses, $(E, *)$ ou $(E, *, \perp)$ constitue une *structure*. Les structures les plus souvent rencontrées en mathématique sont

1. le groupe.
2. l'anneau.
3. le corps.
4. le module.
5. l'espace vectoriel.
6. l'algèbre.

Dans les prochaines section, nous parlerons des groupes, des anneaux et des corps, qui concernent directement le développement du calcul algébrique.

3.2 La structure de groupe

La structure de groupe est une des structures les plus importantes de toutes les sciences techniques, à tel point qu'elle a donné lieu à la création d'une branche entière des mathématiques, *la théorie des groupes*.

L'importance de la théorie des groupes, réside dans le fait qu'elle permet, très souvent, de simplifier énormément les problèmes avant de procéder à des calculs. Grâce à elle, on peut utiliser les symétries inhérentes à un problème pour développer une stratégie de résolution.

Sans entrer dans le détail de la théorie des groupes, nous nous contenterons de brosser un portrait descriptif des groupes, de fixer certains éléments de vocabulaire et d'extraire les propriétés les plus importantes des groupes.

L'intérêt de cette étude est de constater que plusieurs opérations mathématiques se trouvent former une structure de groupe dans certains ensembles. Le fait de savoir qu'il s'agit de groupe, nous permet d'éviter de tout redémontrer à chaque fois. En effet, si ce sont des groupes, alors toutes les propriétés des groupes sont automatiquement adoptées par ces structures.

Définition 7 (groupe)

Soit E un ensemble et $*$ une opération. On dit que la structure $(E, *)$ est un *groupe* si

1. $*$ est une opération interne dans E.
2. $*$ est associative dans E.
3. il existe une élément $e \in E$ qui est neutre à droite pour l'opération $*$: $a * e = a$ pour tout $a \in E$.
4. Pour tout $a \in E$, il existe un $a' \in E$, le *symétrique à droite de* a tel que $a * a' = e$.

De plus, si l'opération $*$ est commutative $a * b = b * a$ pour tout $\{a, b\} \subset E$, alors le groupe est dit *abélien*.

Théorème 3.6 (unicité des images)

Soit $(E, *)$ un groupe, $c \in E$, et $\{a, b\} \in E$. Alors

$$a * c = b * c \iff a = b.$$

Preuve.

1. Montrons l'implication directe et supposons que
$$a * c = b * c$$
en composant à droite par c' le symétrique de c, on obtient
$$(a * c) * c' = (b * c) * c'$$
et par associativité
$$a * (c * c') = b * (c * c')$$
or $c * c' = e$, par définition du symétrique
$$a * e = b * e$$
et par définition de l'élément neutre à droite
$$a = b.$$
2. L'implication réciproque est évidente, par définition de la compatibilité des opérations avec l'égalité.

□

Une conséquence directe de ce théorème est que deux éléments différents de E auront des images différentes par composition avec un même élément

Théorème 3.7

Soit $c \in E$ et $\{a, b\} \subset E$, alors
$$a \neq b \implies a * c \neq b * c$$

Preuve.

Ce résultat est la contraposée de l'implication directe du théorème précédent.

□

Ces deux théorèmes montrent que dans la table de multiplication de $(E, *)$, chaque élément ne peut être présent qu'une seule fois dans chaque colonne de la table.

Dans un groupe, un symétrique à droite ou à gauche est forcément un symétrique des deux côtés et est unique.

Théorème 3.8

Soit $(E, *)$ un groupe. Si un élément a' est élément symétrique à droite d'un élément a, alors il est aussi élément symétrique à gauche de a.

Preuve.

Pour tout $a \in E$, il existe un $a_d \in E$ symétrique de a à droite, et on a

$$a * a_d = e_d$$

et, par composition avec a_d à gauche

$$a_d * (a * a_d) = a_d * e_d.$$

Ainsi

$$a_d * a * a_d = a_d$$

que l'on peut écrire

$$(a_d * a) * a_d = a_d$$

ce qui montre que $a_d * a$ est un élément neutre à gauche de $*$ (en composant à droite par le symétrique a'_d à droite de a_d) et donc

$$a_d * a = e_g$$

Finalement, on peut affirmer que a_d est un symétrique à gauche de a.

L'unicité vient du théorème sur l'unicité des images.

□

Théorème 3.9

Soit $a \in E$ et $(E, *)$ un groupe. Alors le symétrique du symétrique de a est a lui-même

$$(a')' = a.$$

Preuve.

Soit $a \in E$ et a' son symétrique. On a alors

$$a * a' = e$$

où e est l'élément neutre de $(E, *)$. Il découle de cette égalité que a est le symétrique de a', car leur composition donne l'élément neutre. Ainsi

$$a = (a')'.$$

□

Dans un groupe, l'élément neutre à droite ou à gauche est forcément élément neutre des deux côtés et est unique.

Théorème 3.10

Soit $(E, *)$ un groupe. Si un élément e est élément neutre à droite, alors il est aussi élément neutre à gauche.

Preuve.

Soit e_d l'élément neutre à droite dans $(E, *)$. Par définition de l'élément neutre à droite on peut alors écrire, pour un $a \in E$ quelconque

$$a = a * e_d.$$

Or $e_d = a * a' = a' * a$, car le symétrique à droite est aussi un symétrique à gauche. On a ainsi, par associativité

$$a = a * e_d = a * (a' * a) = (a * a') * a = e_d * a$$

donc e_d est élément neutre à gauche également.

□

Dans un groupe, tout élément a peut avoir comme image un b quelconque de E par composition avec un élément c de E bien choisi

Théorème 3.11

Soit $(E, *)$ un groupe et $a \in E$. Pour tout $b \in E$, il existe un unique $c \in E$ tel que

$$a * c = b.$$

Preuve.

Soit $\{a, b\} \subset E$. En composant a par son symétrique a' on a

$$a * a' = e$$

et en composant par b on obtient

$$a * a' * b = e * b = b$$

ainsi en posant $c = a' * b$ on a bien

$$a * c = b.$$

Cet élément c est unique par unicité des images.

□

Ce théorème complète les théorèmes d'unicité des images, et montre que dans chaque ligne de la table de l'opération $*$, chaque élément de E est présent exactement une seule fois.

Exercice 3.1.
Indiquer parmis les structures suivantes lesquelles sont des groupes, le cas échéant donner l'élément neutre et dire si ce sont des groupes abéliens. Construire la table de l'opération

1. L'ensemble $A = \{-1, +1\}$, munis de la multiplication des entiers relatifs.
2. $B = \{-1, 0, +1\}$ munis de la multiplication des entiers relatifs.
3. L'ensemble C des rotations qui laissent invariants les triangles équilatéraux, muni de la composition des opérations.
4. L'ensemble D des symétries du triangle équilatéral (6 éléments), muni de la composition des opérations.
5. $E = \{0, 1\}$ muni de l'addition des entiers relatifs.
6. $F = \{-1, 0, +1\}$ muni de l'addition des entiers relatifs.

3.3 La structure d'anneau

La structure suivante est construites à partir de la structure de groupe, à l'aide d'une deuxième opération.

Définition 8

On dit que la structure $(\mathbb{A}, *, \circ)$ est un *anneau* si

1. $(\mathbb{A}, *)$ est un groupe abélien.
2. $\circ$ est une opération interne dans $\mathbb{A}$.
3. $\circ$ est associative dans $\mathbb{A}$.
4. $\circ$ admet un élément neutre 1 dans $\mathbb{A}$.
5. $\circ$ est distributive sur $*$
$$a \circ (b * c) = (a \circ b) * (a \circ c).$$

Si, de plus, $\circ$ est commutative, on dit que l'anneau est commutatif.

Exercice 3.2.
Dire si les structures suivantes sont des anneaux. Si oui, sont-t-ils commutatifs ?

1. $(\mathbb{N}, +, \cdot)$
2. $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$
3. $(\{-1, 0, +1\}, +, \cdot)$
4. $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$
5. $(\mathbb{R}, +, \cdot)$.

3.4 La structure de corps

Définition 9

On dit que la structure $(\mathbb{K}, *, \circ)$ est un *corps* si

1. $(\mathbb{K}, *)$ est un groupe abélien.
2. $(\mathbb{K}^*, \circ)$ est un groupe (où $\mathbb{K}^* = \mathbb{K} - \{e\}$, et e est l'élément neutre de $*$).
3. $\circ$ est distributive sur $*$

$$a \circ (b * c) = (a \circ b) * (a \circ c).$$

Si, de plus, $\circ$ est commutative, on dit que le corps est commutatif.

Exercice 3.3.
Dire si les structures suivantes sont des corps. Si oui, sont-t-ils commutatifs ?

1. $(\mathbb{N}, +, \cdot)$
2. $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$
3. $(\{-1, 0, +1\}, +, \cdot)$
4. $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$
5. $(\mathbb{R}, +, \cdot)$.

3.5 *Autres structures

En géométrie, en algèbre avancée et en analyse notamment, on rencontre encore d'autres structures qui s'appuient sur les structures déjà donnée précédemment.

La structure algébrique de base est formée par les modules. Il s'agit d'un ensemble d'objets quelconques que l'on peut additionner entre eux (opération interne, la somme de deux objets donne encore un objet) et multiplier par des nombres (opération externe ou action, le produit d'un objet par un nombre donne un objet). Dans tous les cas, l'ensemble des objet forme un groupe avec son opération d'addition. Selon que l'ensemble de nombre considéré est un anneau ou un corps, on obtient un module ou un espace vectoriel.

Si l'ensemble des objets forme un espace vectoriel et qu'il possède également une deuxième opération (que l'on nommera une multiplication), alors si les bonnes propriétés sont satisfaites, on peut obtenir une algèbre,.

3.5.1 Les modules

Définition 10 (module)

On dit que la structure $(M, +, \cdot)$ est un *module* sur l'anneau $(\mathbb{A}, *, \circ)$ s'il existe une opération externe $(\lambda, m) \mapsto \lambda \cdot m$ de $\mathbb{A} \times M \to M$ et telle que pour tout $\{\alpha, \beta\} \subset \mathbb{A}$ et pour tout $\{m, n\} \subset M$ on a

1. $(M, +)$ est un groupe abélien.
2. $\alpha \cdot (m + n) = \alpha \cdot m + \alpha \cdot n$.
3. $(\alpha \circ \beta) \cdot m = \alpha \cdot (\beta \cdot m)$.
4. $(\alpha * \beta) \cdot m = \alpha \cdot m * \beta \cdot m$.
5. $e \cdot m = m$

Exemple 1

L'ensemble des vecteurs $M = \{\vec{v} \in \mathcal{V}_2 | \vec{v} = a\vec{\imath} + b\vec{\jmath}, \{a, b\} \subset \mathbb{Z}\}$, où $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ sont deux vecteurs quelconques du plan, forme un module $(M, +, \cdot)$ sur $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$. Il s'agit d'un réseau, ou quadrillage régulier du plan.

$(M, +)$ est un groupe abélien. La multiplication de $(M, +, \cdot)$ est la multiplication d'un vecteur par un scalaire. Enfin $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ est un anneau commutatif, car $(\mathbb{Z}, +)$ est un groupe abélien et la multiplication des entiers relatifs non nuls est une opération interne, associative et qui admet un élément neutre. $(M, +, \cdot)$ n'est pas un espace vectoriel, car en général les entiers relatifs n'ont pas de symétrique pour la multiplication des entiers relatifs (à part -1 et $+1$).

3.5.2 Les espaces vectoriels

Définition 11 (espace vectoriel)

On dit que la structure $(V, +, .)$ est un *module* sur le corps $(\mathbb{K}, *, \circ)$ s'il existe une opération externe $(\lambda, v) \mapsto \lambda v$ de $\mathbb{K} \times V \to V$ et telle que pour tout $\{\alpha, \beta\} \subset \mathbb{K}$ et pour tout $\{u, v\} \subset V$ on a

1. $(V, +)$ est un groupe abélien.
2. $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$.
3. $(\alpha \circ \beta)u = \alpha(\beta u)$.
4. $(\alpha * \beta)v = \alpha v + \beta v$.
5. $1v = v$, où 1 est l'élément neutre de $\mathbb{K}$ pour $\circ$.

3.5.3 Les algèbres

Définition 12 (algèbre)

On dit que la structure $(\mathcal{A}, +, \cdot)$ est une *algèbre* sur le corps $(\mathbb{K}, *, \circ)$ s'il existe une opération externe $(\lambda, v) \mapsto \lambda v$ de $\mathbb{K} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ et telle que pour tout $\{\alpha, \beta\} \subset \mathbb{K}$ et pour tout $\{u, v\} \subset \mathcal{A}$ on a

1. $(\mathcal{A}, +, \cdot)$ est un anneau.
2. $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$.
3. $(\alpha \circ \beta)u = \alpha(\beta u)$.
4. $(\alpha * \beta)v = \alpha v + \beta v$.
5. $1v = v$, où 1 est l'élément neutre de $\mathbb{K}$ pour $\circ$.

3.6 Exercices

Chapitre 4

Fonctions et Applications

4.1 Fonctions

Certains types de relation ont une très grande importance dans les sciences, car elles permettent de décrire les caractéristiques d'un système. Par exemple, on peut désirer attribuer un nombre à une caractéristique particulière d'un système, comme son volume, sa température, sa pression, le prix d'un produit, la concentration d'une substance dans une autre, etc..

Ce qui donne un sens à cette attribution d'une valeur pour ces grandeurs est que pour un état donné du système ou des choses, il n'existe qu'une valeur possible pour la grandeur en question. On est ainsi naturellement amené à mettre en relation les différents états possibles du système avec un seul nombre, au plus (il peut effectivement y avoir des états irréalisables, pour lesquels la grandeur désignée n'a pas de sens et n'est associée à aucun nombre).

Ce type de relation qui donne pour tout élément d'un ensemble une valeur associée (mais pas nécessairement un nombre) est appelé fonction.

Définition 1 (fonction)

Soit $f = (A, B, G)$ une relation de A vers B et de graphe G. Si chaque élément de A n'est en relation qu'avec, au plus, un élément de B, alors on dit que f est une *fonction* de A vers B.

Notation 1

1. Si f est une fonction de A vers B, on note $f : A \to B$.
2. Si f est une fonction et $(x, y) \in G$, on écrit $f(x) = y$.
3. Si f est une fonction de A vers B et $x \in A$, on appelle $f(x)$ la *valeur de x par la fonction f* ou encore *l'image de x par la fonction f*.

Définition 2

Soit $f : A \to B$. On appelle *ensemble image de f* l'ensemble de tous les éléments de B qui sont image d'au moins un élément de A. On le note $\mathrm{im}(f)$

$$\mathrm{im}(f) = \{y \in B \mid \exists x \in A,\ y = f(x)\}.$$

Toutes les fonctions sont des relations. Toutes les relations ne sont pas des fonctions.

4.2 Applications

Définition 3 (Application)

Si $f : A \to B$ est une fonction de A vers B pour laquelle chaque élément de A possède une image dans B, alors on dit que f est une *application* de A vers B.

Les terminologies *fonctions* ou *applications* ne font référence qu'au nombre d'images des éléments de l'ensemble de départ d'une relation (qui doit obligatoirement ne pas être plus que 1.) Si une relation est telle qu'un élément de l'ensemble de départ possède plus d'une image, alors ce n'est pas une fonction, ni, à fortiori, une application.

Toute application est une fonction. Une fonction n'est pas nécessairement une application.

Selon la manière dont sont pris les éléments de l'ensemble d'arrivée, on distingue généralement 3 cas d'importance.

4.2.1 Injection

Une première famille d'applications est formée par les applications dans lesquelles chaque élément de l'ensemble d'arrivée est pris au plus une fois.

Définition 4 (Injection)

Soit $f : A \to B$ une application. Si tout élément de l'ensemble d'arrivée est image d'au plus un élément de l'ensemble de départ, on dit que f est une *injection* ou que c'est une *application injective.*

Supposons que $f : A \to B$ est injective, alors dès que deux éléments x_1 et x_2 de A ont la même image par f, i. e. $f(x_1) = f(x_2)$, c'est que forcément $x_1 = x_2$, car deux éléments différents ne peuvent pas avoir la même image par f selon la définition de l'injection. Ainsi

$$f \text{ est injective } \Leftrightarrow (f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2).$$

Si $f : A \to B$ est une injection, certains éléments de l'ensemble d'arrivée peuvent n'être l'image d'aucun élément de l'ensemble de départ. Sa relation réciproque est alors une fonction injective.

4.2.2 Fonction réciproque

L'intérêt principal des fonctions injectives est que l'on peut définir une fonction réciproque qui défait, en quelques sortes, ce que fait la fonction, qui permet de faire le contraire, ou de retourner au point de départ.

En effet, soit $f : A \to B$ une fonction injective de A vers B. Chaque élément de B est l'image d'au plus un élément de A. En prenant un élément $b \in B$, on peut ainsi dire sans ambiguïté, de quel élément $a \in A$, b est l'image $b = f(a)$.

On appelle alors cet élément particulier $a \in A$ la *préimage* ou encore *l'image réciproque* de b et on note

$$a = f^{-1}(b).$$

La relation réciproque de f est alors également une fonction, on l'appelle la fonction *réciproque* de la fonction f.

Ainsi, si $f : A \to B$ est une fonction injective, il lui correspond une fonction réciproque $f^{-1} : B \to A$ de B vers A qui satisfait

$$x = f^{-1}(y) \Leftrightarrow y = f(x).$$

Remarquons, de plus, que par la définition de b, on a

$$a = f^{-1}(f(a))$$

et également

$$b = f(a) = f(f^{-1}(b)).$$

Définition 5

On appelle fonction *identité* la fonction de A vers A définie par

$$\mathrm{id}_A(x) = x, \ \forall x \in A.$$

On peut ainsi affirmer que

$$f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_A, \quad \text{et} \quad f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_B.$$

4.2.3 Surjection

Définition 6 (Surjection)

Soit $f : A \to B$ une application. Si tout élément de l'ensemble d'arrivée est l'image d'au moins un élément de l'ensemble de départ, alors on dit que f est une *surjection* ou une *application surjective.*

Dans ce cas, plusieurs éléments de l'ensemble de départ peuvent avoir la même image. Mais chaque élément de l'ensemble d'arrivée est une image. Il n'y a pas d'élément de l'ensemble d'arrivée qui n'est pas l'image d'un élément de l'ensemble de départ. Ainsi

$$f \text{ est surjective } \Leftrightarrow B \subset \mathrm{im}(f).$$

Si f est une surjection, sa relation réciproque de f n'est pas forcément une fonction. En général, ce n'est qu'une relation.

4.2.4 Bijection

Définition 7 (bijection)

Soit $f : A \to B$ une application. Si tout élément de l'ensemble de départ B est l'image d'exactement un élément de l'ensemble d'arrivée A, alors on dit que f est une *bijection* ou encore que c'est une *application bijective.*

Dans ce cas, chaque élément de B est l'image d'au moins un élément de A (c'est donc une surjection,) mais pas de plus (c'est donc une injection.) Ainsi

$$f \text{ est bijective } \Leftrightarrow f \text{ est injective } \textbf{et} \text{ surjective.}$$

Si $f : A \to B$ est une bijection, sa relation réciproque est une application bijective.

4.2.5 Composition des applications

Si $f : A \to B$ et $g : B \to C$ sont deux applications, il est légitime de prendre un élément $x \in A$ et d'y appliquer l'application f. On obtient alors un élément $y = f(x)$ de B. Comme y est un élément de B, on peut y appliquer l'application g et obtenir un élément z de C

$$y = f(x) \qquad \text{et} \qquad z = g(y) = g(f(x))$$

On peut alors considérer les deux opérations qui consistent à appliquer successivement, d'abord f et ensuite g sur un élément x de A, comme une application unique h qui prend un élément x de A et produit l'élément z de C

$$z = h(x),$$

où $z = g(f(x))$.

On écrit cette application h

$$h = g \circ f$$

et on lit « g rond f ».

Définition 8 (composition des applications)

Soit $f : A \to B$ et $g : B \to C$ deux applications. On appelle *application composée* de f et g, l'application $h = g \circ f$ de A vers C définie par

$$\begin{aligned} h : A &\to C \\ x &\mapsto h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)). \end{aligned}$$

Exemple 1

Soit les applications f et g dans $\mathbb{N}$ définies par $f(x) = x^2 + 1$ et $g(x) = x - 1$. on a alors les applications composées suivantes

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(x^2+1) = (x^2+1)^2 + 1 = (x^4 + 2x^2 + 1) + 1 = x^4 + 2x^2 + 2,$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x-1) = (x-1)^2 + 1 = (x^2 - 2x + 1) + 1 = x^2 - 2x + 2,$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2+1) = (x^2+1) - 1 = x^2,$$

et

$$(g \circ g)(x) = g(g(x)) = g(x-1) = (x-1) - 1 = x - 2$$

on remarque que $f \circ g \neq g \circ f$.

Remarque 1

En général la composition des applications n'est pas commutative

$$\text{en général } f \circ g \neq g \circ f.$$

Remarque 2

Si $f : A \to B$ est une fonction injective de l'ensemble A vers l'ensemble B et $f^{-1} : B \to A$ est sa fonction réciproque, alors on a

$$f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_A, \qquad \text{et} \quad f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_B.$$

Théorème 4.1

La composition des applications est associative et admet un élément neutre (l'application identité).

Si l'on introduit la notion de groupe

Définition 9

Un couple $(E, *)$ d'un ensemble E avec une *opération interne* $*$ dans E tel que $*$ est

1. associative,
2. admette un élément neutre e dans E,
3. tel que tout élément x de E admette un élément symétrique x' dans E tel que $x * x' = x' * x = e$,

alors on dit que le couple $(E, *)$ forme un *groupe*.

Si, de plus, $*$ est commutative dans E, alors on dit que le groupe est *commutatif* ou encore *abélien*.

On a alors

Théorème 4.2

Dans l'ensemble $\mathcal{F}_b(E)$ des applications bijectives dans un ensemble E, la composition des applications forme un groupe (non abélien).

Remarque 3

Si $(E, *)$ est un groupe, on peut faire un tableau de composition, dans lequel on note le résultat de la composition de toutes les paires possibles d'éléments de E.

Exemple 2

L'ensemble des opérations de symétrie dans un triangle équilatéral forme un groupe relativement à l'opération de composition des applications. En cristallographie, on lui donne le nom de *groupe trigonal* et le symbole C_{3v} dans la notation de Schœnfliess et $3m$ dans la notation internationale de Hermann-Mauguin. Il contient 6 éléments.

Ces 6 opérations de symétrie du triangle sont

1. les trois réflexions (ou symétries axiales) par les médiatrices des côtés (qui sont confondues avec les hauteurs et les bissectrices, dans le cas du triangle équilatéral),
2. les rotations de $+120°$, de $-120°$ autour du barycentre,
3. l'identité, qui laisse chaque point à sa place.

Exercice 4.1.
Vérifier que l'ensemble C_{3v} forme bien un groupe. Faire le tableau de composition des opérations de symétrie.

4.3 Ce qu'il faut connaître

1. Définition d'une fonction ?
2. Qu'est-ce qu'une fonction injective, surjective, bijective ?
3. Quelle est la différence entre une fonction et une application ?
4. Quels types de fonctions admettent une réciproque ? Pourquoi ?
5. Définition de la réciproque d'une fonction.
6. Composition des applications.
7. Qu'est-ce qu'un groupe (abélien) ?

4.4 Exercices

Exercice 4.2.
Soit la relation $\mathcal{R}$ de l'ensemble $A = \{w, x, y, z\}$ vers l'ensemble $B = \{0, 1, 2, 3\}$, déterminée par son graphe G. Donner dans chacun des cas suivants, le diagramme sagittal et le diagramme cartésien de cette relation ; vérifier qu'il s'agit d'une fonction et indiquer son domaine de définition

1. $G = \{(w, 1), (y, 1), (z, 3)\}$
2. $G = \{(w, 1), (x, 0), (y, 3), (z, 2)\}$
3. $G = \{(x, 1), (z, 2)\}$.

Exercice 4.3.
Pourquoi la réciproque d'une application n'est, en général, qu'une fonction et pas une application ?

Exercice 4.4.
Soit la relation f de l'esnemble $A = \{1, 2, 3\}$ vers l'ensemble $B = \{a, b, c, d\}$, définie par son graphe G. Donner, dans chacun des cas suivants, le diagramme sagittal et le diagramme cartésien de cette relation ; déterminer s'il s'agit d'une fonction ou d'une application. Écrire les ensembles $\text{im}(f)$, $f(\{1, 2\})$ et $f^{-1}(\{a\})$ et $f^{-1}(\{c, d\})$, lorsque f est une application.

1. $G = \{(1, b), (2, a), (3, b)\}$ 2. $G = \{(1, a), (2, c)\}$
3. $G = \{(1, a), (2, a)\}$ 4. $G = \{(1, b), (2, c), (3, d)\}$.

Exercice 4.5.
Soit les ensembles $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ et $C = \{w, x, y, z\}$. Déterminer dans chacun des cas suivants, si l'application f définie par son graphe G est injective, surjective ou bijective.

1. $f : A \to B$ avec $G = \{(a, 1), (b, 2), (c, 2), (d, 3)\}$
2. $f : B \to C$ avec $G = \{(1, x), (2, w), (3, z)\}$
3. $f : A \to C$ avec $G = \{(a, x), (b, z), (c, w), (d, y)\}$.

Exercice 4.6.
On définit une application de l'ensemble $E = \{1, 2, 3, 4\}$ vers lui-même par son graphe G. Dans chacun des cas suivants, construire le diagramme sagittal et indiquer les propriétés de l'application f. Écrire ensuite les ensembles $\operatorname{im}(f)$, $f(\{3, 4\})$, $f^{-1}(E)$, $f^{-1}(\{4\})$, $f^{-1}(\{2, 4\})$.

1. $G = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 4)\}$ 2. $G = \{(1, 1), (2, 3), (3, 2), (4, 4)\}$
3. $G = \{(1, 2), (2, 2), (3, 2), (4, 2)\}$.

Exercice 4.7.
Soit l'ensemble $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ et l'application f de $\mathbb{N}$ vers E définie, pour tout x de $\mathbb{N}$, par

$$f(x) \text{ est le chiffre des unités du nombre } x^2.$$

Déterminer $\operatorname{im}(f)$ et indiquer les propriétés de f.
Même question dans le cas où $f(x)$ est le chiffre des unités du nombre x^3.

Exercice 4.8.
Déterminer toutes les applications de l'ensemble $E = \{a, b\}$ vers lui-même.

Exercice 4.9.
Construire le diagramme cartésien et indiquer les propriétés de chacune des applications suivantes.

$$\begin{array}{llll}
1) & f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N} & 2) & f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \\
 & \quad x \mapsto 0 & & \quad x \mapsto x - 1 \\
3) & f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N} & 4) & f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \\
 & \quad x \mapsto |x| & & \quad x \mapsto -x
\end{array}$$

Exercice 4.10.
Composer deux à deux les fonctions suivantes

$$\begin{array}{lll}
f_0 : x \mapsto x, & f_1 : x \mapsto 1 - x, & f_2 : x \mapsto \frac{1}{x}, \\
f_3 : x \mapsto x^2, & f_4 : x \mapsto x^2 + 1. &
\end{array}$$

Exercice 4.11.
Calculer $f \circ g \circ h$ lorsque $f : x \mapsto 3ax + b$, $g : x \mapsto -5ax - c$ et $h : x \mapsto \frac{ax}{5}$.

Exercice 4.12.
Montrer que les fonctions suivantes, de $\mathbb{Z}$ vers $\mathbb{Z}$, sont injectives en cherchant leur réciproque

1. $f : x \mapsto x + 1$ 2. $f : x \mapsto 2x - 1$
3. $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ 4. $f : x \mapsto \frac{x}{1+x}$.

Exercice 4.13.
Pour chacune des fonctions des exercices 4.10 et 4.12, déterminer l'ensemble de départ, pour que ces fonctions soient des applications.

Exercice 4.14.
Déterminer l'ensemble des opérations de symétrie du rectangle et du carré.

Exercice 4.15.
Montrer que les opérations de symétrie du rectangle forme un groupe. Combien d'éléments ce dernier a-t-il ?

Troisième partie

Algèbre élémentaire

Chapitre 1

Somme, produit, relation d'ordre

Dans l'appendice IV.A nous avons défini le concept de nombre et les ensembles de nombres correspondants. Dans ce chapitre nous allons définir des opérations sur les nombres et examiner les propriétés de ces opérations. Ces opérations ont été définies dans le chapitre précédent. Nous nous concentrerons essentiellement aux opérations définies sur les nombres réels. Lorsque ces notions sont définies pour les autres types de nombres, les résultats sont aisément transposables. Il faut toutefois tenir compte des limites dues aux extensions de ces ensembles ($\mathbb{N}$ ne contient pas de nombres négatifs, $\mathbb{Z}$ ne contient pas de nombres rationnels, etc.). Nous commençons par rappeler certains résultats sur les ensembles de nombres et les opérations élémentaires définies sur ces ensembles.

Mais avant tout, nous aurons besoin d'une nouvelle définition

Définition 1 (opération interne)

Soit E un ensemble. On dit que $*$ est une *opération interne* dans E si $*$ est une application de $E \times E$ dans E

$$\begin{aligned} * : E \times E &\to E \\ (a, b) &\mapsto c = *(a, b) = a * b. \end{aligned}$$

Autrement dit, le résultat de l'opération sur deux éléments de E est encore un élément de E.

Exercice 1.1.
Déterminer l'ensemble E des opérations de symétrie du triangle équilatéral (il y a 6 éléments). Faire la table de composition de l'opération $\circ$ de composition des applications pour les opérations de symétrie du triangle. Est-ce une opération interne dans E ?

Théorème 1.1 (Compatibilité des opérations avec l'égalité)

Soit $*$ une opération interne de E. On a alors

$$a = b \Rightarrow a * c = b * c.$$

On dit que l'opération $*$ est *compatible* avec l'égalité.

Preuve.
Soit $\{a, b\} \subset E$, avec $a = b$. Il découle de l'égalité des couples que l'on a évidemment

$$(a, c) = (b, c).$$

Comme $*$ est une application de $E \times E$ vers E, tout couple de $E \times E$ a exactement une seule image dans E. Comme $(a, c) = (b, c)$, on a clairement

$$*(a, c) = *(b, c),$$

car les mêmes éléments de l'ensemble de départ pointent sur le même élément de l'ensemble d'arrivée, ce que l'on peut encore écrire

$$a * c = b * c.$$

Ainsi, si

$$a = b,$$

alors

$$a * c = b * c.$$

□

Remarque 1

Ce théorème est essentiel dans la résolution des équations, car c'est lui qui autorise à composer les deux membres d'une égalité par un même élément et d'obtenir encore une égalité. Pour que ce théorème soit vérifié, il suffit que $*$ soit une opération dans E.

1.1 Rappels sur les ensembles de nombres

Ce qu'il convient de retenir des entiers naturels est contenu dans les points suivants

— Il existe un ensemble $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$ appelé *ensemble des entiers naturels.* Cet ensemble contient l'entier naturel 0 et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ son successeur immédiat $n+1$ s'y trouve également.
— L'*addition* des entiers naturels est une opération interne dans $\mathbb{N}$. La *somme* de deux entiers naturels est un entier naturel : c'est le résultat de l'addition des deux entiers naturels.
— L'addition des entiers naturels est associative ($(m+n)+k = m+(n+k)$), admet 0 comme élément neutre ($0+n = n+0 = n$) et est commutative ($m+n = n+m$).
— La multiplication des entiers naturels est une opération interne dans $\mathbb{N}$. Le résultat de la multiplication de deux entiers est le *produit.* Le produit de deux entiers naturels est un entier naturel
— . La multiplication des entiers naturels est associative ($(mn)k = m(nk)$), admet 1 comme élément neutre $(1 \cdot n = n \cdot 1 = n,)$ admet 0 comme élément absorbant $(0n = n0 = 0)$ et est commutatif $(mn = nm)$.
— La multiplication est distributive relativement à l'addition $(m(n+k) = mn + mk)$.
— On convient de **toujours effectuer les multiplications avant les additions**.
— On définit une relation d'ordre dans $\mathbb{N}$. $m \leqslant n$ si $m = n$ ou si n est un successeur de m. L'entier naturel 0 est le plus petit entier naturel.

Ce qu'il convient de retenir des entiers relatifs est contenu dans les points suivants

— Il existe un ensemble $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ appelé *ensemble des entiers relatifs.* Cet ensemble contient tous les entiers naturels, ainsi que tous les nombres entiers négatifs.
— L'addition des entiers relatifs est une opération interne dans $\mathbb{Z}$. Le résultat de l'addition de deux entiers relatifs est une *somme.* La somme de deux entiers relatifs est encore un entier relatif.
— L'addition des relatifs est associative ($(m+n)+k = m+(n+k),$) admet 0 comme élément neutre ($0+n = n+0 = n$) et est commutative ($m+n = n+m.$)
— Tout entier relatif n possède un symétrique, $-n$, relativement à l'addition, appelé son *opposé.* On a : $n - n = 0$.
— On note la somme d'un entier positif $+m$ avec un entier négatif $-n$: $m-n$. On dit que c'est la *différence* de m par n. L'opération $-$ est alors appelée la *soustraction.* En réalité, soustraire c'est additionner l'opposé.
— La multiplication des entiers relatifs est une opération interne. Le résultat de la multiplication de deux entiers relatifs est le *produit.* Le produit de deux entiers relatifs est un entier relatif.
— La multiplication est associative ($(mn)k = m(nk)$), admet 1 comme élément neutre $(1 \cdot n = n \cdot 1 = n)$, admet 0 comme élément absorbant $(0n = n0 = 0)$ et est commutatif $(mn = nm)$.
— Le produit de deux nombres de même signe est positif, celui de deux nombres de signe contraire est négatif.
— Le produit est distributif relativement à l'addition $(m(n+k) = mn + mk.)$
— On convient de **toujours effectuer les multiplications avant les additions**.
— On définit une relation d'ordre dans $\mathbb{Z}$ par $b \leqslant a \Leftrightarrow a - b \in \mathbb{Z}_+$.

1.2 L'ensemble $\mathbb{N}$

L'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ est défini en extension par

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}.$$

On note $\mathbb{N}^*$ l'ensemble $\mathbb{N}$ sans le nombre 0

$$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}.$$

1.2.1 Ordre des naturels

L'ensemble des entiers naturels est muni naturellement [1] d'une relation $\leqslant$ qui a les propriétés suivantes

1. Par naturellement, on entend que la structure des entiers naturels, la manière dont ils sont définis en théorie des ensembles, contient cette propriété d'ordre.

1. $\forall n \in \mathbb{N}$,
$$n \neq 0 \Rightarrow 0 < n.$$
Cela signifie que tout entier naturel différent de 0 est plus grand que 0, ou encore, qu'il n'y a pas d'entier naturel inférieur à 0.
2. $\forall n \in \mathbb{N}$,
$$n \leqslant n.$$
C'est-à-dire que tout entier naturel est inférieur ou égal à lui-même (c'est la propriété de réflexivité).
3. $\forall \{m, n\} \subset \mathbb{N}$,
$$m \leqslant n \text{ et } n \leqslant m \Rightarrow m = n.$$
Autrement dit si deux entiers naturels sont inférieurs ou égaux l'un à l'autre, alors ils sont égaux (c'est la propriété d'antisymétrie).
4. $\forall \{m, n, p\} \subset \mathbb{N}$,
$$m \leqslant n \text{ et } n \leqslant p \Rightarrow m \leqslant p.$$
Autrement dit, si un premier entier est inférieur ou égal à un deuxième entier, et que ce deuxième entier est inférieur à une troisième entier, alors le premier entier est aussi inférieur au troisième entier (c'est la propriété de transitivité).
5. De plus, $\forall \{m, n\} \subset \mathbb{N}$
$$m \leqslant n \text{ ou } n \leqslant m.$$
c'est-à-dire que si l'on prend deux entiers quelconques, il y en aura toujours un des deux qui sera inférieur à l'autre (c'est la propriété de connexité).

On dit alors que $\leqslant$ est une *relation d'ordre total.*

Définition 2

Soit $\{m, n\} \subset \mathbb{N}$, on introduit les symboles suivants pour dire que
1. *m est strictement inférieur à n*, on note
$$m < n \Leftrightarrow m \leqslant n \text{ et } m \neq n.$$
2. *m est supérieur à n*, on note
$$m \geqslant n \Leftrightarrow n \leqslant m.$$
3. *m est strictement supérieur à n*, on note
$$m > n \Leftrightarrow m \geqslant n \text{ et } m \neq n.$$

1.2.2 L'addition

L'addition des entiers naturels $+$ est une application
$$\begin{aligned} + \ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} &\to \mathbb{N} \\ (a, b) &\mapsto c = a + b. \end{aligned}$$
Le nombre entier $c = a + b$ est la *somme* de a et b, c'est le résultat de l'addition de a et b. L'addition des entiers naturels vérifie les propriétés suivantes

1. L'addition des entiers naturels est une *opération interne* dans $\mathbb{N}$. Cela signifie que la somme de deux entiers naturels est aussi un entier naturel.
2. L'addition des entiers naturels est *associative*
$$m + (n + p) = (m + n) + p.$$
3. L'addition des entiers naturels admet $0 \in \mathbb{N}$ comme élément neutre
$$m + 0 = 0 + m = m.$$
4. L'addition des entiers naturels est *commutative*
$$m + n = n + m.$$

Théorème 1.2

a) Pour tout $m \in \mathbb{N}$, $m < m+1$
b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $m \in \mathbb{N}^*$ alors : $n < m + n$.

1.2.3 La multiplication

La multiplication des entiers naturels $\cdot$ est une application

$$\begin{aligned} \cdot\ :\ & \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ & (a,b) \mapsto c = a \cdot b \end{aligned}$$

Le résultat de la multiplication de a et b, le nombre $c = a \cdot b$ est le *produit* de a et b. La multiplication des entiers naturels vérifie les propriétés suivantes

1. La multiplication des entiers naturels est une *opération interne* dans $\mathbb{N}$. Autrement dit, le produit de deux entiers naturels est aussi un entier naturel.
2. La multiplication des entiers naturels est *associative*
$$m \cdot (n \cdot p) = (m \cdot n) \cdot p.$$
3. La multiplication des entiers naturels admet $1 \in \mathbb{N}$ comme *élément neutre*
$$n \cdot 1 = 1 \cdot n = n.$$
4. La multiplication des entiers naturels est *commutative*
$$m \cdot n = n \cdot m.$$

Notation 1

On appelle *termes* les parties d'une addition.
On appelle *facteurs* les parties d'une multiplication.
On appelle *somme* le résultat de l'addition de deux nombres.
On appelle *produit* le résultat de la multiplication de deux nombres.

1.2.4 Distributivité

De plus, la multiplication des entiers naturels est distributive sur l'addition des entiers naturels

$$m \cdot (n + p) = m \cdot n + m \cdot p.$$

On obtien alors, comme conséquence de ces règles

Théorème 1.3

L'élément neutre 0 de l'addition est absorbant pour la multiplication des entiers naturels

$$0 \cdot n = n \cdot 0 = 0.$$

Preuve.
Considérons l'égalité
$$(1+0) \cdot n = 1 \cdot n$$
On a, par la distributivité
$$1 \cdot n + 0 \cdot n = 1 \cdot n$$
Comme 1 est l'élément neutre de la multiplication dans $\mathbb{N}$
$$n + 0 \cdot n = n.$$
Or, il découle du théorème sur les entiers naturels que si $0 < m$, on a : $n < n + m$.
Ainsi, si $0 < 0 \cdot n$, on doit avoir
$$n + 0 \cdot n > n,$$
ce qui contredit la dernière égalité ci-dessus.
On en déduit que $0 \cdot n = 0$.

□

La plupart des propriétés de la somme et de l'addition des entiers naturels sont encore vérifiées dans les entiers relatifs. La structure des entiers relatifs étant plus riche que celle des entiers naturels, les preuves des propriétés restantes seront démontrées dans ce cadre plus vaste, où elles seront plus simples.

1.3 L'ensemble $\mathbb{Z}$

Comme on le montrera ci-dessous, les entiers naturels ne sont pas suffisants pour résoudre rigoureusement tous les problèmes algébriques. La première modification nécessaire est l'introduction des *nombres négatifs*, ou plus précisément des nombres avec un signe, qui est traditionnellement soit un $+$, soit un $-$.

L'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs est défini en extension par

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, \ldots\}.$$

C'est l'ensemble des nombres munis d'un signe et du zéro. On distingue les nombres *positifs* qui sont munis du signe $+$, et les nombres *négatifs* qui sont munis du signe $-$. On note $\mathbb{Z}^*$ l'ensemble $\mathbb{Z}$ sans le nombre 0. L'ensemble des entiers relatifs positifs est noté

$$\mathbb{Z}_+ = \{0, +1, +2, +3, +4, \ldots\}$$

et l'ensemble des entiers relatifs négatifs

$$\mathbb{Z}_- = \{0, -1, -2, -3, -4, \ldots\}.$$

Notez la présence du zéro dans chacun de ces ensembles.

1.3.1 L'addition

L'addition des entiers relatifs, notée $+$ [2] est une application

$$\begin{aligned} + \ : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} &\to \mathbb{Z} \\ (a, b) &\mapsto c = a + b \end{aligned}$$

qui vérifie les propriétés suivantes

1. L'addition des entiers relatifs est une *opération interne* dans $\mathbb{Z}$.
2. L'addition des entiers relatifs est *associative*

$$m + (n + p) = (m + n) + p.$$

3. L'addition des entiers relatifs admet $0 \in \mathbb{Z}$ comme *élément neutre* dans $\mathbb{Z}$

$$0 + n = n + 0 = n.$$

4. Tout entier relatif $n \in \mathbb{Z}$ a un symétrique, noté $-n$ et appelé l'*opposé de n*, dans $\mathbb{Z}$, tel que

$$n + (-n) = (-n) + n = 0.$$

5. L'addition des entiers relatifs est *commutative*

$$m + n = n + m.$$

Remarque 2

Au vu du fait que l'addition des entiers relatifs est une opération interne dans $\mathbb{Z}$, qu'elle admet un élément neutre dans $\mathbb{Z}$ et que tout élément de $\mathbb{Z}$ possède un symétrique dans $\mathbb{Z}$, on dit alors que $(\mathbb{Z}, +)$ est un *groupe*.

Comme, de plus, l'addition des entiers relatifs est commutative, on dit que $(\mathbb{Z}, +)$ forme un *groupe abélien*.

2. Il faudrait en toute rigueur noter $+_{\mathbb{N}}$ l'addition des naturels et $+_{\mathbb{Z}}$ celle des entiers relatifs, car ce sont deux applications différentes, qui agissent sur des objets différents. Par abus de notation, il est conventionnel de représenter ces deux opérations par le même symbole $+$, le contexte étant généralement suffisant pour savoir de quelle version de l'addition il s'agit.

Remarque 3

La *soustraction* $a - b$ de deux entiers $\{a, b\} \subset \mathbb{Z}$ n'est rien d'autre que l'addition de l'entier $a \in \mathbb{Z}$ par l'opposé de l'entier $b \in \mathbb{Z}$

$$\boxed{a - b = a + (-b).}$$

Remarque 4

Il est important de ne pas confondre le signe $-$ qui se trouve devant les nombres négatifs, comme -3, et le signe $-$ qui se trouve devant une lettre et qui représente l'opposé du nombre donné par la lettre.

Ainsi dans l'expression $-a$, le signe $-$ nous montre que l'on a à faire à l'opposé de a. Si $a = +3$, cet opposé sera $-a = -3$, mais si $a = -5$, alors $-a = +5$ et on voit bien que malgré le signe $-$ devant la lettre a, le nombre est positif.

On peut directement déduire une conséquence importante du groupe additif $(\mathbb{R}, +)$.

Théorème 1.4

L'élément neutre est unique.

Preuve.
Pour montrer que l'élément neutre est unique, on procède par le tiers exclu. Nous allons montrer l'unicité de l'élément neutre de l'addition des entiers relatifs. Cette preuve est valable pour toutes les opérations internes dans une ensemble E quelconque.
Supposons qu'il existe deux éléments neutres 0 et $0'$. On a clairement

$$0 + 0' = 0 + 0'.$$

Comme 0 est élément neutre pour l'addition

$$0' = 0 + 0'.$$

Comme $0'$ est aussi élément neutre pour l'addition, par hypothèse, on a

$$0' = 0,$$

ce qui démontre que 0 et $0'$ sont identiques. Donc il ne peut exister qu'un seul élément neutre.

$\square$

Remarque 5

On peut imaginer qu'il existe un élément neutre 0_g à gauche et un élément neutre 0_d à droite, qui sont différents

$$a + 0_d = 0_g + a = a, \qquad \text{avec} \quad 0_g \neq 0_d.$$

Par le même type de démonstration que dans le cas précédent, on montre que l'on doit obligatoirement avoir $0_g = 0_d$.

Théorème 1.5

Dans un groupe $(E, *)$, le symétrique a' d'un élément $a \in E$ est unique.

Preuve.
Nommons e l'élément neutre de $*$ dans E.

$$a * e = e * a = a.$$

Supposons, par l'absurde, qu'un élément $a \in E$ ait deux symétriques a' et a'', respectivement un symétrique à gauche et un symétrique à droite. On a alors

$$a * a'' = a' * a = e.$$

Considérons la composition

$$a' * a * a'' = a' * a * a''.$$

Par associativité de $*$, on a

$$(a' * a) * a'' = a' * (a * a'')$$

par définition des symétriques a' et a'', on a

$$e * a'' = a' * e$$

et par définition de l'élément neutre e

$$a'' = a'$$

ce qui confirme que l'élément symétrique à gauche et l'élément symétrique à droite sont identiques.
On a ainsi prouvé que tout élément $a \in E$ admet un symétrique unique a' dans E, si $(E, *)$ forme un groupe (abélien ou non).

□

Remarque 6

Il découle de ces deux théorèmes que $0 \in \mathbb{Z}$ est bien le seul et unique élément neutre pour l'addition dans $\mathbb{Z}$ et que tout élément de $\mathbb{Z}$ possède un seul et unique opposé.

Exemple 1

Du fait que $(\mathbb{Z}, +)$ forme un groupe, on peut résoudre des équations simples. Soit à résoudre l'équation dans $\mathbb{Z}$ [a]

$$x + 3 = 0.$$

La lettre x représente le nombre *inconnu* qu'il faut trouver. La méthode consiste à *isoler* la lettre x en n'utilisant que les règles connues de l'arithmétique (en l'occurrence, les règles de l'addition des entiers relatifs.)

Il faut supprimer le 3 qui accompagne le x. Pour ce fait, on sait que tout élément de $\mathbb{Z}$, ici 3, possède un opposé -3 dans $\mathbb{Z}$. Cet opposé, lorsqu'il est composé avec le 3 donne l'élément neutre 0 de l'addition dans $\mathbb{Z}$. L'inconnue x est alors isolée.

On utilise alors la compatibilité de l'addition par rapport à l'égalité, pour additionner -3 aux deux membres de l'égalité

$$x + 3 + (-3) = 0 + (-3).$$

On peut utiliser l'associativité de l'addition des entiers relatifs pour obtenir

$$x + (3 + (-3)) = 0 + (-3).$$

Comme -3 est l'opposé de 3, on a

$$x + 0 = 0 + (-3).$$

Finalement, comme 0 est l'élément neutre de l'addition dans $\mathbb{Z}$, on trouve

$$x = -3,$$

qui est la solution cherchée.

a. Cette équation n'a pas de solution dans $\mathbb{N}$. Ceci est dû au fait que $\mathbb{N}$ a une structure plus pauvre que $\mathbb{Z}$ pour l'addition. En particulier, dans $\mathbb{N}$, les entiers naturels non nuls n'ont pas d'opposé.

Exercice 1.2.
Montrer que si E est l'ensemble des symétries du triangle équilatéral, alors $(E, \circ)$, où $\circ$ est la composition des applications, est un groupe. Est-il abélien ? Résoudre dans E l'équation

$$r_1 \circ x = m_3,$$

où les éléments de E sont r_0 l'identité (la rotation de 0° autour du centre du triangle), r_1 et r_2 les rotations de 120° autour du centre du triangle dans le sens des aiguilles d'une montre et dans le sens opposé respectivement, m_1, m_2 et m_3 les symétries miroirs laissant respectivement les sommets C, A et B invariants.

1.3.2 La multiplication

La multiplication des entiers relatifs $\cdot$ est une application

$$\begin{aligned} \cdot\ : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} &\to \mathbb{Z} \\ (a, b) &\mapsto c = a \cdot b \end{aligned}$$

qui vérifie les propriétés suivantes

1. La multiplication des entiers relatifs est une *opération interne* dans $\mathbb{Z}$.

2. La multiplication des entiers relatifs est *associative*

$$m \cdot (n \cdot p) = (m \cdot n) \cdot p.$$

3. La multiplication des entiers relatifs admet $+1 \in \mathbb{Z}$ comme *élément neutre* dans $\mathbb{Z}$

$$(+1) \cdot n = n \cdot (+1) = n.$$

4. La multiplication des entiers relatifs est *commutative*

$$m \cdot n = n \cdot m.$$

Exercice 1.3.
a) Pourquoi $(\mathbb{Z}, \cdot)$ et $(\mathbb{Z}^*, \cdot)$ ne forment-ils pas des groupes ?
b) Montrer que $(\{-1, +1\}, \cdot)$ forme un groupe abélien.

1.3.3 Distributivité

De plus, la multiplication des entiers relatifs est distributive sur l'addition des entiers relatifs

$$m \cdot (n + p) = m \cdot n + m \cdot p.$$

Remarque 7

$(\mathbb{Z}, +)$ forme un groupe abélien et bien que $(\mathbb{Z}^*, \cdot)$ ne forme pas un groupe, $\mathbb{Z}$ muni de l'addition et du produit a des propriétés qui sont résumées dans la structure mathématique d'*anneau*. On dit que $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ forme un anneau. Comme la multiplication est commutative, on dit que c'est un *anneau commutatif*.

On obtient alors, comme conséquence de ces règles

Théorème 1.6

1. Pour tout entier $a \in \mathbb{Z}$, le produit de a avec l'élément neutre, 0, de l'addition des entiers relatifs est l'élément neutre de l'addition des entiers. On dit que c'est l'élément *absorbant* de la multiplication des entiers relatifs
$$\boxed{0 \cdot a = 0}$$
2. Pour tout entier $a \in \mathbb{Z}$, le produit de a avec l'opposé de l'élément neutre de la multiplication donne l'opposé de a
$$\boxed{(-1)a = -a}$$
3. Pour tout entier $a \in \mathbb{Z}$, l'opposé de l'opposé de a est a lui-même
$$\boxed{-(-a) = a}$$

Preuve.

1. On a les égalités suivantes

$(1 + 0) \cdot a = 1 \cdot a,$	par définition de l'élément neutre 0 de la somme
$1 \cdot a + 0 \cdot a = 1 \cdot a,$	par distributivité de la multiplication sur l'addition
$a + 0 \cdot a = a,$	par définition de l'élément neutre 1 du produit
$(-a) + a + 0 \cdot a = (-a) + a,$	par compatibilité de + par rapport à l'égalité
$0 + 0 \cdot a = 0,$	par associativité et par définition de l'opposé $-a$ de a
$0 \cdot a = 0,$	par définition de l'élément neutre 0 de la somme.

On a ainsi montré que 0 est bien élément absorbant de la multiplication dans $\mathbb{Z}$.

2. Pour montrer que $(-1)a$ est bien l'opposé de a, il suffit de l'additionner à a pour voir si l'on obtient bien l'élément neutre. On a les égalités suivantes

$$\begin{aligned} a + (-1)a &= (1 + (-1))a, && \text{par distributivité de la multiplication sur la somme}\\ a + (-1)a &= 0 \cdot a, && \text{par définition de l'opposé de 1}\\ a + (-1)a &= 0, && \text{car 0 est absorbant pour la multiplication.} \end{aligned}$$

Ainsi, $(-1)a$ est bien l'opposé $-a$ de a.

3. Comme $-(-a)$ est l'opposé de $-a$, on a les égalités suivantes

$$\begin{aligned} -(-a) + (-a) &= 0, && \text{par définition de l'opposé}\\ -(-a) + (-a) + a &= 0 + a, && \text{par compatibilité de la somme sur l'égalité}\\ -(-a) + 0 &= 0 + a, && \text{par définition de l'opposé}\\ -(-a) &= a, && \text{par définition de l'élément neutre.} \end{aligned}$$

□

Afin de mettre en évidence le signe d'un nombre entier relatif, si $a \in \mathbb{N}$ est un entier naturel, on notera $+a$ le nombre entier relatifs correspondant à a et $-a$ son opposé. On montre alors que l'on a

Théorème 1.7 (règle des signes)

Si $\{a, b\} \subset \mathbb{N}$, on a

$$(-a) \cdot (-b) = (+a)(+b) = a \cdot b$$

et

$$(-a) \cdot (+b) = (+a) \cdot (-b) = -(a \cdot b).$$

Exercice 1.4.
Établir ce théorème à partir du théorème 1.6 et des propriétés de la somme et du produit.

Exemple 2

Pour détailler complètement les calculs, on supposera que l'on connaît l'addition des entiers positifs et les règles de calcul. Effectuer les calculs en les décomposant de cette façon, permet de réviser efficacement les règles et de mieux les mémoriser.

Comme application simple de ces propriétés, calculons

1. $$\begin{aligned} 5 - 3 &= (+5) + (-3)\\ &= ((+2) + (+3)) + (-3)\\ &= (+2) + ((+3) + (-3))\\ &= (+2) + 0\\ &= +2 \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} 7 - 9 &= (+7) + (-9)\\ &= (+7) + (-1)(+9)\\ &= (+7) + (-1)\left((+7) + (+2)\right)\\ &= (+7) + (-1)(+7) + (-1)(+2)\\ &= (+7) + (-7) + (-2)\\ &= 0 + (-2)\\ &= -2 \end{aligned}$$

1.3.4 La relation d'ordre

Les nombres entiers naturels sont naturellement identifiés aux nombres entiers relatifs positifs $\mathbb{N} \simeq \mathbb{Z}_+$, tandis que leur opposé est appelé nombre négatif et forment l'ensemble $\mathbb{Z}_-$ de sorte que

$$\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_- \cup \mathbb{Z}_+.$$

On définit enfin dans $\mathbb{Z}$ une relation d'ordre totale, notée $\leqslant$, par

Définition 3

On dit que m est inférieure à n si $n - m \in \mathbb{Z}_+$ et on note

$$m \leqslant n.$$

Ainsi, on a

$$\mathbb{Z}_- = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \leqslant 0\}$$

et

$$\mathbb{Z}_+ = \{n \in \mathbb{Z} \mid 0 \leqslant n\}.$$

Théorème 1.8

La relation $\leqslant$ est une relation d'ordre totale dans $\mathbb{Z}$. C'est-à-dire, pour tout $\forall \{m, n, p\} \subset \mathbb{Z}$

1. $\leqslant$ est réflexive : $n \leqslant n$
2. $\leqslant$ est antisymétrique : $(n \leqslant m \text{ et } m \leqslant n) \Rightarrow m = n$
3. $\leqslant$ est transitive : $(n \leqslant m \text{ et } m \leqslant p) \Rightarrow n \leqslant p$
4. $\leqslant$ est connexe, i. e. on a toujours : $n \leqslant m$ ou $m \leqslant n$.

Remarque 8

L'anneau $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ muni de la relation d'ordre totale $\leqslant$ a une structure d'anneau commutatif totalement ordonné, noté $(\mathbb{Z}, +, \cdot, \leqslant)$.

Définition 4 (valeur absolue)

Soit x un entier relatif. On appelle *valeur absolue de x* le nombre entier relatif positif

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Exemple 3

Soit $x = +3$. On a $x \leqslant 0$. La définition nous dit alors

$$|+3| = |x| = x = +3.$$

Si $x = -3$. On a $x < 0$ et par définition de la valeur absolue

$$|-3| = |x| = -x = -(-3) = +3.$$

Ainsi nous voyons que la valeur absolue change le signe des nombres négatifs.

1.4 L'ensemble $\mathbb{Q}$

Pour définir l'ensemble $\mathbb{Q}$ des rationnels, on construit le symétrique par rapport à la multiplication $\frac{1}{q}$ des éléments $q \in \mathbb{Z}^*$ [3], tels que $q\frac{1}{q} = 1$.

Dans cette fin, on définit une fraction comme un couple de valeurs $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, où a et b sont des entiers relatifs. L'usage veut que l'on écrive une fraction $\frac{a}{b}$ au lieu de (a, b).

$$r = (a, b) = \frac{a}{b}, \quad \text{où } a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^*.$$

3. On verra plus loin la raison du choix $b \neq 0$.

On définit alors une relation d'équivalence des fractions

$$\frac{a}{b} \simeq \frac{c}{d} \Leftrightarrow (a,b) \simeq (c,d) \Leftrightarrow ad = cb.$$

Cette relation d'équivalence permet de former des classes d'équivalence. On appelle *nombre rationnel* une classe d'équivalence des fractions. On représente alors un nombre rationnel par une de ses fractions. Dès lors, on ne distingue pas les fractions équivalentes et si $(a,b) \simeq (c,d)$ on écrit simplement

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

On a ainsi, grâce à cette relation, un *critère d'égalité des fractions*. Pour vérifier si deux fractions sont égales, on compare le produit de leurs extrêmes avec celui de leur moyen

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Longleftrightarrow a \cdot d = b \cdot c.} \qquad \textbf{(critère d'égalité des fractions)}$$

Ainsi, $\frac{a}{b}$ est la classe d'équivalence de toutes les fractions (c,d) équivalentes à (a,b). L'ensemble $\mathbb{Q}$ des rationnels est alors l'ensemble des classes d'équivalence des fractions.

On rencontre parfois la définition suivante (fondamentalement abusive, mais très pratique) de l'ensemble $\mathbb{Q}$

$$\mathbb{Q} = \{x = \frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z} \wedge b \in \mathbb{Z}^*\}.$$

On a directement le théorème de simplification des fractions

Théorème 1.9 (simplification des fractions)

Soit $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}^*$. On a alors

$$\boxed{\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}}, \quad \forall\, c \in \mathbb{Z}^*.$$

La preuve est laissée en exercice.

Notation 2

On identifie les entiers relatifs $a \in \mathbb{Z}$ avec les nombres rationnels de la forme $\frac{a}{1} \in \mathbb{Q}$.

Théorème 1.10 (La fraction nulle)

Les fractions de la forme $\frac{0}{b}$, où $b \in \mathbb{Z}^*$ sont équivalentes entre elles. En particulier on a

$$\boxed{0 = \frac{0}{1} = \frac{0}{b}}, \ \forall\, b \in \mathbb{Z}^*.$$

1.4.1 L'addition

Il n'est pas possible de construire directement la notion d'addition des rationnels en utilisant les règles de la logique élémentaire et les propriétés de l'addition et de la multiplication des entiers relatifs. Il faut d'abord donner une définition de l'addition des rationnels et ensuite montrer que cette addition est (1) compatible avec celle des entiers, (2) a les propriétés désirées. On définit alors l'addition des rationnels, ou des fractions, par

Définition 5 (addition des fractions)

Soit $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ des fractions. On définit la somme de $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ comme étant le nombre rationnel défini par

$$\boxed{\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{bd}.}$$

Remarque 9

La multiplication qui intervient dans la somme des rationnels est celle des entiers relatifs.

L'addition des fractions est bien définie puisque le numérateur $(a \cdot d + b \cdot c)$ et le dénominateur $(b \cdot d)$ sont des entiers et la fraction complète est bien composée de deux entiers. Ainsi, la somme des fraction est encore une fraction, c'est une opération interne.

L'addition ainsi définie est, de plus, compatible avec celle des entiers. En effet, si $\frac{a}{1}$ et $\frac{b}{1}$ sont les rationnels correspondants aux entiers relatifs a et b, on a

$$\frac{a}{1} + \frac{b}{1} = \frac{a \cdot 1 + 1 \cdot b}{1 \cdot 1} = \frac{a+b}{1} = a + b.$$

On montre alors que l'addition des rationnels vérifie exactement les mêmes propriétés que celle des entiers relatifs, ce qui confère à $(\mathbb{Q}, +)$ la structure d'un groupe abélien

Théorème 1.11

La somme des nombres rationnels définie dans $\mathbb{Q}$ possède les propriétés suivantes, pour tous rationnels $\{p, q, r\} \subset \mathbb{Q}$

1. L'addition des rationnels est une *opération interne* $p + q \in \mathbb{Q}$.
2. L'addition est associative $p + (q + r) = (p + q) + r$.
3. L'addition admet un élément neutre dans $\mathbb{Q}$. Il s'agit de $0 \in \mathbb{Q}$: $0 + q = q + 0 = q$.
4. Tout nombre rationnel $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ a un symétrique dans $\mathbb{Q}$, noté $-\frac{a}{b}$ et appelé l'*opposé de* $\frac{a}{b}$, tel que $\frac{a}{b} + (-\frac{a}{b}) = (-\frac{a}{b}) + \frac{a}{b} = 0$.
5. L'addition des entiers relatifs est commutative $p + q = q + p$.

Corollaire 1.12 (opposé d'une fraction)

L'opposé du nombre rationnel $\frac{a}{b}$ est donnée par le nombre rationnel

$$\boxed{-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}.}$$

On vérifie sans peine les propriétés suivantes de la somme des fractions

Théorème 1.13 (addition de fractions de même dénominateur)

Si deux fractions ont le même dénominateur, la somme de ces fractions s'obtient en additionnant leur numérateur et en gardant le dénominateur commun

$$\boxed{\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}.}$$

1.4.2 La multiplication

De même que pour l'addition, on définit la multiplication des nombres rationnels de manière à ce qu'elle soit compatible avec celle des entiers relatifs.

Définition 6 (multiplication des fractions)

Soit $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ deux nombres rationnels. On définit le *produit des rationnels* $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ par le nombre rationnel

$$\boxed{\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}.}$$

Remarque 10

La multiplication du membre de gauche est celle que l'on est en train de définir, la multiplication des rationnels, tandis que la multiplication qui intervient au numérateur et au dénominateur du membre de droite est la multiplication des nombres entiers.

On a alors une multiplication qui est une opération interne dans les rationnels, puisque numérateur et dénominateur d'une multiplication de rationnels sont des entiers. Le produit des rationnels ainsi défini est compatible avec celui des entiers, en effet

$$\frac{a}{1} \cdot \frac{b}{1} = \frac{a \cdot b}{1 \cdot 1} = \frac{a \cdot b}{1} = a \cdot b.$$

Compte tenu des propriétés de la multiplication des entiers relatifs, on montre sans difficulté le

Théorème 1.14

Pour tout $\{p, q, r\} \subset \mathbb{Q}^*$ on a

1. La multiplication des rationnels non nuls est une *opération interne* $p \cdot q \in \mathbb{Q}^*$.
2. La multiplication des rationnels est associative : $p \cdot (q \cdot r) = (p \cdot q) \cdot r$.
3. La multiplication des rationnels admet un élément neutre dans les rationnels, à savoir $1 \in \mathbb{Q}^*$: $1 \cdot q = q \cdot 1 = q$.
4. Tout rationnel non nul $q \in \mathbb{Q}^*$ admet un symétrique pour la multiplication, son *inverse*, noté q^{-1} ou de manière équivalente $\frac{1}{q}$: $q \cdot q^{-1} = q^{-1}q = 1$.
5. La multiplication des rationnels est commutative : $p \cdot q = q \cdot p$.

Corollaire 1.15

Soit $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}^*$ une fraction non nulle. L'inverse de $\frac{a}{b}$ est donné par

$$\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a},}$$

ou encore

$$\boxed{\frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a}.}$$

Remarque 11

Ces propriétés confèrent à $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$ la structure d'un groupe abélien.

Théorème 1.16

La multiplication des rationnels est distributive par rapport à l'addition des rationnels

$$\boxed{p(q + r) = pq + pr} \quad \forall \{p, q, r\} \subset \mathbb{Q}.$$

Ainsi $(\mathbb{Q}, +)$ et $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$ sont des groupes abéliens et la multiplication est distributive relativement à l'addition. On résume la situation en disant que $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ est un *corps commutatif.*

Puisque $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ est un corps, c'est aussi un anneau. On retrouve alors le résultat prouvé dans les entiers relatifs

Théorème 1.17 (0 **est absorbant pour le produit)**

L'élément neutre de la somme des rationnels est élément absorbant pour la multiplication des rationnels

$$\boxed{\frac{a}{b} \cdot 0 = 0 \cdot \frac{a}{b} = 0.}$$

Afin d'être complet, montrons encore le théorème suivant, qui explique pourquoi on doit prendre $b \in \mathbb{Z}^*$ lorsque l'on forme une fraction $\frac{a}{b}$

Théorème 1.18 (division par zéro)

L'élément neutre de l'addition des nombres rationnels n'admet pas d'inverse. Autrement dit, $\frac{1}{0}$ n'existe pas.

Preuve.

Supposons que $\frac{1}{0}$ existe. Par définition de l'inverse, nous aurions alors

$$\frac{1}{0} \cdot \frac{0}{1} = 1.$$

Mais 0 est absorbant pour la multiplication des rationnels, on a alors

$$\frac{1}{0} \cdot \frac{0}{1} = 0.$$

On trouve ainsi

$$1 = 0,$$

ce qui est absurde.

$\square$

Remarque 12

Ce théorème affirme que l'on ne peut pas diviser par 0. Notez que si nous avions une arithmétique dans laquelle $0 = 1$, ce résultat serait faux !

Remarque 13

C'est parce que 0 n'a pas d'inverse que $(\mathbb{Q}, \cdot)$ n'est pas un groupe. Raison pour laquelle il faut prendre $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$.

Théorème 1.19

Dans $\mathbb{Q}$ nous avons encore les propriétés suivantes

1. Diviser, c'est multiplier par l'inverse : $\dfrac{a}{b} = a\dfrac{1}{b}$
2. Produit de deux fractions : $\frac{a}{b}\frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$
3. Inverse de l'inverse : $\dfrac{1}{\frac{1}{a}} = a$
4. Inverse d'une fraction : $\dfrac{1}{\frac{a}{b}} = \dfrac{b}{a}$
5. Rapport de deux fractions : $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \dfrac{a}{b}\dfrac{d}{c}$

La preuve est laissée en exercice.

1.4.3 La relation d'ordre

S'il existe $p \in \mathbb{Z}_+$ et $q \in \mathbb{Z}_+^*$ tels que $r = \frac{p}{q}$ on dit que r est un nombre rationnel positif. On note $\mathbb{Q}_+$ l'ensemble des rationnels positifs. On note $\mathbb{Q}_-$ l'ensemble des rationnels négatifs r, pour lesquels il existe $p \in \mathbb{Z}_-$ et $q \in \mathbb{Z}_+$

tels que $r = \frac{p}{q}$. On a

$$\mathbb{Q} = \mathbb{Q}_- \cup \mathbb{Q}_+.$$

On définit la relation d'ordre $\leqslant$ dans les rationnels par

Définition 7

Si $\{p, q\} \subset \mathbb{Q}$ on dit que p est *inférieur ou égal à* q, on note $p \leqslant q$, si $q - p \in \mathbb{Q}_+$

Exemple 4

Considérons les nombres rationnels $\frac{7}{9}$ et $\frac{11}{16}$. On a

$$\frac{7}{9} - \frac{11}{16} = \frac{7 \cdot 16 - 9 \cdot 11}{9 \cdot 16} = \frac{13}{144} \in \mathbb{Q}_+.$$

Ainsi, on a

$$\frac{11}{16} \leqslant \frac{7}{9}.$$

Les propriétés suivantes sont très importantes et seront utilisées très souvent dans les inéquations et dans les études de signes

Théorème 1.20

On a :

1. $r \in \mathbb{Q}_- \quad \Leftrightarrow \quad r \leqslant 0.$
2. $r \in \mathbb{Q}_+ \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leqslant r.$
3. Si $p \leqslant q$, alors, pour tout $u \in \mathbb{Q}$: $p + u \leqslant q + u$.
4. Si $p \leqslant q$ et $u \leqslant v$, alors : $p + u \leqslant q + v$.
5. Si $p \leqslant q$ et $0 \leqslant r$, alors : $pr \leqslant qr$.
6. Si $p \leqslant q$ et $r \leqslant 0$, alors : $qr \leqslant pr$.

Preuve.

1. Cela découle directement du fait que 0 est neutre pour l'addition des rationnels. En effet, si $r \in \mathbb{Q}_-$
$$0 - r = -r \in \mathbb{Q}_+.$$
Ainsi, on a bien $r \leqslant 0$.
2. Le preuve est la même que celle du cas précédent en prenant $r \in \mathbb{Q}_+$ et en calculant $r - 0$.
3. Soit $p \leqslant q$ deux nombres rationnels et $u \in \mathbb{Q}$. On a alors
$$\begin{aligned} q - p &= q + 0 - p && \text{car } 0 \text{ est neutre pour } + \\ &= q + (u + (-u)) - p && \text{car } -u \text{ est l'opposé de } u \\ &= (q + u) + (-u - p) && \text{car } + \text{ est associative dans } \mathbb{Q} \\ &= (q + u) - (p + u) && \text{par commutativité de } + \text{ et en factorisant } -1 \end{aligned}$$
Ainsi, si $q - p \in \mathbb{Q}_+$, alors $(q + u) - (p + u) \in \mathbb{Q}_+$ également. On a alors
$$p \leqslant q \Longleftrightarrow p + u \leqslant q + u.$$
4. Laissé en exercice.
5. Laissé en exercice
6. Laissé en exercice.

$\square$

Exemple 5

Soit à résoudre l'inéquation

$$3x - 1 \leqslant 2 - 5x$$

Le but de l'exercice est d'isoler le x sans facteur d'un côté de l'inégalité. Pour cela on commence par placer tous les termes en x du même côté en additionnant l'opposé de $5x$ dans les deux membres de l'inégalité, comme nous l'autorise le point 3 du théorème ci-dessus. (On peut toujours additionner le même terme des deux côtés d'une inégalité.)

$$3x - 1 + 5x \leqslant 2 - 5x + 5x$$

soit

$$8x - 1 \leqslant 2.$$

On enlève ensuite tous les termes sans x du membre de gauche en additionnant 1 dans les deux membres

$$8x - 1 + 1 \leqslant 2 + 1,$$

soit

$$8x \leqslant 3.$$

Pour terminer, on isole le x en multipliant les deux membres de l'inégalité par $\frac{1}{8}$. Comme ce facteur est positif, on ne change pas le sens de l'inégalité (conformément au point 5)

$$\frac{1}{8}8x \leqslant \frac{1}{8}3,$$

d'où

$$x \leqslant \frac{3}{8}.$$

Ainsi, la solution à cette inéquation est

$$S = \left]-\infty, \frac{3}{8}\right].$$

C'est l'intervalle contenant tous les nombres réels (cf. section suivante) inférieurs à $\frac{3}{8}$.

Nous terminons cette section par le théorème suivant, qui dit que le produit de deux nombres ne s'annule que si l'un des nombres est nul

Théorème 1.21

Soit $\{a, b\} \subset \mathbb{Q}$ on a alors

$$a \cdot b = 0 \ \Leftrightarrow (a = 0 \vee b = 0)$$

Preuve.
En exercice.

□

Remarque 14

Ce théorème est très utile, nous en aurons souvent besoin. C'est sur lui que repose la plupart des résolutions d'équations.

Exemple 6

Soit à résoudre l'équation

$$(2x - 3)(x - 1) = 0.$$

Le but du problème est de trouver toutes le valeurs de x qui vérifient cette égalité. Le théorème ci-dessus nous dit que cette égalité n'est valable que si :

$$\begin{cases} 2x - 3 & = 0 \\ & \vee \\ x - 1 & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x & = \frac{3}{2} \\ & \vee \\ x & = 1 \end{cases}$$

Ainsi, la solution de l'équation est
$$S = \left\{1, \frac{3}{2}\right\}.$$

1.5 Ce qu'il faut connaître

1. Quelles sont les propriétés de l'addition et de la multiplication dans $\mathbb{N}$?
2. Quelles sont les propriétés de l'addition et de la multiplication dans $\mathbb{Z}$?
3. Règle des signes pour la multiplication des nombres relatifs.
4. Quelles sont les propriétés de l'addition et de la multiplication dans $\mathbb{Q}$?
5. Règles de multiplication et d'addition des fractions.
6. Règles de simplification et d'amplification des fractions (théorème : énoncé et preuve).
7. Qu'est-ce qu'un groupe ? un anneau ? un corps ?
8. Quelles sont les propriétés de l'inégalité (théorèmes : énoncés et preuves) ?
9. Théorème 1.21.

1.6 Exercices

Exercice 1.5.
Effectuer les opérations suivantes en justifiant les calculs (en indiquant les propriétés utilisées)

1) $(-8) + (-3)$ 2) $(+9) + (-6)$ 3) $(+3) + (-7)$
4) $(+12) - (-4)$ 5) $-9 - 5$ 6) $(-4) - (-7)$
7) $-2 \cdot 0$ 8) $(+3) \cdot (-8)$ 9) $-4 \cdot (+2)$
10) $-7 \cdot (-6)$

Exercice 1.6.
Comparer les nombres entiers relatifs suivants

a) (-3) et (-5) b) (-3) et (-1)
c) (-2) et $(+3)$ d) $(+1)$ et $(+4)$
e) $(+5)$ et $(+3)$

Exercice 1.7.
On donne deux entiers relatifs a et b. Calculer

a) $|ab|$ et $|a| \cdot |b|$
b) $|a + b|$ et $|a| + |b|$
c) $|a - b|$ et $|a| - |b|$

dans les différents cas suivants :

$a = 8$ et $b = 5$ $a = 6$ et $b = -4$ $a = 5$ et $b = -9$
$a = -1$ et $b = 4$ $a = -4$ et $b = 2$ $a = -7$ et $b = -9$.

Quelle(s) propriété(s) les résultats obtenus suggèrent-ils ?

Exercice 1.8.
Soit a, b et c trois éléments de $\mathbb{Z}$. Montrer que $-a + b - c$ est l'opposé de $a - b + c$ en vérifiant que la somme de ces deux expressions est nulle (indiquer les propriétés utilisées).

Exercice 1.9.
Effectuer les opérations suivantes en justifiant les calculs

1) $\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{7}$ 2) $\frac{4}{5} \cdot \frac{-7}{9}$ 3) $\frac{6 \cdot 13}{5 \cdot (-13)}$

4) $\frac{2}{3} + \frac{4}{3}$ 5) $\frac{3}{8} + \frac{5}{9}$ 6) $\frac{3}{4} : \frac{5}{7}$

Exercice 1.10.
Effectuer les multiplications suivantes

1) $\frac{-3}{4} \cdot \frac{7}{-2}$ 2) $\frac{8}{3} \cdot \frac{-5}{4}$ 3) $-\frac{3}{5} \cdot \frac{15}{-9}$

4) $-\frac{11}{15} \cdot \left(-\frac{60}{121}\right)$ 5) $\frac{23}{25} \cdot \frac{125}{69} \cdot 12$ 6) $\frac{42}{123} \cdot \frac{41}{6} \cdot \frac{56}{24} \cdot \frac{3}{14}$

Exercice 1.11.
Effectuer les divisions suivantes

1) $\frac{-3}{13} : \frac{5}{26}$ 2) $\frac{15}{8} : 18$ 3) $16 : \frac{-4}{5}$

4) $\frac{75}{49} : \frac{30}{14}$ 5) $\left(\frac{1}{4} : \frac{6}{7}\right) : \frac{3}{8}$ 6) $\frac{1}{4} : \left(\frac{6}{7} : \frac{3}{8}\right)$

Exercice 1.12.
Effectuer les additions ou soustractions suivantes

1) $\frac{8}{5} + \frac{3}{7}$ 2) $\frac{5}{42} + \frac{3}{14}$ 3) $\frac{1}{6} - \frac{10}{9}$

4) $\frac{13}{3} - 3$ 5) $11 - \frac{22}{7}$ 6) $\frac{2}{21} - \frac{3}{7}$

7) $\frac{5}{6} + \frac{1}{12} - \frac{7}{24}$ 8) $\frac{8}{3} - \frac{5}{9} + \frac{1}{6}$ 9) $\frac{3}{2} - \frac{4}{3} - \frac{1}{7}$

10) $\frac{19}{7} - \frac{11}{6} + \frac{6}{21}$ 11) $\frac{5}{14} - \frac{2}{35} + \frac{3}{70} - \frac{2}{7}$ 12) $\frac{8}{3} - \frac{6}{5} - \frac{3}{4} - \frac{1}{20}$

Exercice 1.13.
Effectuer les opérations suivantes

1) $\left(\frac{4}{7} + \frac{3}{14}\right) \cdot \frac{7}{22}$ 2) $\left(\frac{2}{3} - \frac{3}{4}\right) : \frac{5}{6}$

3) $\left(\frac{12}{35} : \frac{15}{14}\right) \cdot \frac{5}{6}$ 4) $\left(\frac{4}{7} - \frac{3}{5} + \frac{5}{6}\right) \cdot \frac{15}{26} - \frac{3}{7}$

5) $\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{5} - \frac{5}{6}\right) \cdot \left(\frac{2}{11} - \frac{1}{22}\right)$ 6) $\left(\frac{7}{12} + \frac{5}{14}\right) : \left(5 - \frac{17}{35}\right)$

Exercice 1.14.
Comparer les nombres rationnels suivants
a) $-\frac{3}{4}$ et $-\frac{5}{2}$ b) $-\frac{3}{2}$ et $-\frac{1}{5}$
c) $-\frac{2}{3}$ et $\frac{3}{5}$ d) $\frac{1}{2}$ et $\frac{4}{3}$
e) $\frac{4}{3}$ et $\frac{3}{2}$

Exercice 1.15.
Chercher la valeur du nombre x tel que :
1) $x + 1 = 0$ 2) $3x - 1 = 2$ 3) $3x = -1$
4) $2x - 1 = x + 1$ 5) $x^2 - x = 0$ 6) $x^2 - 2x + 1 = 0$

Exercice 1.16.
Montrer que $(\mathbb{Z}, \cdot)$ n'est pas un groupe.

Exercice 1.17.
Montrer que $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ n'est pas un corps.

Exercice 1.18.
Montrer que dans un groupe $(E, *)$ on a

$$a * c = b * c \Leftrightarrow a = b.$$

Exercice 1.19.

Déterminer l'ensemble C des symétries du carré (il y a 8 éléments). Faire le tableau de composition des éléments de symétrie du carré et montrer que la composition des applications est une opération interne dans C. Quel est l'élément neutre ? Quel est le symétrique de chaque élément ? Est-ce que $(C, \circ)$ forme un groupe ? Si oui, est-il abélien ?

Exercice 1.20.
Même question pour l'ensemble R des symétries d'un rectangle.

Chapitre 2

Puissance et Racine

2.1 Puissance

Nous avons vu comment multiplier des nombres entre eux. Il arrive parfois que nous devions multiplier un nombre avec lui-même un certain nombre de fois. Cela n'a rien de nouveau, simplement l'usage répété de ce genre d'opération à mené à l'introduction d'une nouvelle notation.

2.1.1 Définition

Définition 1

Soit a un nombre rationnel et n un entier. On appelle *puissance* n^e de a, le nombre a^n donné par

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ fois}}$$

Exemple 1

Ainsi a à la puissance 2, s'écrit : $a^2 = a \cdot a$.
La 3^{e}puissance de a est : $a^3 = a \cdot a \cdot a$.
La 5^{e}puissance de 2 est : $2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$.

Remarque 1

a^2 se dit également a *au carré* et a^3 se dit aussi a *au cube*.

On donne ci-après la définition officielle et plus rigoureuse de la puissance n^e d'un nombre a

Définition 2

Soit $a \in \mathbb{Q}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}$. On appelle *puissance* n^e *de* a le nombre rationnel

$$a^n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ a \cdot a^{n-1} & \text{sinon} \end{cases}$$

Exemple 2

Pour nous convaincre que cette définition est équivalente à la première, calculons a^5

$$\begin{aligned} a^5 &= a \cdot a^{5-1} = a \cdot a^4 \\ &= a \cdot a \cdot a^{4-1} = a \cdot a \cdot a^3 \\ &= a \cdot a \cdot a \cdot a^2 \\ &= a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a^1 \\ &= a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a^0 \\ &= a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot 1 \\ &= a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a. \end{aligned}$$

Cette dernière expression contient bien 5 fois le facteur a, en accord avec la première définition donnée.

Remarque 2

La dernière définition de la puissance est la définition par *induction*, ou encore par *récurrence*. C'est cette définition qu'il faudra retenir, car c'est celle que nous utiliserons dans les démonstrations.

2.1.2 Propriétés des puissances entières positives

Preuve par récurrence ou par induction Pour montrer qu'une propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ on peut procéder comme suit

1. On vérifie que la propriété est vraie pour $n = 0$.
2. On suppose que la propriété est vraie pour une valeur $n = k$, où k est un entier quelconque, et on montre qu'il en découle qu'elle est alors vraie pour $n = k + 1$, l'entier suivant.

Si les deux étapes ci-dessus sont réalisées, on peut alors conclure que la propriété est vraie pour toutes les valeurs entières de n.

Cette méthode de démonstration qui peut être utilisée dès que l'on doit démontrer une propriété concernant tous les nombres entiers naturels est connue sous le nom de *théorème de récurrence*. Ce théorème affirme que si les deux étapes mentionnées sont vérifiées, alors la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

En effet, vu que la propriété est vraie pour $n = 0$, on peut, grâce à la deuxième partie, affirmer que la propriété est encore vraie pour le suivant du nombre 0, c'est-à-dire 1. Comme la propriété est maintenant vraie pour $n = 1$, grâce à la deuxième partie, affirmer qu'elle est encore vraie pour $n = 2$ et ainsi de suite pour tous les entiers naturels.

Ainsi la première partie de la preuve donne un point de départ, $n = 0$, pour l'ensemble des valeurs que peut prendre n. La deuxième partie de la preuve permet, à partir de n'importe quelle valeur de n qui vérifie la proposition, de montrer que la valeur suivante fonctionne également. On en conclut alors que toutes les valeurs de n entières vérifient la propriété.

Supposer que la propriété à démontrer est vraie pour $n = k$, où k est un entier quelconque, consiste à poser *l'hypothèse de récurrence*. Une telle valeur de k existe toujours : si l'on a pu prouvé la première partie il y a la valeur $k = 0$.

La puissance n^{e} des nombres jouit des propriétés suivantes que l'on peut utiliser pour simplifier des calculs.

Théorème 2.1

Soit $\{a, b\} \subset \mathbb{Q}$ et $\{m, n\} \subset \mathbb{N}$. On a alors les propriétés suivantes

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
2. $(a^m)^n = a^{mn}$
3. $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

4. si $b \neq 0$: $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

Preuve.

La plupart des démonstrations que nous ferons seront faites par *induction* (on dit aussi par récurrence).

1. Montrons que $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.
   Procédons par induction sur n.
   (a) Si $n = 0$, on a d'une part
   $$a^m \cdot a^0 = a^m \cdot 1 = a^m$$
   et d'autre part
   $$a^{m+0} = a^m.$$
   Ainsi, la propriété est vraie pour $n = 0$: $a^m \cdot a^0 = a^{m+0}$.
   (b) Supposons la propriété vraie pour $n = k$. On a alors
   $$a^m \cdot a^k = a^{m+k} \qquad \text{(hypothèse de récurrence).}$$
   Montrons qu'elle est encore vraie pour $n = k+1$. On a, par définition de la puissance $k+1^{\text{e}}$
   $$a^m \cdot a^{k+1} = a^m \cdot a^k \cdot a = (a^m \cdot a^k) \cdot a.$$
   Comme la propriété est vraie pour $n = k$ on peut l'appliquer dans la parenthèse. On obtient alors :
   $$a^m \cdot a^{k+1} = a^{m+k} \cdot a = a^{m+k+1}$$
   par définition de la puissance $(m+k+1)^{\text{e}}$. On a ainsi montré que la propriété est encore vraie pour $n = k+1$.
   Le théorème de récurrence affirme alors que la propriété est vraie pour toute valeur entière de n.
2. Nous allons encore procéder par induction sur n
   (a) Vérifions que la propriété est vraie pour $n = 0$. On a d'une part, par définition de la puissance 0^{e}
   $$(a^m)^0 = 1$$
   et d'autre part
   $$a^{m \cdot 0} = a^0 = 1.$$
   Ainsi, on a bien $(a^m)^0 = a^{m \cdot 0}$.
   (b) Supposons que l'égalité est vraie pour $n = k$, où k est un entier quelconque, soit
   $$(a^m)^k = a^{m \cdot k} \qquad \text{(hypothèse de récurrence).}$$
   Montrons qu'elle est encore vraie pour $n = k+1$
   $$(a^m)^{k+1} = (a^m)^k \cdot a^m$$
   par définition de la puissance $(k+1)^{\text{e}}$. Ainsi, en appliquant l'hypothèse de récurrence, on a
   $$(a^m)^{k+1} = a^{m \cdot k} a^m = a^{m \cdot k + m}$$
   où l'on a utilisé la propriété précédente. On obtient finalement
   $$(a^m)^{k+1} = a^{m \cdot (k+1)}$$
   ce qui montre que l'égalité est encore vraie pour $n = k+1$.
   Le théorème de récurrence affirme alors que la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Montrons par induction sur n que l'on a toujours $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$.
   (a) pour $n = 0$ on a
   $$(a \cdot b)^n = (a \cdot b)^0 = 1$$
   et
   $$a^0 = 1 \qquad \text{et} \qquad b^0 = 1$$
   donc
   $$a^0 \cdot b^0 = 1 \cdot 1 = 1 = (a \cdot b)^0.$$
   Ainsi, la propriété est vraie pour $n = 0$.
   (b) Supposons que la propriété est encore vraie pour $n = k$, où k est un entier quelconque, c'est-à-dire que la propriété
   $$(a \cdot b)^k = a^k \cdot b^k \qquad \text{(hypothèse de récurrence)}$$
   est vraie pour un certain k.
   Montrons qu'elle est alors également vraie pour $n = k+1$, soit l'entier suivant. Par définition de la puissance $k+1$ on peut écrire
   $$(a \cdot b)^{k+1} = (a \cdot b) \cdot (a \cdot b)^k$$
   par l'hypothèse de récurrence on a alors
   $$(a \cdot b)^{k+1} = (a \cdot b) \cdot a^k \cdot b^k$$
   par l'associativité et la commutativité de la multiplication dans $\mathbb{Q}$ on a
   $$(a \cdot b)^{k+1} = (a \cdot a^k) \cdot (b \cdot b^k)$$
   d'où, finalement, en utilisant la définition de la puissance $k+1$
   $$(a \cdot b)^{k+1} = a^{k+1} \cdot b^{k+1}.$$
   Le théorème de récurrence permet alors d'affirmer que
   $$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$
   est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4. Nous allons à nouveau procéder par induction sur n
   (a) Si $n = 0$ on a, d'une part
   $$\left(\frac{a}{b}\right)^0 = 1$$
   et d'autre part
   $$\frac{a^0}{b^0} = \frac{1}{1} = 1.$$
   Ainsi, on a bien : $\left(\frac{a}{b}\right)^0 = \frac{a^0}{b^0}$.
   (b) Supposons que l'égalité est vraie pour $n = k$, où k est un entier quelconque, soit
   $$\left(\frac{a}{b}\right)^k = \frac{a^k}{b^k} \qquad \text{(hypothèse de récurrence).}$$
   Montrons qu'elle est encore vraie pour $n = k + 1$, l'entier suivant. Par la définition de la puissance $(k + 1)^{\text{e}}$, on peut écrire
   $$\left(\frac{a}{b}\right)^{k+1} = \left(\frac{a}{b}\right)^k \frac{a}{b}.$$
   Grâce à l'hypothèse de récurrence, on peut écrire que la puissance k^{e} d'une fraction est égale à la fraction des puissances k^{e}, donc
   $$\left(\frac{a}{b}\right)^{k+1} = \frac{a^k}{b^k}\frac{a}{b} = \frac{a^{k+1}}{b^{k+1}}$$
   par définition de la puissance $(k + 1)^{\text{e}}$ et par définition du produit des fractions. Donc l'égalité est également vraie pour $n = k + 1$ si elle est vraie pour $n = k$.

   Par le théorème de récurrence on peut affirmer que l'égalité est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

□

Exemple 3

On a ainsi
1. $3^5 \cdot 3^4 = 3^{5+4} = 3^9$.
2. $(5^2)^3 = 5^{2\cdot 3} = 5^6$.
3. $\left(\frac{3}{4}\right)^5 \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^7$.

2.1.3 Puissances entières

Nous allons maintenant étendre la notion de puissance d'un nombre aux puissances entières négatives. Si $n \in \mathbb{Z}_+$ on a $-n \in \mathbb{Z}_-$. Nous voulons donner un sens à l'expression
$$a^{-n}.$$
Afin de rester en accord avec les théorèmes qui viennent d'être établis, on veut définir a^{-n} de sorte que la première propriété soit encore vraie. Dans le cas particulier $m = n$ on a alors
$$a^n \cdot a^{-n} = a^{n+(-n)} = a^0 = 1$$
Ceci signifie que a^{-n} doit être l'inverse de a^n, c'est-à-dire
$$\boxed{a^{-n} = \frac{1}{a^n}},$$
ou encore, ce qui est équivalent, que a^n doit être l'inverse de a^{-n}
$$a^n = \frac{1}{a^{-n}}.$$

Remarque 3

Dans le cas $n = 1$ on retrouve la notation de l'inverse
$$a^{-1} = \frac{1}{a}.$$

En posant ces définitions, on conserve la première propriété démontrée. On a ainsi

Théorème 2.2

Soit $a \in \mathbb{Q}^*$ et $\{m,n\} \subset \mathbb{Z}$. On a alors les propriétés suivantes

1. $\frac{1}{a} = a^{-1}$
2. $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$
3. $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

Preuve.

1. Découle directement de la définition de a^{-n}, pour $n = 1$.
2. C'est la définition de a^{-n}.
3. C'est clair, puisque le définition de la puissance pour des entiers négatifs a été construite pour vérifier cette propriété et du fait que
$$\frac{a^n}{a^m} = a^n \cdot \frac{1}{a^m} = a^n \cdot a^{-m} = a^{n+(-m)} = a^{n-m}.$$

□

Les autres propriétés démontrées pour $n > 0$ sont encore valables

Théorème 2.3

Soit $a \in \mathbb{Q}^*$ et $\{m,n\} \subset \mathbb{Z}$. On a alors les propriétés suivantes :

1. $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
2. $(\frac{a}{b})^n = \frac{a^n}{b^n}$
3. $(a^m)^n = a^{mn}$

Preuve.

Pour $n \in \mathbb{N}$ cela a déjà été démontré, il ne reste qu'à montrer que c'est encore vrai pour $n \in \mathbb{Z}_-$.

1. Supposons $n < 0$. Posons $n' = -n$. Alors $n' > 0$.
On a alors
$$(a \cdot b)^n = (a \cdot b)^{-n'} = \frac{1}{(a \cdot b)^{n'}}.$$
On peut appliquer le théorème démontré pour $n' > 0$ au dénominateur et on obtient
$$(a \cdot b)^n = \frac{1}{a^{n'} \cdot b^{n'}} = \frac{1}{a^{n'}} \frac{1}{b^{n'}} = a^{-n'} \cdot b^{-n'} = a^n \cdot b^n.$$
2. Avec $n' = -n$, on a
$$\begin{aligned} (\tfrac{a}{b})^n = (\tfrac{a}{b})^{-n'} &= \frac{1}{(\frac{a}{b})^{n'}} \\ &= \frac{1}{\frac{a^{n'}}{b^{n'}}} = \frac{b^{n'}}{a^{n'}} \\ &= \frac{b^{-n}}{a^{-n}} = \frac{1}{b^n} \frac{1}{\frac{1}{a^n}} = \frac{1}{b^n} a^n \\ &= \frac{a^n}{b^n}. \end{aligned}$$
3. Avec $n' = -n$, on a
$$\begin{aligned} (a^m)^n = (a^m)^{-n'} &= \frac{1}{(a^m)n'} = \frac{1}{a^{mn'}} \\ &= a^{-mn'} = a^{m(-n')} = a^{mn}. \end{aligned}$$

□

Ainsi, pour résumer, les propriétés des puissances entières sont, avec $a \in \mathbb{Q}^*$ et $\{m,n\} \in \mathbb{Z}$

1. $\dfrac{1}{a^n} = a^{-n}$
2. $a^n a^m = a^{n+m}$
3. $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$
4. $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
5. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$
6. $(a^m)^n = a^{mn}$

2.2 Racine carrée

2.2.1 Introduction

Soit à résoudre, dans $\mathbb{Q}$, l'équation

$$x^2 = 4.$$

Nous avons vu que pour résoudre ce type d'équation, nous l'écrivons sous la forme

$$x^2 - 4 = 0.$$

Puis nous factorisons en utilisant l'identité remarquable

$$(x+2)(x-2) = 0.$$

Cette égalité n'est réalisée que si l'une des parenthèses s'annule, soit

$$\begin{cases} x+2 & = 0 \\ \text{ou} & \\ x-2 & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x & = -2 \\ \text{ou} & \\ x & = 2. \end{cases}$$

Ainsi il y a deux nombres dont le carré est égal à 4. Ces nombres sont 2 et -2.

Nous appelons la solution positive (i. e. 2) la *racine carrée* du nombre 4. Et on écrit

$$2 = \sqrt{4}.$$

2.2.2 Définition

De manière générale, si y est un nombre positif, il peut s'écrire comme le carré d'un nombre. Se pose alors la question de trouver de quel nombre y est le carré. Considérons alors l'équation

$$x^2 = y,$$

où y est un nombre positif. Cette équation se résout comme précédemment

$$x^2 - y = 0$$

Ce qui mène à la factorisation [1]

$$(x + \sqrt{y})(x - \sqrt{y}) = 0$$

Ce qui n'est possible que si

$$\begin{cases} x & = -\sqrt{y} \\ \text{ou} & \\ x & = \sqrt{y}. \end{cases}$$

Par convention, nous appelons alors *racine carrée de* y, que l'on note $\sqrt{y}$, la racine positive de l'équation

$$x^2 = y.$$

Ainsi

1. Nous supposons ici que tout nombre positif y est le carré d'un nombre réel positif, noté $\sqrt{y}$.

Définition 3

Soit $y \in \mathbb{Q}_+$ et $x \in \mathbb{Q}_+$.

$$x = \sqrt{y} \;\Leftrightarrow\; x^2 = y.$$

Cette définition nous dit que le nombre $x = \sqrt{y}$ est le nombre qui, lorsqu'il est élevé au carré, donne le nombre y

$$\sqrt{y}^2 = y.$$

Remarque 4

On n'a défini la racine carrée que pour les nombres positifs. La racine carrée d'un nombre négatif n'a pas de sens dans les rationnels. De plus, selon la définition, la racine carrée d'un nombre (positif) est positive, par convention.

Nous sommes maintenant confrontés à un autre problème. Tous les nombres rationnels positifs n'ont pas de racine carrée. Par contre, on peut facilement écrire une suite de nombres rationnels dont les carrés se rapprochent autant que l'on veut d'un nombre rationnel quelconque.

Par exemple, il n'existe pas de nombre rationnel $\frac{a}{b}$ dont le carré vaut 2. Autrement dit, la racine carrée de 2 n'est pas un rationnel : $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Ainsi, on ne peut pas trouver deux entiers a et b tels que

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}.$$

Pour le montrer, il suffit de considérer, par l'absurde, qu'il existe deux nombres entiers a et b irréductibles (n'ayant pas de diviseur commun), tels que

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}.$$

On a alors, en élevant au carré les deux membres

$$2 = \frac{a^2}{b^2}$$

d'où

$$a^2 = 2b^2. \tag{2.1}$$

Or ceci signifie que a^2 est un multiple de 2. Or le carré d'un entier a ne peut être pair que si cet entier est pair. On doit donc avoir, pour un $k \in \mathbb{N}$

$$a = 2k.$$

En remplaçant dans (2.1) on trouve

$$4k^2 = 2b^2$$

d'où

$$b^2 = 2k^2.$$

Ainsi b^2, et donc b également, est aussi un nombre pair. Ainsi, on voit que a et b sont tous deux pairs et donc ont 2 comme diviseur commun. Cela contredit l'hypothèse de départ selon laquelle a et b étaient irréductibles.

On a ainsi montré que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Pour s'assurer que tous les nombres positifs aient bien une racine carrée, on est obligé de construire un ensemble de nombres plus "grand" que $\mathbb{Q}$, qui contienne non seulement toutes les racines carrées des rationnels, mais, au moins, aussi les racines de ces racines, etc. On complète ainsi l'ensemble des rationnels par l'*ensemble des nombres réels*, $\mathbb{R}$, qui est le plus grand ensemble de nombres. Les nombres réels, qui ne sont pas rationnels, sont appelés nombres *irrationnels*.

2.3 Le corps ordonné $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leqslant)$ des réels

L'ensemble des nombres rationnels n'est pas encore assez grand pour contenir les solutions de toutes les équations, lorsqu'elles existent. Par exemple, si l'on prend l'équation

$$x^2 - 4 = 0,$$

on vérifie sans peine qu'elle est équivalente à

$$(x-2)(x+2)=0.$$

Le théorème précédent nous indique alors que l'on a

$$\begin{cases} x-2 & =0 \\ & \vee \\ x+2 & =0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x & =2 \\ & \vee \\ x & =-2 \end{cases}.$$

Ainsi

$$S=\{-2,2\}.$$

Mais si nous prenons

$$x^2-2=0,$$

il faudrait écrire

$$(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})=0.$$

Or $\sqrt{2}$ n'est pas un rationnel. Il n'existe pas d'entier a et b premiers entre eux tels que

$$\sqrt{2}=\frac{a}{b},$$

comme on peut le montrer facilement. On montre également que la racine carrée de tout nombre premier n'est pas un rationnel. De plus, d'autres nombres importants $\pi, e, \ldots$ ne sont pas des rationnels également (on rappelle que π est le nombre obtenu en divisant la longueur d'un cercle, son périmètre, par le rayon du cercle). On est, ainsi, naturellement amenés à introduire un nouvel ensemble de nombres, qui contient, outre les rationnels, tous ces autres nombres. On appelle *ensemble des nombres réels*, on note $\mathbb{R}$ cet ensemble.

On a ainsi

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Mentionnons encore que $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ ont le même nombre d'éléments (la même infinité d'éléments)

$$\mathrm{Card}(\mathbb{N})=\mathrm{Card}(\mathbb{Z})=\mathrm{Card}(\mathbb{Q})=\aleph_0.$$

$\aleph_0$ (*aleph* zéro, aleph étant la première lettre de l'alphabet hébreux) représente le *nombre transfini* (au-delà des nombres finis, autrement dit infinis) qui correspond au nombre d'éléments de $\mathbb{N}$. On dit que les ensembles $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ ont la *puissance du dénombrable* (on peut compter leurs éléments).

Contrairement à ces ensembles, l'ensemble $\mathbb{R}$ contient un nombre d'éléments beaucoup plus important. C'est un infini strictement plus grand que l'on note c (la puissance du continu. L'*hypothèse du continu* affirme qu'il n'existe pas de nombre transfini strictement plus grand que le dénombrable et strictement inférieur à $\aleph_1=2^{\aleph_0}$, le cardinal de l'ensemble des parties de $\mathbb{N}$ (notament). Ainsi, si cette hypothèse est admise, on a $c=\aleph_1$ et

$$\mathrm{Card}(\mathbb{R})=\aleph_1.$$

Il a été montré que l'hypothèse du continu est compatible avec l'axiomatique de la théorie des ensembles de Zermelo-Frankel, que nous avons utilisé dans ce cours.

Remarquons encore que les nombres réels peuvent se diviser en deux catégories. L'ensemble des *nombres réels algé briques* (qui annulent un polynôme à coefficients entiers) est dénombrable. L'ensemble des *nombres réels transcendants* (pour lesquels il n'existe pas de polynôme à coefficients entiers qui s'annulent par ces nombres) n'est, lui, pas dénombrable ; il a la puissance du continu.

Ainsi, il y a une infinité de fois plus de nombres transcendants que de nombres algébriques. Ce qui est toutefois paradoxal, est qu'il est très difficile de montrer un nombre transcendant. On en connaît très peu. Parmi les nombres transcendants connus, il y a $\pi \simeq 3.1415926535\ldots$ et $e \simeq 2.7182818284590\ldots$.

L'algèbre des nombres transfinis, qui ne sont pas des nombres réels, est un peu particulière et ne sera pas abordée dans ce qui suit.

2.3.1 L'addition

Soit $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels. La somme de deux nombres réels x et y est encore un nombre réel noté $x+y$. L'addition dans $\mathbb{R}$ est une *opération interne* dans $\mathbb{R}$ (tout comme dans $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$). Cela signifie que le résultat de l'addition de deux nombres réels est encore un nombre réel. Cela s'écrit

$$+\ :\ \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}.$$

L'addition est *associative*. On a donc, pour tout $\{x, y, z\} \subset \mathbb{R}$

$$(x+y)+z = x+(y+z).$$

Ce qui signifie que l'ordre dans lequel on effectue les sommes n'a aucune importance.

De plus l'addition admet un *élément neutre* 0 tel que

$$0 + x = x + 0 = x.$$

Dans les ensembles $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ tout élément x possède un symétrique que l'on appelle son *opposé*. Il est noté $-x$ et possède la propriété

$$x + (-x) = (-x) + x = 0.$$

Enfin, l'addition des réels est *commutative*

$$x + y = y + x.$$

Pour résumer ces cinq propriétés, on dit que $(\mathbb{R}, +)$ est un groupe abélien.

Définition 4

Soit A un ensemble et $*$ une opération interne de A (une application de $A \times A$ vers A). On dit que $(A, *)$ est un *groupe abélien* ou un *groupe commutatif* si :

1. $*$ est associative dans A : $(a * b) * c = a * (b * c), \ \forall \{a, b, c\} \subset A$.
2. Il existe un élément $e \in A$, l'élément neutre, tel que : $a * e = e * a = a, \ \forall a \in A$.
3. Pour tout $a \in A$ il existe un élément $a' \in A$, le symétrique de a, tel que : $a * a' = a' * a = e$.
4. $*$ est commutative : $a * b = b * a, \ \forall \{a, b\} \subset A$.

Remarque 5

La cinquième propriété est la première mentionnée, à savoir que $*$ est une opération interne.

Remarque 6

Si la dernière propriété (la commutativité) n'est pas satisfaite, on dit simplement que $(A, *)$ est un groupe.

Remarque 7

Il existe de nombreux types de groupes. Les symétries d'une figures forment un groupe relativement à la composition des symétries. De même que les symétries d'un cristal forme le groupe cristallin du cristal.

L'étude générale des groupes est très complexe et nous ne l'aborderons pas ici. Mentionnons toutefois que la théorie des groupes est un outils très puissant dans les sciences modernes.

2.3.2 La multiplication

Sans détailler à nouveau, nous pouvons dire que la multiplication des nombres réels non nuls forme un groupe abélien $(\mathbb{R}^*, \cdot)$.

L'élément neutre est le nombre réel 1, et l'inverse de tout nombre réel x est noté x^{-1} ou encore $\frac{1}{x}$ et est tel que

$$x \cdot \frac{1}{x} = x \cdot x^{-1} = 1.$$

Enfin, l'élément neutre de l'addition, 0, est *absorbant* pour la multiplication

$$x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Exercice 2.1.
Expliquer ce que signifie que $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ forme un groupe abélien. Pourquoi doit-on prendre $\mathbb{R}^*$ au lieu de $\mathbb{R}$?

Le fait que $(\mathbb{R}, +)$ et $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ sont des groupes abéliens, découle directement de l'axiome des nombres réels. Il en va de même de la notion de distributivité que confère à $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ une structure de corps commutatif. [2]

2.3.3 Distributivité

De plus, la multiplication des réels est aussi distributive relativement à l'addition des réels. Ainsi, si x, y et z sont des réels, on a alors :

$$x(y+z) = xy + xz.$$

La commutativité de la multiplication nous assure que cette propriété est également vraie à droite

$$(x+y)z = xz + yz.$$

Cette propriété ajoutée au fait que $(\mathbb{R}, +)$ et $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ sont des groupes abéliens, donne au triplet $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ la structure d'un *corps commutatif*.

Définition 5

Un triplet $(A, +, \cdot)$ est un *corps* si $(A, +)$ est un groupe abélien, si $(A^*, \cdot)$ est un groupe et si $\cdot$ est distributive relativement à $+$. Si $\cdot$ est commutative, alors le corps est dit commutatif.

Cette définition est très générale, et même si l'on a gardé les symboles $+$ et $\cdot$ pour les opérations dans l'ensemble A, ces opérations peuvent avoir un sens différent, à définir au cas par cas.

En ce qui concerne les nombres réels, ils ont le sens usuel de l'addition et de la multiplication.

2.3.4 Relation d'ordre

Outre ces opérations élémentaires, nous avons des moyens de comparaison entre les différents nombres. La définition des nombres réels nous donne la relation $\leqslant$ sur les réels.

Mentionnons en particulier les propriétés énoncées par l'axiome :

— On a toujours : $x \leqslant x$.
— Si $x \leqslant y$ **et** $y \leqslant x$ alors on a forcément $x = y$.
— Si $x \leqslant y$ **et** $y \leqslant z$ alors on a forcément $x \leqslant z$.
— Quels que soient les nombres x et y on peut toujours les comparer. On a forcément un des deux cas au moins : $x \leqslant y$ ou $y \leqslant x$.

Nous n'en dirons pas plus pour l'instant et attendrons les inéquations pour traiter plus à fond cette relation.

Mentionnons toutefois encore une définition très utile

Définition 6 (valeur absolue)

Soit x un nombre réel. On appelle *valeur absolue de x* le nombre réel positif :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Exemple 4

Soit $x = 3$. On a $x \geqslant 0$. La définition nous dit alors :

$$|3| = |x| = 3.$$

Si $x = -3$. On a $x < 0$ et par définition de la valeur absolue :

$$|-3| = |x| = -x = -(-3) = 3.$$

Ainsi nous voyons que la valeur absolue change le signe des nombres négatifs.

2. Il n'existe pas beaucoup de corps commutatifs. $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ en est un, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ un autre. On peut encore ajouter $(\mathbb{C}, +, \cdot)$. Il existe encore un autre corps, plus grand, qui n'est toutefois pas commutatif, le corps des quaternions.

Remarque 8

Lorsque nous manipulons des nombres bien définis comme 3,-4,36, etc., il n'y a jamais de problème concernant les signes de ces nombres, il suffit de regarder devant les chiffres si le signe $-$ est présent ou non.

En algèbre, les nombres sont souvent représentés par des lettres, qui peuvent prendre n'importe quelle valeur dans un ensemble déterminé. Du coup, le signe d'un nombre représenté par une lettre comme x, y, z, a, etc. n'est plus apparent.

Si x représente un nombre quelconque, on ne peut rien dire sur le signe du nombre $-x$.

Tout ce que nous pouvons dire est que $-x$ est négatif si x est positif et que $-x$ est positif si x est négatif.

Par contre, $|x|$ est toujours positif.

Il faut s'efforcer de distinguer le signe $-$ de la notation $-x$ du signe du nombre représenté par $-x$.

Exemple 5

Soit la proposition

$$|x-3| = 5.$$

Cherchons les valeurs possibles pour x, afin que cette égalité soit satisfaite. Conformément à la définition de la valeur absolue, il y a deux cas à considérer

1. Si $\mathbf{x-3 \geq 0}$.
   On a alors : $x \geq 3$.
   Ainsi, le premier cas consiste à chercher une solution au problème posé dans les nombres supérieurs à 3.
   Dans ce cas on peut enlever les valeurs absolues et l'équation devient
   $$x-3=5.$$
   On trouve, en additionnant 3 dans les deux membres de l'égalité
   $$x-3+3=5+3,$$
   soit
   $$x=8.$$
   La solution $x=8$ est compatible avec la condition de notre cas $x \geq 3$ et on peut l'accepter.
2. Si $\mathbf{x-3<0}$.
   On a alors : $x<3$.
   Dans ce cas, lorsque l'on enlève les valeurs absolues, il faut changer le signe
   $$-(x-3)=5,$$
   soit
   $$-x+3=5.$$
   Additionnons -3 dans les deux membres
   $$-x+3-3=5-3$$
   soit
   $$-x=2$$
   d'où
   $$x=-2.$$
   Cette solution satisfait également avec la condition du cas $x<3$ et on peut également l'accepter.

Ainsi, l'ensemble des solutions de notre problème est

$$S = \{-2, 8\},$$

comme on peut le vérifier aisément.

2.3.5 Intervalles

Définition 7 (intervalle ouvert)

On appelle *intervalle ouvert* $]a, b[$ l'ensemble des nombres réels strictement inférieurs à b et strictement supérieurs à a

$$]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b \}.$$

Définition 8 (intervalle fermé)

On appelle *intervalle fermé* $[a, b]$ l'ensemble des nombres réels inférieurs à b et supérieurs à a

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b \}.$$

Définition 9

On appelle *intervalle ouvert-fermé* $]a, b]$ l'ensemble des nombres réels inférieurs à b et strictement supérieurs à a

$$]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b \}.$$

On appelle *intervalle fermé-ouvert* $[a, b[$ l'ensemble des nombres réels strictement inférieurs à b et supérieurs à a

$$[a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b \}.$$

Exemple 6

Résoudre l'inéquation

$$x^2 - 1 < 0.$$

On peut factoriser le membre de gauche

$$(x-1)(x+1) < 0.$$

Par la règle des signes, ceci n'est possible que si les deux expressions ont le même signe. On peut faire le tableau des signes

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$	|	$+$	
x^2-1		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi, la solution à l'inéquation donnée est l'intervalle ouvert

$$S =]-1; +1[.$$

Définition 10 (intervalle non borné)

On appelle *intervalle non borné ouvert-fermé* $]-\infty, b]$ l'ensemble des nombres réels inférieurs à b :

$$]-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b \}.$$

On appelle *intervalle non borné ouvert* $]-\infty, b\,[$ l'ensemble des nombres réels strictement inférieurs à b :

$$]-\infty, b\,[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\ \}.$$

On appelle *intervalle non borné fermé-ouvert* $[a, +\infty[$ l'ensemble des nombres réels supérieurs à a :

$$[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\ \}.$$

On appelle *intervalle non borné ouvert* $]a, +\infty[$ l'ensemble des nombres réels strictement supérieurs à a :

$$]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\ \}.$$

Remarque 9

Le symbole ∞ se lit « infini ». Il ne représente pas un nombre réel, c'est pourquoi il n'est jamais pris dans un intervalle. On n'a jamais $[-\infty, b]$ ou $[a, +\infty]$.

Remarque 10

L'intervalle ouvert $]-\infty, +\infty[$ correspond à l'ensemble $\mathbb{R}$ tout entier

$$\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[.$$

Remarque 11

Si l'on veut toutefois prendre en compte également $-\infty$ et $+\infty$, on parle de la *droite réelle achevée*

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}.$$

Nous terminons cette section par le théorème suivant, qui généralise le théorème 1.21 aux nombres réels et qui dit que le produit de deux nombres ne s'annule que si l'un, au moins, des nombres est nul

Théorème 2.4

Soit $\{a, b\} \subset \mathbb{R}$ on a alors

$$a \cdot b = 0 \ \Leftrightarrow (a = 0 \vee b = 0)$$

Preuve.
En exercice.

□

Remarque 12

Ce théorème est très utile, nous en aurons souvent besoin. C'est sur lui que repose la plupart des résolutions d'équations.

2.4 La fonction racine carrée

Nous admettrons sans démonstration le théorème suivant

Théorème 2.5

La relation qui, à tout nombre réel positif x, associe sa racine carrée $y = \sqrt{x}$ est une application bijective

$$\begin{aligned} \sqrt{\ } &: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ \\ x &\mapsto y = \sqrt{x} \end{aligned}$$

Remarque 13

Autrement dit, pour tout nombre réel positif x, il existe un nombre réel positif y qui est sa racine carrée. Le théorème affirme que l'on peut prendre la racine carrée de tous les nombres réels positifs (car $\sqrt{\ }$ est une application.) De plus, il affirme que tout nombre réel positif est la racine carrée d'un nombre positif (car $\sqrt{\ }$ est une bijection).

Théorème 2.6

Soit $x \in \mathbb{R}$ un nombre réel quelconque. On a alors

$$\sqrt{x^2} = |x|.$$

Preuve.

Dans tous les cas, $x^2 \geq 0$. Il est alors possible de prendre la racine carrée de x^2. La racine carrée de x^2 est la solution positive de l'équation

$$y^2 = x^2,$$

soit

$$y^2 - x^2 = 0.$$

D'où

$$(y - x)(y + x) = 0.$$

Ce qui implique

$$\begin{cases} y &= x \\ \text{ou} & \\ y &= -x. \end{cases}$$

Il suffit de distinguer deux cas

$\underline{x \geq 0}$ Dans ce cas la solution positive est $y = x$ et comme $|x| = x$, puisque x est positif, on a :

$$y = \sqrt{x^2} = x = |x|.$$

$\underline{x < 0}$ Dans ce cas, la solution positive est $y = -x$.
De plus, pour un x négatif, on a : $|x| = -x$. Ainsi dans ce cas également

$$y = \sqrt{x^2} = -x = |x|.$$

Ce qui démontre le théorème.

□

Remarque 14

Ce théorème prend toute son importance lorsque l'on ne peut rien dire du signe de l'argument du carré, sous la racine. Par exemple dans l'expression $\sqrt{(x+3)^2}$, tant que $x \geq -3$, il n'y a pas de problème puisque $x + 3 \geq 0$. Mais si $x = -4$, $x + 3 = -1$ et dans ce cas, si nous oublions les valeurs absolues nous obtiendrions

$$\sqrt{(x+3)^2} = x + 3.$$

Ce qui, pour $x = -4$ devient

$$\sqrt{(-1)^2} = -1,$$

et est évidemment faux ! Il faut donc écrire

$$\sqrt{(x+3)^2} = |x + 3|.$$

Et maintenant, lorsque $x = -4$, nous trouvons

$$\sqrt{(-1)^2} = |-1| = 1.$$

Ce qui est correct, comme on peut le voir en remarquant que $(-1)^2 = 1$, et que $\sqrt{1} = 1$.

Remarque 15

Ce théorème affirme que pour tout nombre réel $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\sqrt{x^2} = |x|.$$

Les valeurs absolues à droite sont essentielles.

Par contre, on a déjà vu que

$$\sqrt{x}^2 = x,$$

sans valeur absolue, car dans ce cas, x ne peut être que positif, sans quoi, la racine carrée n'a pas de sens.

2.4.1 Propriétés

Il découle des propriétés sur les puissances des propriétés analogues sur les racines carrées.

Propriété 2.7

Soit $\{a, b\} \subset \mathbb{R}_+$. On a alors

1. $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$.
2. Si $b \neq 0$: $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

Preuve.

1. Soit $x = \sqrt{a}$ et $y = \sqrt{b}$. On a alors
$$x^2 = a \quad \text{et :} \quad y^2 = b.$$
On a alors :
$$x^2y^2 = ab.$$
Soit :
$$(xy)^2 = ab.$$
Par définition de la racine carrée, nous avons alors
$$(xy)^2 = ab \Leftrightarrow xy = \sqrt{ab}.$$
Ainsi, par définition de x et y
$$\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}.$$
2. Avec x et y définis comme ci-dessus, on a
$$\frac{x^2}{y^2} = \frac{a}{b}.$$
On a donc :
$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 = \frac{a}{b}.$$
Ainsi, par définition de la racine carrée
$$\frac{x}{y} = \sqrt{\frac{a}{b}},$$
soit
$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}.$$

□

Remarque 16

Il est très important de réaliser que ces résultats ne s'appliquent que si a et b sont tous les deux positifs. S'ils sont les deux négatifs $\sqrt{ab}$ existe, mais $\sqrt{a}$ et $\sqrt{b}$ n'existent pas.

2.4.2 Extraction des racines carrées

Nous allons montrer ci-après comment extraire la racine carrée d'un nombre. Cette méthode d'extraction s'appuie sur l'identité remarquable que nous verrons dans le chapitre suivant : $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Nous illustrons la méthode sur un exemple. Calculons la racine carrée de 6250.

$\sqrt{6250}$	$= 79.05$	Explications
62 50		Séparons le nombre en groupe de deux chiffres.
62		Abaissons le premier groupe.
-49	$= 7^2 = a^2$	Extrayons le carré de 62. 7 est le premier nombre du résultat.
13	$= 62 - 49$	Reste 13.
135 0	$\frac{135}{2\cdot 7} = 9,6 \cdots \to b = 9$	On abaisse le deuxième groupe de nombre et on isole le dernier chiffre.
-126	$= 2 \cdot 7 \cdot 9 = 2ab$	$b = 9$ est le deuxième chiffre du résultat.
$-$ 81	$= 9^2 = b^2$	On soustrait les groupes dans cet ordre : $1350 - 126 \cdot 10 - 81 = 9$
9	Fin de la partie entière.	est le nouveau reste. On place une virgule au résultat et on abaisse le groupe suivant 00 et on isole le dernier chiffre.
90 0	$\frac{90}{2\cdot 79} = 0, \cdots \to b = 0$	Maintenant $a = 79$. $b = 0$ est la première décimale.
$-$ 0	$= 2 \cdot 79 \cdot 0 = 2ab$	
$-$ 0	$= 0^2 = b^2$	
9000 0	$\frac{9000}{2\cdot 790} = 5, \cdots \to b = 5$	$a = 790$. Nouveau reste 900. On abaisse le nouveau groupe 00 et on isole le dernier chiffre. etc...

En réitérant le procédé suffisamment de fois, on obtient finalement l'évaluation décimale de la racine

$$\sqrt{6250} = 79.056941\ldots.$$

Cette méthode laborieuse s'applique à l'identique pour n'importe quel nombre réel positif. Comme deuxième exemple, calculons $\sqrt{2}$:

$\sqrt{2}$	$= 1.41421$	Explications
02		Séparons le nombre en groupe de deux chiffres.
-1	$= 1^2 = a^2$	Extrayons le carré de 2. 1 est le premier nombre du résultat.
1	$= 2 - 1$ fin de la partie entière	Reste 1. On place le point décimal.
10 0	$\frac{10}{2\cdot 1} = 5 \to b = 4$	La division de 10 par $2a$ donnant un entier, on prend l'entier inférieur, sinon en enlevant encore b^2 on est trop gourmand.
$-$ 8	$= 2 \cdot 1 \cdot 4 = 2ab$	$b = 4$ est le deuxième chiffre du résultat.
$-$ 16	$= 4^2 = b^2$	On soustrait les groupes dans cet ordre : $100 - 8 \cdot 10 - 16 = 4$
40 0	$\frac{40}{2\cdot 14} = 1, \cdots \to b = 1$	$a = 14$. La prochaine décimale est 1.
$-$ 28	$= 2 \cdot 14 \cdot 1 = 2ab$	On enlève $2ab$.
$-$ 1	$= 1^2 = b^2$	On enlève b^2.
1190 0	$\frac{1190}{2\cdot 141} = 4. \cdots \to b = 4$	$a = 141$. Nouvelle décimale $b = 4$.
$-$ 1128 0	$= 2 \cdot 141 \cdot 4 = 2ab$	On enlève $2ab$.
$-$ 1 6	$= 4^2 = b^2$	On enlève b^2.
6040 0	$\frac{6040}{2\cdot 1414} = 2, \cdots \to b = 2$	$a = 1414$. Nouvelle décimale $b = 2$.
$-$ 5656	$= 2ab$	On enlève $2ab$.
$-$ 4	$= b^2$	On enlève b^2.
38360 0	$\frac{38360}{2\cdot 14142} = 1, \cdots \to b = 1$	Nouvelle décimale $b = 1$.
...	...	...

En continuant ainsi, nous obtenons : $1.4142135623\ldots.$

2.5 Racine nᵉ

La définition de la racine carrée se généralise sans difficulté aux autres racines, via la fonction puissance n^e. La racine n^e est la fonction réciproque de la puissance n^e.

Il faut, ici, distinguer deux cas, selon que n est pair ou impair. Si n est pair, la règle des signes nous montre que x^n est positif. On ne peut donc prendre la racine paire que pour un nombre positif.

Définition 11 (racine paire)

Soit $y \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}$ avec n paire. On appelle *racine n-^{e} de y* le nombre $x \in \mathbb{R}_+$ défini par

$$x = \sqrt[n]{y} \Leftrightarrow x^n = y.$$

Si n est impair, la règle des signes nous montre que x^n est du même signe que x. Ainsi, si n est impair, on peut prendre la racine n^e d'un nombre positif (on obtient alors un nombre positif) et d'un nombre négatif (on obtient alors un nombre négatif)

Définition 12 (racine impaire)

Soit $y \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}$ avec n impaire. On appelle *racine n-^{e} de y* Le nombre $x \in \mathbb{R}_+$ défini par

$$x = \sqrt[n]{y} \Leftrightarrow x^n = y.$$

Exemple 7

On a clairement

$$(-3)^3 = -27.$$

Ainsi,

$$\sqrt[3]{-27} = -3.$$

Par contre $\sqrt[4]{-27}$ n'existe pas, car une puissance 4^e est toujours positive. Il n'existe pas de nombre $x \in \mathbb{R}$ tel que

$$x^4 = -27.$$

2.6 Ce qu'il faut connaître

1. Principe de la démonstration par récurrence (ou induction).
2. Définition de la puissance par induction.
3. Propriétés de l'exponentiation.
4. Définition de la puissance avec un exposant entier négatif.
5. Propriétés de la puissance générale.
6. Définition de la racine carrée.
7. Propriétés de la racine carrée.
8. Quelles sont les propriétés de l'addition et de la multiplication dans $\mathbb{R}$?
9. Définir la valeur absolue d'un nombre réel.
10. Définition des intervalles.
11. Théorème 2.4 et 2.6.

2.7 Exercices

2.7.1 Puissance

Exercice 2.2.
Effectuer les opérations suivantes en justifiant les calculs

1) $5^{-3} \cdot 5^{6}$ 2) $4^{3} \cdot 4^{-5}$ 3) $2^{-4} \cdot 2^{-6}$

4) $(3^{-4})^{5}$ 5) $(3^{4})^{-5}$ 6) $(7^{-2})^{-3}$

7) $\dfrac{9^3}{9^5}$ 8) $\dfrac{6^{-2}}{6^4}$ 9) $\dfrac{5^{-3}}{5^{-2}}$

Exercice 2.3.
Effectuer les calculs suivants ($\{a, b\} \subset \mathbb{Q}^*$ et $n \in \mathbb{Z}$).

1) $(-1)^{12}$ 2) $(-1)^{17}$ 3) $(-3)^{4}$
4) $(-5)^{3}$ 5) $(-a)^{24}$ 6) $(-a)^{41}$

7) $(-2)^{-5}$ 8) $\dfrac{1}{(-3)^{-2}}$ 9) $4^2 \cdot 4^3$
10) $7^{-2} \cdot 7^{5}$ 11) $5 \cdot 5^{-4}$ 12) $6 \cdot (-6)^{-3}$
13) $(-3)^{-2}(-3)^{-3}$ 14) $(-2)^{3}(-2)^{5}(-2)^{-4}$ 15) $9^{-5} \cdot 9^{2} \cdot 9^{5}$
16) $(-8)^{-5}(-8)^{17}(-8)^{-12}$ 17) $a^{2n}a^{-n}$ 18) $(-a)^{n}(-a)^{2-n}$
19) $a^{n-2}a^{2n+1}$ 20) $a^{2n-1}a^{1-n}a^{-n}$ 21) $(2^3)^4$
22) $((-2)^{-3})^{2}$ 23) $(4^{-1})^{-3}$ 24) $((-5)^{3})^{-1}$
25) $((-a)^{-6})^{7}$ 26) $((-a)^{5})^{-5}$ 27) $((-a)^{-4})^{-8}$
28) $(-2a)^{-4}$ 29) $(a^2b^3)^5$ 30) $(a^{-4}b^{2})^{-3}$

31) $(a^5b^{-3})^{-1}$ 32) $(a^{-3}b^{-4})^{-6}$ 33) $\left(\dfrac{2}{5}\right)^{3}$

34) $\left(\dfrac{3}{2}\right)^{-4}$ 35) $\left(-\dfrac{5}{3}\right)^{-2}$ 36) $\dfrac{4^5}{4^3}$

37) $\dfrac{2^{-2}}{2^3}$ 38) $\dfrac{7^{-8}}{7^{-9}}$ 39) $\dfrac{(-a)^3}{(-a)^{-5}}$

40) $\dfrac{a^{2n+1}}{a^n}$ 41) $\dfrac{(-a)^{n+1}}{(-a)^{1-n}}$ 42) $\dfrac{(-a)^{n-1}}{(-a)^{n+2}}$

Exercice 2.4.
Effectuer les calculs suivants ($\{a, b\} \subset \mathbb{Q}^*$ et $n \in \mathbb{Z}$).

1) $(4^{-3})^2 \cdot 16^2 \cdot \dfrac{1}{2^{-6}}$ 2) $\dfrac{1}{(3^3)^2} \cdot \dfrac{1}{(27^{-2})^2} \cdot 9^{-5}$

3) $\left(-\dfrac{5}{-9}\right)^2 \cdot \left(-\dfrac{3}{10}\right)^2$ 4) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-3} \cdot \left(\dfrac{b}{a}\right)^2$

5) $\left(\dfrac{2}{-5}\right)^4 \left(\dfrac{-15}{16}\right)^2$ 6) $\left(\dfrac{7^3}{5^2}\right)^{-4} \left(\dfrac{49^3}{25^2}\right)^2$

7) $\dfrac{4^{2n}}{2^n}$ 8) $\dfrac{\left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{-2}{3}\right)^3}{\left(\left(\frac{-2}{3}\right)^4\right)^2}$

9) $4^5 : \left(\dfrac{1}{4}\right)^{-5}$ 10) $\left(\dfrac{4}{5}\right)^2 : \left(\dfrac{15}{4}\right)^{-1}$

11) $\left(\dfrac{5 \cdot 11}{3 \cdot 4}\right)^{-3} : \left(\dfrac{25 \cdot 121}{9 \cdot 16}\right)^{-2}$ 12) $\left(\dfrac{a}{b} : \dfrac{b}{a}\right)^{-2} : \left(\dfrac{a^{-1}}{b^{-1}}\right)^2$

13) $\dfrac{(3a)^{3n-1}}{(27a)^n}$ 14) $\dfrac{(16a^3)^{2n}}{(8a^2)^{3n-1}}$

Exercice 2.5.
Effectuer les opérations suivantes en utilisant les puissances de 10 et sans utiliser la calculatrice.

1. $0.00005 \cdot 0.0006 \cdot 0.007$
2. $(30'000)^2 \cdot (2'000'000)^3$
3. $(4'000'000)^3 \cdot (0.00002)^4$
4. $(0.0003)^4 \cdot (0.001)^5$
5. $(62500)^4 \cdot (0.000016)^4$

Exercice 2.6.
Calculer :
$10^3 - 10^2$, $10^4 - 10^3$, $10^6 - 10^5$, $10^{10} - 10^9$, $10^{30} - 10^{29}$, $10^{50} - 10^{48}$.

Exercice 2.7.
L'explosion d'une bombe H de 100 mégatonnes (bien plus grosse que n'importe quelle bombe jamais construite) libère une énergie d'environ 10^{18} Joules, alors qu'une éruption solaire produit une énergie moyenne de 10^{24} Joules. Combien faut-il de bombes H pour obtenir l'équivalent énergétique d'une éruption solaire ?

Exercice 2.8.
Calculer le rapport entre la masse du proton et la masse de l'électron sachant que la masse du proton est de $1.672 \cdot 10^{-27}$ kg et que celle de l'électron est de $0.911 \cdot 10^{-30}$ kg.

Exercice 2.9.
En astronomie, on appelle *année-lumière* (al) la distance parcourue par la lumière en une année (la vitesse de la lumière est exactement donnée par $c = 299'792'458$ m/s). Exprimer en km les distances suivantes

1. Une année-lumière.
2. La distance entre le Soleil et Pluton : $6 \cdot 10^{-4}$ al.
3. La distance entre le Soleil et Proxima du Centaure (l'étoile la plus proche du Soleil) : 4.3 al.
4. La distance entre le Soleil et la Grande Galaxie d'Andromède : $2.2 \cdot 10^6$ al.

Exercice 2.10.
Soit $E = \{\ldots, 2^{-3}, 2^{-2}, 2^{-1}, 2^0, 2^1, 2^2, 2^3, \ldots\}$ l'ensemble de toutes les puissances entières relatives de 2. Montrer que la structure $(E, \cdot)$ est un groupe abélien.

2.7.2 Racine carrée et nombres réels

Exercice 2.11.
Montrer que $\sqrt{3}$ n'est pas un nombre rationnel.

Exercice 2.12.
Déterminer la période des nombres rationnels suivants

$$\frac{2}{9}, \frac{38}{99}, \frac{1}{14}, \frac{1}{13}, \frac{2}{13}, \frac{1}{17}.$$

Exercice 2.13.
Soient x et y deux nombres réels. Les implications suivantes sont-elles vraies ? Préciser si nécessaire.

1. $(x = y) \Rightarrow (x^2 = y^2)$
2. $(x = y) \Rightarrow (x^3 = y^3)$
3. $(x \leq y) \Rightarrow (x^2 \leq y^2)$
4. $(x \leq y) \Rightarrow (x^3 \leq y^3)$
5. $(x^2 = y^2) \Rightarrow (x = y)$
6. $(x^3 = y^3) \Rightarrow (x = y)$
7. $(x^n \leq y^n) \Rightarrow (x \leq y)$
8. $(x \leq y) \Rightarrow (x^n \leq y^n)$

Exercice 2.14.
On donne $0 < x < 4$. Comparer les grandeurs suivantes

1. $-x$ et 4

2. $-\frac{1}{x}$ et $-\frac{1}{4}$
3. $\frac{1}{x^2}$ et $\frac{1}{16}$
4. $-x^{-3}$ et $(-4)^{-3}$

Exercice 2.15.
Simplifier les expressions suivantes

1) $\sqrt{(-3)^2}$	2) $\sqrt{3^2+4^2}$	3) $\sqrt{16^2+12^2}$
4) $\sqrt{15^2-12^2}$	5) $\sqrt{\sqrt{16}}$	6) $\sqrt{\sqrt{81}}$
7) $(3\sqrt{2})^2$	8) $(2\sqrt{7})^2$	9) $\sqrt{8}$
10) $\sqrt{18}$	11) $\sqrt{24}$	12) $\sqrt{300}$
13) $\sqrt{80}$	14) $\sqrt{45}$	15) $\sqrt{125}$
16) $\sqrt{640}$	17) $\sqrt{2704}$	18) $\sqrt{\frac{32}{9}}$
19) $\sqrt{\frac{44}{25}}$	20) $\sqrt{\frac{48}{169}}$	21) $\frac{\sqrt{676}}{\sqrt{484}}$

Exercice 2.16.
Effectuer les additions et les soustractions suivantes

1. $\sqrt{8}-2\sqrt{2}$
2. $\sqrt{75}+\sqrt{12}$
3. $\sqrt{1000}-\sqrt{10}$
4. $3\sqrt{63}-2\sqrt{28}$
5. $\sqrt{24}-2\sqrt{54}-\sqrt{12}$
6. $2\sqrt{8}-7\sqrt{18}+5\sqrt{72}-\sqrt{50}$
7. $\sqrt{12}+2\sqrt{27}+3\sqrt{75}-9\sqrt{48}$
8. $-\sqrt{80}-3\sqrt{45}+2\sqrt{5}-5\sqrt{20}$
9. $\sqrt{20}-4\sqrt{245}+3\sqrt{125}-\sqrt{270}$
10. $\sqrt{54}-\sqrt{96}-\sqrt{28}+2\sqrt{63}$
11. $8\sqrt{\frac{3}{4}}-\frac{1}{2}\sqrt{12}+4\sqrt{27}-2\sqrt{\frac{3}{16}}$
12. $\sqrt{\frac{20}{9}}-\sqrt{\frac{125}{81}}+\frac{\sqrt{180}}{3}-\frac{4}{9}\sqrt{5}$

Exercice 2.17.
Effectuer les multiplications suivantes

1) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}$	2) $\sqrt{5}\cdot\sqrt{8}$
3) $\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}$	4) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{27}$
5) $\sqrt{75}\cdot\sqrt{3}$	6) $\sqrt{7}\cdot\sqrt{28}$
7) $\sqrt{8}\cdot\sqrt{22}$	8) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}\cdot\sqrt{10}$
9) $\sqrt{15}\cdot\sqrt{40}\cdot\sqrt{45}\cdot\sqrt{150}$	10) $\sqrt{\frac{4}{7}}\cdot\sqrt{\frac{1}{7}}$
11) $\sqrt{6\sqrt{2}}\cdot\sqrt{3\sqrt{2}}$	12) $\sqrt{250\sqrt{27}}\cdot\sqrt{15\sqrt{27}}$

Exercice 2.18.
Effectuer les multiplications suivantes

1) $\sqrt{3}(\sqrt{12}-\sqrt{3})$	2) $\sqrt{20}(\sqrt{5}-\sqrt{10})$
3) $\sqrt{2}(\sqrt{6}-\sqrt{18}+\sqrt{24})$	4) $(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})$
5) $(3+\sqrt{5})(2-\sqrt{5})$	6) $(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}-3\sqrt{2})$
7) $(\sqrt{3}-1)(1-\sqrt{3})$	8) $(4\sqrt{18}+5)(\sqrt{2}-1)$
9) $(\sqrt{6}-\sqrt{5})(\sqrt{2}-\sqrt{5})$	10) $(3+2\sqrt{6})(6\sqrt{6}-9)$

Exercice 2.19.
Vérifier les égalités
1) $\sqrt{3}+\sqrt{27}=\sqrt{48}$ 2) $\sqrt{2}+\sqrt{8}=\sqrt{18}$

Exercice 2.20.
Déterminer l'intersection et la réunion des intervalles $[a, b[$ et $]c, d]$:

1. lorsque $a<c<b<d$
2. lorsque $c<a<b<d$
3. lorsque $c<a<d<b$.

Exercice 2.21.
Déterminer dans chacun des cas suivants, l'intersection et la réunion des ensembles donnés

1) $]-5;3]$ et $]-2;7]$ 2) $[-6;2]$ et $[2;6[$
3) $]-\infty;4[$ et $[-3;12]$ 4) $[-2;+\infty[$ et $]5;+\infty[$
5) $[\sqrt{(-3)^2};6]$ et $]-2;0]$ 6) $]1.41;6[$ et $[\sqrt{2};\sqrt{37}]$
7) $[-5;-2[$ et $]-2;0]$ 8) $]-\infty;3[$ et $[3;+\infty[$.

Exercice 2.22.
On donne les encadrements de deux nombres réels x et y. Déterminer, dans chacun des cas suivants, un encadrement de : $x+y$, $x-y$, $x \cdot y$ et $\frac{x}{y}$.

1. $3 \leq x \leq 5$ et $2 \leq y \leq 4$
2. $-3 \leq x \leq -2$ et $-5 \leq y \leq -4$
3. $-4 \leq x \leq -3$ et $5 \leq y \leq 6$
4. $\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{4} \leq y \leq -\frac{1}{6}$.

Exercice 2.23.
Encadrer le nombre irrationnel $\sqrt{7}$ par deux nombres rationnels comprenant respectivement 1,2,3,4 ou 5 décimales ($\sqrt{7} \simeq 2.64575131106459$).

Exercice 2.24.
Arrondir au quatrième chiffre décimal chacun des nombres suivants

$$1.58425842\ldots, \sqrt{2}, \frac{2}{3}, \frac{11}{9}, \frac{41}{32}.$$

Exercice 2.25.
On donne un encadrement pour le nombre réel x : $1.5 \leq x \leq 1.6$.
Calculer l'encadrement de x^3. Indiquer l'incertitude absolue et relative sur x^3.

Exercice 2.26.
En mesurant les côtés x et y d'un rectangle (en centimètres) on obtient

$$3.4 \leq x \leq 3.5 \quad \text{et} \quad 6.7 \leq y \leq 6.8.$$

Calculer le périmètre et l'aire du rectangle. Indiquer l'incertitude absolue et relative sur le périmètre et l'aire.

Exercice 2.27.
Un coureur parcourt la distance de 100 mètres en 11.2 secondes. Les incertitudes absolues sur la distance et sur le temps de parcours sont respectivement de 0.2 mètre et 0.1 seconde. Déterminer l'encadrement de la vitesse du coureur ainsi que les incertitudes absolues et relatives de cette valeur.

Chapitre 3

Applications polynômes et fonctions rationnelles

Avant d'aborder ce chapitre, il peut être utile de revoir les notions de fonction et d'application.

3.1 Polynômes

Définition 1

On appelle *monôme* une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de la forme

$$m(x) = cx^n,$$

où c est un nombre réel et s'appelle le *coefficient* et n est un entier positif. Le nombre n est l'*exposant* ou le *degré* du monôme.

Exemple 1

Les applications suivantes sont des monômes

1. $m(x) = 0$ est un monôme de degré 0 et de coefficient 0.
2. $m(x) = 1$ est un monôme de degré 0 et de coefficient 1.
3. $m(x) = x^2$ est un monôme de degré 2 et de coefficient 1.
4. $m(x) = 5x^3$ est un monôme de degré 3 et de coefficient 5.
5. $m(x) = 4x^5 - 9x^5$ est un monôme de degré 5 et de coefficient -5.
6. $m(x) = 2x^3 - x$ n'est pas un monôme. Il ne peut pas être écrit sous la forme d'un seul terme, du type : ax^n.

Une somme de monômes de même degré, est encore un monôme, comme le montre l'exemple ci-dessus.

Définition 2

On dit qu'une application $p(x)$ est un *polynôme* si $p(x)$ a la forme

$$p(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_nx^n,$$

où $c_0, c_1, \ldots, c_n$ sont des nombres réels et n un nombre entier positif. Le monôme de plus haut degré,c_nx^n, est le *terme dominant* du polynôme. L'exposant du terme dominant est le *degré* du polynôme.

Remarque 1

Un polynôme est une somme de monômes. On appelle *termes* les monômes d'un polynôme.

Remarque 2

Si un polynôme possède deux termes, on l'appelle *binôme* et *trinôme* s'il en possède trois.

Exemple 2

Voici quelques exemples de polynômes

1. $p(x) = 1 - x$ est un binôme de degré 1.
2. $p(x) = 5x^3 - 34x^{12}$ est un binôme de degré 12. Son terme dominant est $-34x^{12}$.
3. $p(x) = 3x^2 - 2x + 1$ est un trinôme de degré 2. Son terme dominant est $3x^2$.
4. $p(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5$ est un polynôme de degré 5. Il contient 6 termes et son terme dominant est $-x^5$.

Soit p un polynôme. Si a est un nombre réel, l'expression $p(a)$ représente la *valeur* du polynôme en a. Pour tout nombre réel x, $p(x)$ est un nombre réel.

Comme avec tout nombre réel, nous pouvons effectuer des opérations sur $p(x)$. En particulier, nous pouvons le multiplier par un nombre λ. Nous pouvons également le multiplier par un nombre $q(x)$ qui est différent à chaque fois que le nombre x est différent. Nous pouvons l'additionner par un tel $q(x)$ etc.

À chacune de ces opérations correspond une opération sur les fonctions polynômes. Toutes ces opérations ne présentent aucune difficulté. Nous allons directement passer à certaines identités qui sont très utiles dans la pratique.

3.2 Identités remarquables

Nous rassemblons dans cette section un ensemble d'identités que l'on rencontre fréquemment dans les problèmes.

1. $(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a(a+b) + b(a+b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
2. $(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a(a-b) - b(a-b) = a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$.
3. $(a-b)(a+b) = a(a+b) - b(a+b) = a^2 + ab - ba - b^2 = a^2 - b^2$.

On montre de même l'ensemble des identités remarquables du tableau 3.1, dont l'établissement est laissé en exercice.

Montrons que l'expression $a^2 + ab + b^2$ qui apparaît dans la factorisation de $a^3 - b^3$ ne peut pas se factoriser

$$a^2 + ab + b^2 = \left(a + \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{b^2}{4} + b^2 = \left(a + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}b^2.$$

Ainsi, on peut écrire $a^2 + ab + b^2$ comme la somme de deux carrés. Or, cette dernière expression ne peut pas se factoriser dans $\mathbb{R}$. Ce dernier résultat découle du théorème suivant

Théorème 3.1 (critère de la racine)

Un polynôme $p(x)$, de degré n, s'annule en $x = a$ si, et seulement si, il peut se factoriser par $(x - a)$

$$p(a) = 0 \Longleftrightarrow p(x) = (x-a)q(x)$$

où $q(x)$ est le quotient de $p(x)$ par $(x - a)$ et est un polynôme de degré $n - 1$.

Preuve.

La réciproque est triviale, montrons l'implication directe. Supposons $p(a) = 0$. On peut alors écrire, en utilisant l'identité remarquable de $x^n - a^n$ qui est la clé de voûte de ce théorème

$$x^n - a^n = (x-a)(x^{n-1} + x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 + \cdots + x^2a^{n-3} + xa^{n-2} + a^{n-1}.$$

Soit $p(x)$ un polynôme de degré n

$$p(x) = c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + c_{n-2}x^{n-2} + \cdots + c_3x^3 + c_2x^2 + c_1x + c_0$$

qui s'annule lorsque $x = a$

$$p(a) = c_n a^n + c_{n-1}a^{n-1} + c_{n-2}a^{n-2} + \cdots + c_3a^3 + c_2a^2 + c_1a + c_0 = 0.$$

On a

$$\begin{aligned}
p(x) &= p(x) - p(a) \\
&= (c_nx^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_1x + c_0) - (c_na^n + c_{n-1}a^{n-1} + \cdots + c_1a + c_0) \\
&= c_n(x^n - a^n) + c_{n-1}(x^{n-1} - a^{n-1}) + \cdots + c_1(x-a) \\
&= c_n(x-a)(x^{n-1} + x^{n-2}a + \cdots + xa^{n-2} + a^{n-1}) \\
&\qquad + c_{n-1}(x-a)(x^{n-2} + \cdots + a^{n-2}) + \cdots + c_1(x-a) \\
&= (x-a)[c_n(x^{n-1} + x^{n-2}a + \cdots + xa^{n-2} + a^{n-1}) + c_{n-1}(x^{n-2} + \cdots + a^{n-2}) + \\
&\qquad \cdots + c_1] \\
&= (x-a)q(x),
\end{aligned}$$

où $q(x) = c_n(x^{n-1} + x^{n-2}a + \cdots + xa^{n-2} + a^{n-1}) + \cdots + c_1$ est un polynôme de degré $n-1$.

□

Exemple 3

Soit $p(x) = x^2 - x - 6$.

Pour factoriser ce trinôme, on peut utiliser le théorème ci-dessus. La première étape consiste à trouver des valeurs de x qui annulent $p(x)$. Après quelques essais au hasard, on voit que si $x = 3$, alors $p(3) = 0$.

Par le théorème, on peut écrire

$$p(x) = (x-3)q(x)$$

où $q(x)$ est le quotient de p par $x - 3$. On trouve $q(x)$ en raisonnant pour obtenir $p(x)$. En premier lieu, p est de degré 2 et commence par x^2 qui a un coefficient 1, ainsi $q(x)$ commence forcément par un terme en x, qui donne $x^2 - 3x$ lorsqu'il est multiplié par $(x-3)$. Ainsi

$$q(x) = x + c$$

Ensuite, il faut que le terme constant c soit tel que le produit de -3 et de c restitue le terme constant -6 de $p(x)$. C'est clairement le nombre $+2$. On a ainsi obtenu

$$q(x) = x + 2.$$

On trouve finalement

$$p(x) = (x-3)(x+2),$$

comme on peut le vérifier en effectuant le produit.

On peut également vérifier que si $x = -2$, on a $p(-2) = 0$. Dans ce cas particulier, on a pu trouver q en appliquant de nouveau le théorème, et remarquant que $x - (-2) = x + 2$.

Il est maintenant clair que l'expression $a^2 + b^2$ ne peut pas se factoriser, car pour une valeur non nulle de a donnée, il n'existe pas de valeur de b réelle, telle que

$$a^2 + b^2 = 0.$$

En effet, cela entraînerait

$$b^2 = -a^2.$$

Or, on a vu que tout carré d'un nombre réel non nul est strictement positif. Ainsi, il n'existe pas de nombre réel b dont le carré vaut $-a^2$, un nombre strictement négatif. Le théorème précédent affirme alors que l'on ne peut pas factoriser $a^2 + b^2$, comme annoncé.

On peut appliquer cette méthode pour montrer qu'un trinôme du second degré n'est pas factorisable, comme nous l'avons fait plus haut pour $a^2 + ab + b^2$ en formant un carré parfait avec un des carrés (a^2) et le double produit (ab). Si la forme du carré parfait corrigé est la somme de deux carrés, l'expression ne peut pas être factorisée. Si la forme est celle de la différence de deux carrés, alors on peut factoriser l'expression en utilisant l'identité remarquable associée.

Dans le cas ci-dessus, on a trouvé

$$a^2 + ab + b^2 = \left(a + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3b^2}{4}$$

qui est une somme de deux carrés et n'est donc pas factorisable.

Exercice 3.1.
Montrer que le trinôme $x^2 - x + 1$ n'est pas factorisable en l'écrivant sous la forme d'une somme de deux carrés.

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$
$(a+b-c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc$
$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$
$a^2 + b^2$ n'est pas factorisable dans $\mathbb{R}$
$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
$(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$
$(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$
$a^2 + ab + b^2$ n'est pas factorisable dans $\mathbb{R}$
$a^2 - ab + b^2$ n'est pas factorisable dans $\mathbb{R}$
$(a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}) = a^n - b^n$
si n impair $(a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \cdots - ab^{n-2} + b^{n-1}) = a^n + b^n$

TABLE 3.1 – Identités remarquables

3.3 Fonctions rationnelles

Soient $P(x)$ et $Q(x)$ deux polynômes en x. Lorsque x prend une valeur bien définie, $P(x)$ et $Q(x)$ prennent également une valeur bien définie. On peut alors effectuer les opérations usuelles sur les valeurs de P et Q. On définit ainsi, *point à point*, les fonctions

$$P + Q, \quad P - Q, \quad P \cdot Q, \quad \frac{P}{Q}.$$

Par exemple, définir la somme des fonctions P et Q point à point, signifie

$$(P + Q)(x) = P(x) + Q(x).$$

Cela signifie que la valeur de la fonction $P + Q$ en x est définie comme étant donnée par la somme de la valeur de P en x par la valeur de Q en x.

On définit de même les autres opérations entre fonction

$$(P - Q)(x) = P(x) - Q(x), \quad (P \cdot Q)(x) = P(x) \cdot Q(x), \quad \frac{P}{Q}(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}.$$

Dans chaque cas, les opérations à gauche du signe égal représentent les opérations entre fonctions, tandis qu'à droite du signe d'égalité, elles représentent les opérations ordinaires sur les nombres.

En ce qui concerne la division entre deux applications, par exemple entre deux applications polynômes, le résultat n'est pas forcément une application, à cause du dénominateur qui ne doit pas prendre de valeur nulle. Ainsi, en général, le quotient de deux polynôme est une fonction.

Définition 3

On dit que f est une *fonction rationnelle*, s'il existe deux polynômes $P(x)$ et $Q(x)$ tels que

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

Exemple 4

Les fonctions suivantes sont des fonctions rationnelles

1. $$f(x) = \frac{3x^2 - 2x}{2}.$$

   C'est également un polynôme.

2. $$f(x) = \frac{1}{x}$$

3. $$f(x) = \frac{2 - x}{x - 4}$$

4. $$f(x) = \frac{2x^2 - 6x + 4}{x^2 - 4x + 4}$$

Ces derniers exemples ne sont pas des polynômes.

3.4 Division des polynômes

La division des polynômes se fait de la même manière que la division des nombres, à ceci près que l'on procède par élimination des puissances les plus grandes de x, plutôt que par les plus grands multiples du numérateur. Illustrons la procédure par quelques exemples.

D'abord, la division avec reste de deux entiers

$$\begin{array}{r|l} 58 & 7 \\ \cline{2-2} -56 & 8 \\ \hline 2 & \end{array}$$

$$\frac{58}{7} = 8 + \frac{2}{7}$$

qui signifie également

$$58 = 7 \cdot 8 + 2.$$

Le nombre 8 est le *quotient* de la division et le nombre 2 le *reste*. Prenant appui sur ces considérations, on peut effectuer exactement les mêmes opérations sur des polynômes et diviser un polynôme par un autre. On ordonne les polynômes en puissances décroissantes de x et on procède par élimination successive des puissances les plus grandes aux puissances les plus faibles de x.

Exemple 5

Divisons $n(x) = 3x^4 - 3x^2 + x - 5$ par $d(x) = x + 1$. Autrement dit, calculons

$$q(x) = \frac{n(x)}{d(x)} = \frac{3x^4 - 3x^2 + x - 5}{x + 1}.$$

Pour la première étape, il faut multiplier $x + 1$ par $3x^3$ pour obtenir $3x^4$.

$$\begin{array}{ll|l}
3x^4 & -3x^2+x-5 & x+1 \\ \cline{3-3}
-(3x^4+3x^3) & & \\ \cline{1-1}
0x^4-3x^3 & & 3x^3
\end{array}$$

On effectue la soustraction et on abaisse le terme suivant

$$\begin{array}{rl|l}
3x^4 & -3x^2+x-5 & x+1 \\ \cline{3-3}
-(3x^4+3x^3) & & \\ \cline{1-1}
-3x^3-3x^2 & & 3x^3-3x^2 \\
-(-3x^3-3x^2) & & \\ \cline{1-1}
 & 0x^2+x-5 &
\end{array}$$

On termine en abaissant les derniers termes

$$\begin{array}{rl|l}
3x^4 & -3x^2+x-5 & x+1 \\ \cline{3-3}
-(3x^4+3x^3) & & \\ \cline{1-1}
-3x^3-3x^2 & & 3x^3-3x^2+1 \\
-(-3x^3-3x^2) & & \\ \cline{1-1}
 & 0x^2+x-5 & \\
 & -(x+1) & \\ \cline{2-2}
 & +0x-6 &
\end{array}$$

Ainsi le quotient est $3x^3 - 3x^2 + 1$ et le reste est -6. On a alors

$$q(x) = \frac{3x^4 - 3x^2 + x - 5}{x + 1} = 3x^3 - 3x^2 + 1 - \frac{6}{x + 1}$$

ou encore

$$3x^4 - 3x^2 + x - 5 = (x + 1)(3x^3 - 3x^2 + 1) - 6$$

Il découle du théorème de l'algorithme de division des polynômes qu'une telle division peut toujours se faire avec éventuellement un reste r de degré inférieur au diviseur. Dans le cas d'une division par $x - a$, un diviseur du premier degré le reste, s'il existe, sera une constante. On a alors le résultat suivant

Théorème 3.2

Si l'on divise un polynôme $p(x)$ par un binôme $x - a$, alors le reste de la division sera obtenu en remplaçant x par a dans le polynôme

$$p(a) = r.$$

Preuve.

En effet, si le reste est r, alors on peut écrire

$$p(x) = (x - a)q(x) + r.$$

Or, en $x = a$, le premier terme s'annule et donne le résultat cité.

□

Exemple 6

Dans la dernière division donnée, on divise

$$p(x) = 3x^4 - 3x^2 + x - 5$$

par $x + 1$. On a trouvé comme reste -6.

Si l'on remplace $x = -1$ dans l'expression de $p(x)$ on trouve

$$p(-1) = -6,$$

en accord avec le corollaire.

On obtient ainsi une preuve plus simple du critère de la racine 3.1

Théorème 3.3

Soit $p(x)$ un polynôme de degré n. Si le polynôme est divisible sans reste, par $x - a$, si et seulement si il s'annule pour $x = a$

$$p(x) = (x - a)q(x) \;\Leftrightarrow\; p(a) = 0.$$

Preuve.

Ce résultat découle directement du théorème précédent. En effet, si le polynôme est divisible par $x - a$ on peut alors écrire, avec $q(x)$ le quotient

$$p(x) = (x - a)q(x)$$

Il est alors évident qu'en remplaçant x par a, le polynôme s'annule.
De même si le polynôme s'annule pour $x = a$, et qu'il n'est pas divisible par $x - a$, c'est qu'il existe un reste r tel que

$$p(x) = (x - a)q(x) + r$$

Mais dans ce cas, en remplaçant x par a, on voit que le polynôme ne s'annule pas, ce qui contredit notre première supposition. Aussi un tel reste doit obligatoirement être nul.

□

Remarque 3

Lors de l'application de la méthode de la racine pour factoriser un polynôme, il convient d'essayer, pour la valeur de a, les diviseurs du terme constant du polynôme. En effet, si a est une racine possible, alors

$$p(x) = a_n x^n + \cdots + \mathbf{a_0} = (x - \mathbf{a})(b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + \mathbf{b_0}) = b_{n-1}x^n + \cdots + \mathbf{ab_0}$$

Ainsi le terme constant a_0 du polynôme de départ s'écrit $a_0 = ab_b$ et est donc un multiple de a.

Remarque 4

Lors de l'application de la méthode de la racine, pour éviter des divisions inutiles, il convient de tester tous les diviseurs du terme constant du polynôme afin de sortir tous les facteurs possibles de la forme $(x - a)$.

Si l'on parvient à sortir autant de facteurs que le degré du polynôme, alors le polynôme est complètement factorisé et on peut arrêter le processus. Sinon, on recueille les facteurs obtenus, on les multiplient pour obtenir un polynôme $d(x)$ et on calcule le quotient restant $q(x) = p(x)/d(x)$. On peut alors recommencer la méthode de la racine sur $q(x)$, car certains facteurs peuvent être présents plusieurs fois.

Remarque 5

Lors de l'application de la méthode de la racine pour factoriser un polynôme de degré n, si l'on parvient à trouver $n - 1$ facteurs, le dernier peut facilement être deviné (cf. exemple).

Exemple 7

Soit à factoriser le polynôme

$$p(x) = 2x^7 + 5x^6 - 20x^5 - 58x^4 + 22x^3 + 113x^2 - 4x - 60$$

On applique la méthode de la racine avec les diviseurs de 60 :

$$+1, -1, +2, -2, +3, -3, +4, -4, +5, -5, +6, -6, +10, -10,$$
$$+12, -12, +15, -15, +20, -20, +30, -30, +60, -60$$

On vérifie sans peine que

$$p(1) = p(-1) = p(-2) = p(3) = 0$$

Ainsi

$$p(x) = (x-1)(x+1)(x+2)(x-3)q(x)$$

où $q(x)$ est le quotient de $p(x)$ par

$$(x-1)(x+1)(x+2)(x-3) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$$

On obtient ainsi, en effectuant la division euclidienne

$$q(x) = 2x^3 + 7x^2 + x - 10$$

On reprend la méthode de la racine sur $q(x)$, avec les diviseurs de 10

$$+1, -1, +2, -2, +5, -5, +10, -10$$

et on voit que

$$q(1) = q(-2) = 0$$

ainsi

$$q(x) = (x-1)(x+2)(\dots)$$

où le dernier facteur est nécessaire, car q est de degré 3 et nous n'avons trouvé que deux facteurs qui font ensemble un degré 2. Remarquons que ce deux derniers facteurs que nous avons trouvé pour q avaient également été trouvés pour p. Ce sont deux nouveaux facteurs qu'il faudra ajouter à ceux précédemment trouvés.

Ce dernier facteur est facile à trouver, car il fait que le premier terme de q soit $2x^3$ et le dernier terme 10. Or en développant les deux facteurs trouvés on a

$$(x-1)(x+2) = x^2 + x - 2$$

ainsi il nous faut un facteur tel que

$$q(x) = 2x^3 + 7x^2 + x - 10 = (x^2 + x - 2)(\dots)$$

En comparant le terme de plus haut degré et le terme constant, on devine que l'on doit forcément avoir

$$\dots = 2x + 5$$

Nous avons maintenant trouvé autant de facteur que le degré 7 du polynôme p, on peut ainsi conclure

$$p(x) = (x-1)^2(x+1)(x+2)^2(x-3)(2x+5).$$

3.4.1 Méthode de Horner pour la division par $x - a$

En observant les termes successifs de la division des polynômes par un binôme, on constate une régularité que l'on peut utiliser pour simplifier cette division.

Soit à diviser le polynôme

$$p(x) = 3x^3 - 7x^2 + x - 8$$

par le binôme $x - a$ qui dans notre cas sera $x - 2$. On s'attend à trouver un reste $r = p(2) = -10$.

La méthode de Horner consiste à faire un tableau dans lequel on place les coefficients de p sur la première ligne en isolant le terme constant. La deuxième ligné est utilisée pour les calculs et la dernière ligne contient le terme $a = 2$ de $x - 2$ et le résultat du quotient. La case de droite recevra le reste de la division.

	3	-7	1	-8
2				

Pour la première étape, on abaisse simplement le coefficient dominant de p dans la dernière ligne

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 3 & -7 & 1 & -8 \\ \hline & & & & \\ \hline 2 & 3 & & & \end{array}$$

Puis on multiplie 3 par $a = 2$ que l'on place en dessous du deuxième coefficient de p

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 3 & -7 & 1 & -8 \\ \hline & & 6 & & \\ \hline 2 & 3 & & & \end{array}$$

On additione alors les nombres de la colonne

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 3 & -7 & 1 & -8 \\ \hline & & 6 & & \\ \hline 2 & 3 & -1 & & \end{array}$$

et on recommence

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 3 & -7 & 1 & -8 \\ \hline & & 6 & -2 & \\ \hline 2 & 3 & -1 & & \end{array}$$

jusqu'à remplir la dernière case à droite

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 3 & -7 & 1 & -8 \\ \hline & & 6 & -2 & -2 \\ \hline 2 & 3 & -1 & -1 & -10 \end{array}$$

La dernière ligne après $a = 2$ contient les coefficients du quotient

$$q(x) = 3x^2 - x - 1$$

et le reste $r = -10$. On peut ainsi conclure

$$\frac{p(x)}{x-2} = \frac{3x^3 - 7x^2 + x - 8}{x-2} = 3x^2 - x - 1 - \frac{10}{x-2}$$

3.5 Factorisation

3.5.1 Méthode des racines

Grâce au théorème de factorisation des polynômes, on peut chercher à factoriser un polynôme en trouvant les valeurs de x qui annulent le polynôme. On appelle ces valeurs particulières de x des *racines* ou encore des *zéros* du polynôme.

Exemple 8

Soit $p(x) = x^2 - 3x + 2$.

Ce polynôme s'annule pour $x = 2$, en effet

$$p(2) = (2)^2 - 3 \cdot 2 + 2 = 4 - 6 + 2 = 0.$$

On peut alors l'écrire sous la forme

$$p(x) = (x-2)q(x),$$

où $q(x)$ est un polynôme de degré 1 et de coefficient 1, soit $q(x) = x - b$. On trouve b en disant que

$$p(x) = (x-2)q(x) = (x-2)(x-b) = x^2 + 4bx + 2b = x^2 - 3x + 2.$$

Ainsi, on voit que seule la valeur $b = 1$ convient et on a

$$p(x) = (x-2)(x-1).$$

3.5.2 Méthode par factorisation et regroupement

Une autre méthode de factorisation des polynômes consiste à mettre en évidence certains facteurs communs dans les termes et de regrouper les termes semblables.

Exemple 9

Soit le polynôme $p(x) = x^5 - 3x^4 + 2x^3$. On a

$$\begin{aligned} p(x) &= x^5 - 3x^4 + 2x^3 \\ &= x^3(x^2 - 3x + 2) \\ &= x^3(x^2 - 2x - x + 2) \\ &= x^3(x(x-2) - (x-2)) \\ &= x^3(x-2)(x-1). \end{aligned}$$

Après factorisation par x^3 on a opéré une séparation du terme $-3x$ en $-2x - x$ ce qui permet d'extraire un facteur commun $x - 2$.

3.5.3 Trinôme du 2^e^ degré : somme et produit

Supposons que l'on veuille factoriser un trinôme du second degré

$$p(x) = x^2 + bx + c.$$

sous la forme

$$p(x) = (x+m)(x+n).$$

Il nous faut trouver les termes m et n. Nous allons maintenant déterminer une stratégie qui permet de trouver ces termes dans des cas simples.

Supposons le problème résolu. Nous avons alors

$$\begin{aligned} x^2 + bx + c &= (x+m)(x+n) \\ &= x^2 + mx + nx + mn \\ &= x^2 + (m+n)x + mn. \end{aligned}$$

Comme on veut que l'égalité soit toujours vraie, quelle que soit la valeur de x, on doit avoir les égalités suivantes

$$\begin{cases} m+n &= b \\ nm &= c. \end{cases}$$

Il découle de cette dernière relation que si l'on trouve deux nombres m et n dont la somme est égale au facteur de x et dont le produit est égal au terme constant, alors on peut factoriser le trinôme. L'exemple suivant illustre cette méthode.

Notons toutefois que cette méthode n'est applicable que si le coefficient de x^2 est 1.

Exemple 10

Nous désirons factoriser le trinôme

$$p(x) = x^2 - 2x - 35.$$

Il s'agit maintenant de trouver deux nombres m et n tels que

$$\begin{cases} m+n &= -2 \\ mn &= -35. \end{cases}$$

Nous commençons par décomposer le terme constant en facteurs premiers en ignorant le signe $-$. Ici c'est assez simple, on a

$$1 \text{ et } 35, \qquad \text{ou} \qquad 5 \text{ et } 7.$$

Parmi ces deux cas, seuls le deuxième a deux facteurs qui diffèrent de 2. Ainsi le bon choix est

$$\begin{cases} m &= -7 \\ n &= 5 \end{cases}$$

et la forme factorisée s'écrit

$$p(x) = (x-7)(x+5).$$

Pour vérifier que l'on a bien le bon choix, il suffit d'effectuer le produit et voir si l'on retrouve bien le trinôme de départ.

3.5.4 Trinôme du 2e degré : cas général

Que faire si le coefficient de x^2 est différent de 1.
Supposons que l'on veuille factoriser l'expression

$$p(x) = ax^2 + bx + c$$

sous la forme

$$p(x) = (mx+n)(m'x+n').$$

Il s'agit de trouver une stratégie pour obtenir les facteurs m, m', n et n'.
Comme dans le cas précédent, effectuons le produit de la forme factorisée

$$\begin{aligned}(mx+n)(m'x+n') &= mm'x^2 + mn'x + m'nx + nn' \\ &= mm'x^2 + (mn' + m'n)x + nn'.\end{aligned}$$

En identifiant le polynôme de départ avec cette dernière expression, on a

$$ax^2 + bx + c = mm'x^2 + (mn' + m'n)x + nn'$$

d'où

$$\begin{cases} mm' &= a \\ mn' + m'n &= b \\ nn' &= c. \end{cases}$$

En multipliant la première égalité avec la dernière on trouve

$$\begin{cases} mn' + m'n &= b \\ mm'nn' &= ac. \end{cases}$$

Posons $q = mn'$ et $r = m'n$. On a alors

$$\begin{cases} q + r &= b \\ qr &= ac. \end{cases}$$

La stratégie de résolution consiste alors à trouver deux nombres q et r qui vérifient ce système d'égalités. De cette façon on a

$$p(x) = ax^2 + bx + c = ax^2 + qx + rx + c.$$

En d'autres termes, on a pu séparer le terme bx en une somme de deux termes $qx + rx$.
Par construction, a et q sont divisibles par m. De même, r et c sont divisibles par n. On peut alors procéder par regroupement

$$p(x) = (ax^2 + qx) + (rx + c).$$

et terminer en factorisant m de la première parenthèse et n de la deuxième.
Illustrons la méthode sur un exemple.

Exemple 11

Soit à factoriser le polynôme

$$p(x) = 6x^2 - 13x - 5.$$

Il faut commencer par déterminer q et r tels que

$$\begin{cases} q + r &= -13 \\ qr &= -30 \qquad (= 6 \cdot (-5)). \end{cases}$$

On trouve

$$\begin{cases} q &= -15 \\ r &= 2. \end{cases}$$

On peut alors écrire le polynôme sous la forme

$$p(x) = 6x^2 - 15x + 2x - 5.$$

En regroupant et en factorisant on obtient successivement

$$\begin{aligned} p(x) &= (6x^2 - 15x) + 2x - 5 \\ &= 3x(2x - 5) + 2x - 5 \\ &= (3x + 1)(2x - 5). \end{aligned}$$

On a ainsi pu factoriser le trinôme donné.

3.5.5 Stratégies de factorisation

En définitive, pour factoriser un polynôme, il convient de tenter les méthodes suivantes

1. Mise en évidence.
2. Utiliser la méthode des regroupements.
3. Utiliser les identités remarquables.
4. Essayer la somme et le produit pour les trinômes de coefficient dominant égal à 1.
5. Essayer la méthode du trinôme général pour les trinômes de coefficient dominant différent de 1.
6. Utiliser le théorème 3.1 et la division des polynômes.

Il est fréquent de devoir utiliser une combinaison de ces méthodes pour venir à bout de certains problèmes.

3.6 Exercices

3.6.1 Polynômes

Exercice 3.2.
Calculer la valeur numérique des polynômes suivants

1. $x(y + z)$ pour $x = 2$, $y = -1$ et $z = -1$
2. $xy + xz$ pour $x = 2$, $y = -1$ et $z = -1$
3. $x + y^2$ pour $x = 3$ et $y = -5$
4. $(x + y)^2$ pour $x = 5$ et $y = -5$
5. $x^2 + y$ pour $x = \sqrt{2}$ et $y = -3$
6. $x^2 - x - 6$ pour $x = -2$
7. $x^2 - 5x + 6$ pour $x = 3$ et pour $x = 2$
8. $-x^2 + 3x - 1$ pour $x = -2$
9. $-3x^3 + x - 1$ pour $x = -1$
10. $-x^2y^2 + 3xy - y^2$ pour $x = 2$ et $y = -1$
11. $x^3 - y^3$ pour $x = -2$ et $y = -1$
12. $x^3 + y^3$ pour $x = -\frac{1}{2}$ et $y = \frac{1}{3}$

Exercice 3.3.
Effectuer les additions ou les soustractions suivantes, indiquer le degré du polynôme obtenu et ordonner le polynôme

1. $(x^4 - x^3 + 2) + (x^2 - 2x + 5)$
2. $(x^2 - 5x - 3) + (2x^2 - 3x + 1)$
3. $(-2x^5 + 3x^2 - 1) + (-x^5 - 3x^3 + x^2 - 5)$
4. $(\frac{1}{8}x^2 - 2x + 3) + (-\frac{5}{8}x^2 - 3)$
5. $(-3x^4y^2 + 2xy^2 - xy + y^2) + (4xy^2 + 2x^2 - y^2)$

6. $(2x^3 - 3x^2 + 2) + (-5x^3 + x - 1) + (-2x - 3)$
7. $(3x^2y^2 - 4xy + y^2) + (2x^2y^2 + 5xy^2 + 4xy + 1) + (-5x^2y^2 - y^2 - 5xy^2 - 1)$
8. $(2x^4 - x^3 + 1) - (3x^4 - x^3 - 2)$
9. $-(3x^2 + 2x - 1) - (-3x^2 + 2x + 1)$
10. $(\frac{2}{5}x^3 - 5) - (\frac{3}{5}x^3 - 2x^2 - 1)$
11. $(5x^3y^3 - 2x^2y - x^2 - y^2) - (-2x^2y + xy - 2x^2 + 5)$
12. $(2x^2y^2 - 3xy - 4) - (2x^2y^2 + 3xy - 5)$

Exercice 3.4.
Effectuer les multiplications suivantes et ordonner le polynôme obtenu

1) $xy(-2x^3y^2)$	2) $(-5x^2y)(-\frac{2}{5}xy)$
3) $(3xy^3z^2)(2x^2yz^3)(-xy)$	4) $(3x^{2n-1}y)(5x^{n+1}y^2)$
5) $6x(x-3)$	6) $-4x^2y(2x-y)$
7) $-2ax^2y(-3x^2y+4ay)$	8) $(x^2+2xy+y^2)x^2y$
9) $-\frac{2}{3}xy^2(\frac{3}{2}x^2+\frac{2}{5}y^2)$	10) $6x^ny^{2m}(x^{3n-1}+y^m)$
11) $(x-1)(x+2)$	12) $(2x-3)(x-5)$
13) $(x-y)(3x-4y)$	14) $(x+1)(2x+1)(x-3)$
15) $(2x-5)(x^2+5x+6)$	16) $(x-y+z)(xy+yz+xz)$
17) $(x-y)(x^3+x^2y+xy^2+y^3)$	18) $4x(x+y)-2x(x-y)$
19) $(x+y)(3x-y)-(x-y)(3x+y)$	20) $(3x-1)(1-4x)-(4x-3)(x-2)$

21) $(x-y+z)(x+y)-(x+y-z)(y+z)-(-2y^2-x+z)y$
22) $x(x^2+(n-1)x+1)+(x^2-(n-1)x+1)x$

Exercice 3.5.
Écrire immédiatement les produits suivants

1) $(x+3)(x+5)$	11) $(x^2+4)(x^2-1)$	21) $(2x-1)(x-3)$
2) $(x+5)(x-2)$	12) $(x^2-3)(x^2+5)$	22) $(3x-2)(2x-1)$
3) $(x-3)(x+2)$	13) $(x^2-8)(x^2-3)$	23) $(4x+3)(7x-2)$
4) $(x-4)(x-5)$	14) $(a^2-b)(a^2+2b)$	24) $(2x^2-3)(x^2-1)$
5) $(a+3)(a+2)$	15) $(x^2+a)(x^2+3a)$	25) $(2x^2+3)(x^2+2)$
6) $(a-4)(a+5)$	16) $(x^2-2a)(x^2-4a)$	26) $(x^2+x+2)(x+1)$
7) $(x+a)(x-b)$	17) $(a-2x)(a+x)$	27) $(x^2-x+3)(x-2)$
8) $(x-a)(x-b)$	18) $(a-3x)(a-x)$	28) $(x^3+x^2-x+2)(x+3)$
9) $(x-2a)(x+3a)$	19) $(2x+1)(x-5)$	29) $(x^2+3x+1)(x^2-1)$
10) $(x-3a)(x-5a)$	20) $(3x+2)(x+1)$	30) $(x^2+x-3)(x^2-x+1)$

Exercice 3.6.
Former le carré et le cube des binômes suivants

1) $x+y$	2) $x-a$	3) $2a+b$
4) $ax-by$	5) $1-4abc$	6) x^2-3b^2
7) $2ab^2c^3-5$	8) $-0.3a^2+0.2b^2$	9) a^m+b^n
10) $2a^{3m}-3b^{2n}$	11) $-ab^{n+1}+a^{m+1}b$	12) $ax^{m-1}-2by^{n+1}$

Exercice 3.7.
Écrire immédiatement les produits suivants

1) $(a+3)(a-3)$	8) $(a+b-c)(a+b+c)$
2) $(x-y)(x+y)$	9) $(a^2+b^2-ab)(a^2+b^2+ab)$
3) $(a^2-b^2)(a^2+b^2)$	10) $(2x-y-3z)(2x+y+3z)$
4) $(-ax+b)(ax+b)$	11) $(x-y)(x+y)(x^2+y^2)$
5) $(-2a-4b)(2a-4b)$	12) $(a^2-4a+4)(2-a)$
6) $(2xy^2+c^2)(2xy^2-c^2)$	13) $(x^2+3)(x^4+9)(x^2-3)$
7) $(3a^2x^3+7b^2y^3)(3a^2x^3-7b^2y^3)$	14) $(a^2+4a+4)(a+2)$

Exercice 3.8.
Effectuer les opérations suivantes et réduire le polynôme obtenu

1. $3(2-x)^2 - 5(x+1)^2$
2. $((x+1)y - (x-1))^2$
3. $(3(x+y) - z)^2 - (3(x+y) + z)^2$
4. $(xy(x-y))^3$

5. $(x+y)^3-(x-y)^3-6x^2y$
6. $(x+2)^3-4(x+1)^3+6x^3-4(x-1)^3+(x-2)^3$
7. $(x^2-xy)^2-(x^2-xy-2y^2)^2+(y(x+2y))^2$
8. $10(x-1)^3-2(3(x-1)^2-5(1-x)^3)$
9. $36(x-2)^4-9((x-1)(x^2+x+1)+4(2-x)^4)+9(x+1)(x^2-x+1)$

Exercice 3.9.
Effectuer les opérations suivantes et réduire le polynôme obtenu

1. $(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$
2. $(x^2+2x-1)(x^2-2x+1)$
3. $(a+2b+c-d)(a-2b+c+d)$
4. $(x^3+x^2+x+1)(x^3-x^2+x-1)$
5. $(a^2+2ab+b^2-c^2)(2ab+b^2+c^2-a^2)-(a^2-2ab+b^2-c^2)(b^2-a^2+c^2-2ab)$
6. $(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)$
7. $(a+2)(a^2-2a+4)-(a-2)(a^2+2a+4)$
8. $(a+b)(a^2+ab+b^2)(a-b)(a^2-ab+b^2)$
9. $(x+y)^3-(x-y)^3-(x^3-y^3)-(x-y)(x^2+xy+y^2)$
10. $(a+b+c)^2-[(a-b-c)^2-(a^2+b^2+c^2)+4a(b+c)]$
11. $(a+b+c+d)^2+(a-b-c+d)^2+(a-b+c-d)^2+(a+b-c-d)^2$
12. $(a+b)^4+(a^4+b^4)-2(a^2+b^2+ab)^2$
13. $a(b+c)(b^2+c^2-a^2)+b(c+a)(c^2+a^2-b^2)+c(a+b)(a^2+b^2-c^2)$
14. $[(x+1)y-(x-1)]^2-[(y+1)x-(y-1)]^2$
15. $[(1+x)^3+(1+x)^2y+(1+x)y^2+y^3]-[3x(x+1)+y(y+1)+2xy+1]$
16. $(8a^3-x^6)(8a^3+x^6)-(4a^2-x^4)[2a(2a+x^2)+x^4][4a^2-x^2(2a-x^2)]$

3.6.2 Factorisation et identités remarquables

Exercice 3.10.
Calculer mentalement

1. $19^2, 21^2, 22^2, 29^2, 41^2, 42^2$
2. $19\cdot 21, 29\cdot 31, 41\cdot 39, 18\cdot 22$

Exercice 3.11.
Calculer les carrés de binômes suivants

1) $(x+5)^2$	2) $(7-x)^2$
3) $(2x+3)^2$	4) $(5x-4)^2$
5) $(-2x-5)^2$	6) $(ax-by)^2$
7) $(2x^2+1)^2$	8) $(x^3+y^2)^2$
9) $(\frac{1}{2}x-\frac{1}{4})^2$	10) $(\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}y)^2$
11) $(x^n+y^n)^2$	12) $(3x^{2n}-y^m)^2$
13) $(3x^{2m}-2y^{3n})^2$	14) $(xy^{n-1}-x^{n-1}y)^2$
15) $(ax^{n+1}y-bxy^{n+1})^2$	

Exercice 3.12.
Compléter chacune des expressions suivantes de manière qu'elle devienne le carré d'un binôme

1) x^2+6x	2) x^2+25	3) $4x^2-20x$
4) x^2-x	5) y^2+4xy	6) $x^{4n}+1$

Exercice 3.13.
Compléter les carrés dont font partie les binômes suivants

1) $4x^2+4x$	2) $4a^2b^2+9$
3) $16a^4-8a^2y^2$	4) $9b^4+16y^6$
5) $9a^6-30a^3b^4$	6) $16a^2b^2+9a^4b^6$
7) $a^{4m}+4a^{2m}y^{3n}$	8) $4b^{4m}+9y^{4n}$
9) $16y^4b^2-16y^2b^2c$	10) $4(x-y)^2+81a^2$
11) $16(2a+b)^2-40(2a+b)$	12) $0.04a^2b^2+0.09a^4c^2$

Exercice 3.14.
Former les carrés des polynômes suivants

1) $a+b+c$	5) $3x^2+4x+3$	9) x^3-5x^2+2x+1
2) $a-b+c$	6) x^2-5x+1	10) $2-x-x^2+3x^2$
3) $a-b-c$	7) x^2-2x-5	11) $a-b+c-d$
4) $a-c+b+d$	8) a^2-b^2+1	12) $2x^{m+1}-3x^m+4x^{m-1}$.

Exercice 3.15.
Utiliser les identités remarquables pour effectuer les opérations suivantes

1) $(x-5)(x+5)$	2) $(4x-7)(4x+7)$
3) $(x^3+y^2)(x^3-y^2)$	4) $(3xy+2)(3xy-2)$
5) $(x^n+y^m)(x^n-y^m)$	6) $(4x^2yz-7)(7+4x^2yz)$
7) $(x+y+3)^2$	8) $(2x-y-z)^2$
9) $(3x+2y-1)^2$	10) $(x+1)^3$
11) $(2-x)^3$	12) $(2x-1)^3$
13) $(2x-3y)^3$	14) $(x^2-y^3)^3$
15) $(3x^{2n}-y^n)^3$	16) $(x^2+y^2)(x^4-x^2y^2+y^4)$
17) $(x-3)(x^2+3x+9)$	18) $(x+2)(x^2-2x+4)$
19) $(x^3-y)(x^6+x^3y+y^2)$	20) $(3(x+y)-z)(3(x+y)+z)$

Exercice 3.16.
Former le terme en x^3 de chacune des expressions suivantes

1) $(x^2-3x+2)(x^2+x)$	4) $(x^2-3xy+2y^2)(5x^2+2xy-7y^2)$
2) $(2x^3-5x^2+2x-4)^2$	5) $(x+y)^2(x-y)^2$
3) $(x^3-2x^2+4x-8)(x+2)$	6) $(x^2-ax)^2-(x^2+ax)^2$

Exercice 3.17.
Pour chacun des polynômes suivants, effectuer la substitution indiquée

1. $p(x)=x^3+3x^2-2x+6$ et $x=y-1$
2. $p(x)=x^3+ax^2+bx+c$ et $x=y-\frac{a}{3}$
3. $p(x)=x^4+4x^3+6x^2+4x+5$ et $x=y-1$

Exercice 3.18.
Soit deux applications f et g définies dans $\mathbb{R}$. Déterminer, dans les cas suivants, les applications composées $f\circ f, f\circ g, g\circ f$ et $g\circ g$.

1. $f\ :\ x\mapsto 3x-1$ et $g\ :\ x\mapsto x^2+1$
2. $f\ :\ x\mapsto x^2-2x+2$ et $g\ :\ x\mapsto 2x-3$
3. $f\ :\ x\mapsto x^2-1$ et $g\ :\ x\mapsto x^2+5x-3$
4. $f\ :\ x\mapsto x^3-2x$ et $g\ :\ x\mapsto 2x+1$

3.6.3 Division des polynômes

Exercice 3.19.
Effectuer les divisions suivantes de polynômes. Écrire le résultat sous les deux formes comme en page 110.

1. $(14x-7):7$
2. $(5x^3-15x^2):(-5x)$
3. $(27x^4+6x^3-9x^2):3x^2$
4. $(2ax-bx):x$
5. $(24a^3x^5-18a^2x^4+6ax^2):3ax$
6. $(-6x^2-5x-8):(2x+1)$
7. $(2x^3-5x^2-4x+8):(x-3)$
8. $(x^3-5x^2-2x+24):(x-4)$
9. $(2x^3+3x^2-23x-12):(2x+1)$
10. $(-6x^2+13x+5):(-2x+5)$
11. $(9x^4-18x^3-5x^2-19x+20):(3x-4)$

12. $(6x^4 + 7x^3 - 9x^2 + 5x - 1) : (3x - 1)$
13. $(2x^5 - x^4 - 2x^3 + 2x^2 + x) : (x^2 - 1)$
14. $(-x^5 + 2x^4 - 7x^2 + 9x + 3) : (x^2 - 3)$
15. $(x^7 - 2x^4 - x^3 + x^2 + x + 1) : (x^4 - 1)$
16. $(8x^6 - 6x^5 - 12x^4 + 9x^3 + 8x^2 - 26x + 15) : (4x - 3)$
17. $(x^5 - 5x^3 - 5x^2 + 4x + 3) : (x^2 - 2x - 1)$
18. $(x^4 - 10x^3 + 23x^2 + 10x + 2) : (x^2 - 5x - 1)$
19. $(x^2 + (a + b)x + ab) : (x + a)$
20. $(x^3 - (a + b + c)x^2 + (ab + bc + ac)x - abc) : (x - a)$
21. $(x^4 - ax^3 + (b - 1)x^2 + ax - b) : (x^2 - 1)$

Exercice 3.20.
Déterminer le nombre réel a de manière que le trinôme ax^2+x-1 soit divisible par le binôme $x+2$ (sans reste).
Même question pour le trinôme $x^2 + ax - 2$ et le binôme $x + 1$.

Exercice 3.21.
Montrer qu'il n'existe pas de nombre réel a tel que le polynôme $x^3 + 2x^2 - ax + 1$ soit divisible par le binôme $x^2 - 1$.
Par quelle valeur faut-il remplacer le terme constant (le terme $+1$ du polynôme) pour qu'une telle valeur de a existe ?

Exercice 3.22.
Pour chacune des fonctions réelles f définies ci-après, déterminer les valeurs entières positives de la variable x dont l'image par f est un entier positif (commencer par modifier l'écriture de $f(x)$ en effectuant la division).

1) $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$ 2) $f(x) = \dfrac{5x-3}{x+2}$

3) $f(x) = \dfrac{4x+16}{x-2}$ 4) $f(x)\dfrac{x^2-2x+84}{x-1}$

5) $f(x) = \dfrac{x^2+11}{x+1}$ 6) $f(x) = \dfrac{x^3-x^2-5x+15}{x-3}$

Exercice 3.23.
Effectuer les divisions suivantes
1. $[3x^2 - (3a + b - 3)x - 3a - b] : (x + 1)$
2. $[2x^2 + x(4a - b) + 2a^2 - ab] : (2x + 2a - b)$
3. $(6a^{4m} - a^{3m} - 82a^{2m} + 81a^m + 36) : (2a^m - 3)$
4. $(4a^{2m+4} + 6a^{2m+3} - a^{2m+2} + 5a^{2m+1} - 2a^{2m}) : (a^{m+1} + 2a^m)$.

Exercice 3.24.
Les divisions suivantes ne se font pas exactement. Dire quel est le degré maximum du reste, puis effectuer la division

1. $(6x^5 + 5x^4 - 25x^3 + 31x^2 - 12x + 5) : (2x^2 - 3x + 2)$
2. $(120x^4 + 154x^3 + 71x^2 + 14x + 8) : (6x^2 + 5x + 1)$
3. $(a^7 - 4a^6 + 2a^5 + a^4 - 3a^2 + 2a - 6) : (a^5 - 3)$
4. $(a^4 - a^3b - a^2b^2 - ab^3 - b^4) : (a - 2b)$
5. $(a^8 - 2a^5 + a^4 + 2a^3 + 1) : (a^6 + a^5 - a^3 + a + 1)$

Exercice 3.25.
Déterminer les coefficients littéraux de manière que les divisions suivantes s'effectuent sans reste ; écrire ensuite le quotient
1. $(x^2 + ax + 12) : (x - 3)$
2. $(x^2 + ax + 15) : (x + 3)$

3. $(x^3 + ax^2 + 19x - 12) : (x - 1)$
4. $(3x^4 - ax^3 + 8x^2 - 2ax - 20) : (x - 2)$
5. $(8x^4 - 3x + a) : (2x - 1)$
6. $(2x^3 + ax^2 + 3x - 1) : (2x + 1)$
7. $(x^3 + ax^2 + bx + 6) : (x - 2)(x - 3)$
8. $(4x^4 + 7x^3 - ax^2 + bx + 24) : (x - 2)(x + 4)$
9. $(x^4 + ax^3 + 3x^2 + 2x + b) : x(x + 1)$
10. $(x^3 - 5x^2 + ax + b) : (x - 1)^2$
11. $(x^3 + ax^2 - 9x + b) : (x + 1)^2$
12. $(x^3 + 4x^2 + ax + b) : (x^2 + x + 1)$
13. $(4x^4 + ax^3 + 7x^2 + bx + 3) : (2x^2 + x + 1)$
14. $(2x^4 - 5x^3 + ax^2 - 2x + 4b) : (2x^2 - x - 1)$

3.6.4 Fonctions rationnelles

Exercice 3.26.
Simplifier les fractions suivantes et les factoriser si possible

1) $\dfrac{9x^2y^3}{3xy}$

2) $\dfrac{-4x^3y}{12xy^4}$

3) $\dfrac{16xy}{24x^2}$

4) $\dfrac{-15x^6y^3z^2}{-3x^2y}$

5) $\dfrac{6x+18}{3}$

6) $\dfrac{7}{14x-21}$

7) $\dfrac{270x^3-30x}{x^2}$

8) $\dfrac{xy}{xz+xy}$

9) $\dfrac{x-x^2}{5x+x}$

10) $\dfrac{3x-3y}{5x-5y}$

11) $\dfrac{ax+ay}{bx+by}$

12) $\dfrac{7x-7y}{8y-8x}$

13) $\dfrac{5xy^3-5x^3y}{x^3y-xy^3}$

14) $\dfrac{x^2y^2-xy^3+x^4y^2}{x^3y^2}$

15) $\dfrac{x^3-x^2}{x^3+x^2}$

16) $\dfrac{18xyz-15xy}{12xyz-10xy}$

17) $\dfrac{x+4}{2x^2-32}$

18) $\dfrac{x^2-y^2}{x+y}$

19) $\dfrac{x^4-y^4}{x^2-y^2}$

20) $\dfrac{x^2-6x+9}{x-3}$

21) $\dfrac{x^3-1}{x^2-1}$

22) $\dfrac{(x+1)^3}{x^3+1}$

23) $\dfrac{x^2-2xy+y^2}{y^2-x^2}$

24) $\dfrac{1-9x^2}{15xy-5y}$

25) $\dfrac{x^2-9}{x^2-2x-15}$

26) $\dfrac{x^2+(a+b)x+ab}{x^2+(b+c)x+bc}$

27) $\dfrac{x^2-6x+8}{16-x^2}$

28) $\dfrac{x^3+6x^2+12x+8}{2x^2-8}$

29) $\dfrac{x^2-y^2-2yz-z^2}{x+y+z}$

30) $\dfrac{x^2-5x+6}{x^3-9x^2+27x-27}$

31) $\dfrac{x^4+2x^2y^2+y^4}{ax^4+bx^4-ay^4-by^4}$

32) $\dfrac{-x^3-x^2+x+1}{-x^5+x^3-x^2+1}$

33) $\dfrac{x^2-6x+8}{x^3-5x^2+2x+8}$

34) $\dfrac{2x^3+5x^2+4x+1}{x^3+3x^2+3x+1}$

Exercice 3.27.
Effectuer les additions ou soustractions suivantes (simplifier le résultat obtenu le cas échéant)

1) $\dfrac{x}{2}-\dfrac{x}{3}+\dfrac{5x}{6}$

2) $\dfrac{3x}{5}-\dfrac{2x}{15}-\dfrac{5x}{4}$

3) $-\dfrac{10x}{14}+\dfrac{8x}{21}+\dfrac{27x}{81}$

4) $\dfrac{ax}{675}-\dfrac{bx}{45}-\dfrac{cx}{9}$

5) $\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{z}$

6) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\dfrac{1}{z}$

7) $\dfrac{x}{5y}-\dfrac{z}{3y}$

8) $\dfrac{x}{y^2}-\dfrac{z}{y}$

9) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}$

10) $\dfrac{3x-2}{7}-\dfrac{2x-3}{6}+\dfrac{x-1}{21}$

11) $\dfrac{-2x-5}{6}-\dfrac{3x-1}{5}+\dfrac{4x-1}{21}$

12) $\dfrac{4x+4}{4}-\dfrac{-15x+12}{18}+\dfrac{-x-2}{6}$

13) $1-\dfrac{x-y}{x+y}$

14) $\dfrac{3}{x+3}-\dfrac{3}{x+6}$

15) $\dfrac{-1}{x-1}+\dfrac{1}{x+3}$

16) $\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{4}{x-2}+\dfrac{3}{x-3}$

17) $\dfrac{x-y}{x+y}-\dfrac{x+y}{x-y}$

18) $\dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{3}{x+1}$

19) $\dfrac{8}{x^2-1}-\dfrac{4}{x+1}-\dfrac{2}{x-1}$

20) $\dfrac{-7}{2x^2-32}+\dfrac{4}{3x+12}+\dfrac{5}{12x-48}$

21) $\dfrac{x+y}{x-y}-\dfrac{2xy+2y^2}{x^2-y^2}$

22) $\dfrac{-1}{3-x}-\dfrac{4}{x^2-9}$

23) $\dfrac{-5}{x^2-3x+2}+\dfrac{8}{x^2+3x+2}-\dfrac{2}{x^2-1}$

24) $\dfrac{-12}{x^2+2x-3}+\dfrac{15}{x^2+x-6}-\dfrac{2}{x^2-3x+2}$

25) $\dfrac{x+11}{x^2+2x-3}-\dfrac{x+5}{x^2+x-2}+\dfrac{x+1}{x^2+5x+6}$

26) $\dfrac{x-18}{x^2-x-12}-\dfrac{x+9}{x^2+8x+15}+\dfrac{x+14}{x^2+x-20}$

27) $\dfrac{x+2}{4x-8}-\dfrac{x^2+2x-1}{6x^2-24}-\dfrac{2}{3x}$

28) $\dfrac{x-1}{x^3+2x^2+2x+1} - \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{x^2+5}{-x^3+1}$

29) $\dfrac{-2x^2+x+3y}{x^4-2x^2y^2+y^4} + \dfrac{x+1}{x^3+x^2y-xy^2-y^3} + \dfrac{x-1}{x^3-x^2y-xy^2+y^3}$

30) $\dfrac{x+y}{z^2-(x+y)z+xy} + \dfrac{x+z}{y^2-xy-yz+xz} + \dfrac{y+z}{x^2-xz-xy+yz}$

Exercice 3.28.
Effectuer les multiplications suivantes

1) $\dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1}{4x}$

2) $-3x^2 \cdot \dfrac{1}{5x}$

3) $\dfrac{4x^2}{7y} \cdot \dfrac{21y^2}{-2x}$

4) $\dfrac{-15x^3}{4y} \cdot \dfrac{2x^4}{3y^2}$

5) $\dfrac{x^2}{5} \cdot \dfrac{26}{x^3} \cdot \dfrac{-x^5}{52}$

6) $\dfrac{x^2}{y^3} \cdot \dfrac{-2x^5}{y^2} \cdot \dfrac{y^5}{-2x^7}$

7) $\dfrac{-195x^4y^2}{7x^2z} \cdot \dfrac{-42xz^2}{y^3}$

8) $\dfrac{x+2}{5(x-2)} \cdot \dfrac{x-1}{6}$

9) $\dfrac{x-1}{y^2} \cdot \dfrac{x+1}{y}$

10) $\dfrac{3x+3y}{4} \cdot \dfrac{8x-8y}{3}$

11) $(x^2-25y^2) \cdot \dfrac{x+5y}{x-5y}$

12) $\dfrac{36}{3-x} \cdot \dfrac{x-3}{63}$

13) $\dfrac{6x^2}{x^2-y^2} \cdot \dfrac{x-y}{2xy}$

14) $\dfrac{x+xy}{y-2xy+x^2y} \cdot \dfrac{x^2-2x+1}{x^2}$

15) $\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+1} \cdot \dfrac{x^2-1}{x+1}$

16) $\dfrac{9x^2-9x-54}{x^2+2x-3} \cdot \dfrac{x^2-1}{3x-9}$

17) $\dfrac{x^2-25}{x^3+3x^2+3x+1} \cdot \dfrac{17x^2-17x-34}{6-6x} \cdot \dfrac{x^2-1}{x^2+3x-10} \cdot \dfrac{x^2+2x+1}{51x-255}$

18) $\dfrac{xy}{4a-4b} \cdot \dfrac{a^3-b^3}{2xy+4y} \cdot \dfrac{4x^2-16}{a^2+ab+b^2}$

19) $(1-x^2) \cdot \left(1 - \dfrac{x-2}{x-1}\right)$

20) $\left(\dfrac{x-1}{x+2} - \dfrac{x-3}{x-1}\right)\left(\dfrac{x+1}{x-1} - \dfrac{x-1}{x+3}\right)$

21) $\left(\dfrac{4}{x-y} + \dfrac{2}{x+y}\right) \cdot \dfrac{x^2-y^2}{3x+y}$

22) $\dfrac{x^4-y^4}{x^2+xy+y^2} \cdot \dfrac{x^4+x^2y^2+y^4}{x^3+y^3} \cdot \dfrac{x+y}{x^2y+y^3}$

23) $\left(\dfrac{x-y}{a-b}\right)^5 \cdot \left(\dfrac{b-a}{y-x}\right)^4$

24) $\left(\dfrac{x-y}{a+b}\right)^{2n} \cdot \left(\dfrac{a+b}{y-x}\right)^{2n+1}$

Exercice 3.29.
Effectuer les divisions suivantes

1) $\dfrac{-1}{2x} : \dfrac{3}{8x}$ 2) $\dfrac{x^2}{27} : \dfrac{-x}{15}$

3) $13 : \dfrac{26}{x}$ 4) $\dfrac{2x^2}{5y^3} : \dfrac{6xz}{y}$

5) $\dfrac{7x+14y}{9} : \dfrac{-7}{3}$ 6) $\dfrac{2x}{y^2-xy} : \dfrac{x}{x-y}$

7) $\dfrac{273x^2-39x}{x^2-xy} : \dfrac{39}{x-y}$ 8) $\dfrac{x^2+6x+8}{14} : \dfrac{x^2+3x-4}{42}$

9) $\dfrac{x^2-y^2}{x} : \dfrac{x-y}{x^3+x^2y}$ 10) $\dfrac{125-x^3}{125+x^3} : \dfrac{x-5}{x+5}$

11) $\dfrac{x^3+y^3}{x^3-y^3} : \dfrac{x+y}{x-y}$ 12) $\dfrac{x^4-1}{y^3-y^2} : \dfrac{x^3+x^2+x+1}{y^2+2y-3}$

13) $\dfrac{(x-y)^2-z^2}{(x+y)^2-z^2} : \dfrac{x-y-z}{x+y-z}$ 14) $\dfrac{x^2-y^2+2yz-z^2}{x^2-y^2-2yz-z^2} : \dfrac{x-y+z}{x-y-z}$

15) $\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{y^2}\right) : \left(\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{x}\right)$ 16) $\left(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{2}{x^3}-\dfrac{3}{x^4}\right) : \left(\dfrac{1}{x^3}-\dfrac{1}{x}\right)$

17) $\left(\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{4}{x^2}\right) : \left(\dfrac{2}{x}+\dfrac{x}{2}\right)$ 18) $\left(\dfrac{x^2}{y^2}+\dfrac{y}{x}\right) : \left(\dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}\right)$

19) $\left(\dfrac{16}{x^2}-1\right) : \left(-\dfrac{x}{4}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{x}\right)$ 20) $(x^2-5x+6) : \left(\dfrac{9}{x^2}-1\right)$

21) $\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8x}\right) : \left(\dfrac{x^3}{2}-\dfrac{1}{16}\right)$ 22) $\left(x^2-2x+4-\dfrac{x^3+7}{x+2}\right) : \dfrac{1}{x+2}$

23) $\left(x^2-xy+y^2-\dfrac{y^3}{x+y}\right) : \dfrac{y^3}{x^2-y^2}$

Exercice 3.30.
Simplifier les fractions composées suivantes

1) $\dfrac{\frac{5}{8}}{15}$ 2) $\dfrac{5}{\frac{8}{15}}$ 3) $\dfrac{\frac{4}{7}}{\frac{8}{21}}$ 4) $\dfrac{\frac{3}{16}+\frac{7}{4}}{5}$

5) $\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{3}{5}}{1-\frac{2}{5}}$ 6) $\dfrac{1-\frac{2}{5}+\frac{1}{4}}{3-\frac{3}{4}+\frac{1}{10}}$ 7) $\dfrac{1}{3+\frac{1}{2+\frac{1}{5}}}$

8) $\dfrac{\frac{1}{24}-\frac{1}{6}}{\frac{5}{12}-\frac{3}{\frac{1}{24}-\frac{11}{12}}}$ 9) $2+\dfrac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{3+\frac{1}{4}}}}$ 10) $\dfrac{\frac{x}{2}+\frac{1}{3}}{\frac{x}{3}-\frac{1}{2}}$

11) $\dfrac{x-\frac{x}{y}}{x+\frac{x}{y}}$ 12) $\dfrac{1-\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}}$ 13) $\dfrac{\frac{2}{x-3}-\frac{1}{x+3}}{\frac{2}{x+3}-\frac{4}{x-3}}$

14) $\dfrac{\frac{x}{x-y}+\frac{x}{x+y}}{1+\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}}$ 15) $\dfrac{\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}}$ 16) $\dfrac{\frac{x}{2x-y}+\frac{y}{x+2y}}{\frac{x}{2x-y}-\frac{y}{x+2y}}$

17) $\dfrac{\frac{x}{x+y}+\frac{y}{x-y}+\frac{2xy}{x^2-y^2}}{\frac{1}{(x-y)^2}+\frac{1}{(x+y)^2}}$
18) $\dfrac{1}{x-\frac{x^2-1}{x-\frac{1}{x-1}}}$

19) $\dfrac{x-y}{x^2-xy-\frac{(x-y)^2}{1-\frac{x}{y}}}$
20) $3-\dfrac{1}{2-\frac{1}{1-\frac{1+2x}{1-2x}}}$

21) $\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{-5}\left(\dfrac{1}{1-x}\right)^{3}\left(\dfrac{1}{1+x}\right)^{-4}$
22) $\dfrac{\frac{x+2}{4}+\frac{x+2}{x-3}}{\frac{x-1}{3}+\frac{x-1}{x-2}}\cdot\dfrac{\frac{x+3}{3}-\frac{x+3}{x-2}}{\frac{x-5}{12}+\frac{x-5}{4(x-1)}}$

Exercice 3.31.
Soit les deux fonctions rationnelles f et g définies respectivement par

$$f(x)=\frac{x}{2-x} \qquad \text{et} \qquad g(x)=\frac{x+1}{x-1}.$$

Calculer $(f\circ g)(x)$, $(g\circ f)(x)$, $(f\circ f)(x)$ et $(g\circ g)(x)$.

Exercice 3.32.
On considère un ensemble E d'applications d'une partie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, muni de la composition des applications. Démontrer dans chaque cas que la structure $(E,\circ)$ est un groupe. Est-il abélien ?

1. $E=\{f_0,f_1,f_2,f_3\}$ avec
$$f_0(x)=x,\quad f_1(x)=\frac{1}{x},\quad f_2(x)=-x,\quad f_3(x)=-\frac{1}{x}.$$
2. $E=\{f_0,f_1,f_2,f_3,f_4,f_5\}$ avec
$$f_0(x)=x,\quad f_1(x)=\frac{1}{x},\quad f_2(x)=1-x,\quad f_3(x)=\frac{1}{1-x},$$
$$f_4(x)=\frac{x-1}{x},\quad f_5(x)=\frac{x}{x-1}.$$
3. $E=\{f_0,f_1,f_2,f_3,f_4,f_5,f_6,f_7\}$ avec
$$f_0(x)=x,\quad f_1(x)=\frac{1}{x},\quad f_2(x)=-x,\quad f_3(x)=-\frac{1}{x},$$
$$f_4(x)=\frac{x+1}{1-x},\quad f_5(x)=\frac{x-1}{x+1},\quad f_6(x)=\frac{x+1}{x-1},$$
$$f_7(x)=\frac{1-x}{x+1}.$$

3.6.5 Factorisation de polynômes

Exercice 3.33.
Décomposer les polynômes suivants en un produit de facteurs à l'aide de mises en évidence

1) $3x+6y+12$
2) $ax+2ay-az$
3) $25x^3y^2-10x^2y$
4) $18x^4y^3z^2-6x^2y^2z^2$
5) $a(x+y)+b(x+y)$
6) $a(x+y)-(x+y)$
7) $(x-y)+a(x-y)$
8) $a(x+y)+b(x+y)+c(x+y)$
9) $a(x+y)-x-y$
10) $x-xy+5-5y$
11) $ax+ay+bx+by$
12) $ax+by-bx-ay$
13) $(x-1)(y+3)-(1-x)$
14) $(x+y)^2+(x+y)(x-y)$
15) $(x+y-z)(x+2y+3z)-(z-x-y)(x-y-3z)$
16) $1+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6$
17) $x^n+x^{2n}y$
18) $2x^ny^{2n}+x^{2n}y^n$
19) $x^{4n}y^2-x^{3n}y$
20) $x^{3n}y^2-4x^{5n}y^5+x^{2n+1}y^3$

Exercice 3.34.
Décomposer les polynômes suivants en un produit de facteurs à l'aide des identités remarquables

1) $x^2+10x+25$	2) x^2-6x+9
3) $x^2+4xy+4y^2$	4) $1-4x+4x^2$
5) $x^2-x+\frac{1}{4}$	6) $4x^2+2x+\frac{1}{4}$

Exercice 3.35.
Mettre en évidence les facteurs communs

1) $10ac^2+15a^2c$	5) $(a-b)+x(a-b)$
2) $12x^2y^2-18xy^3+24x^3y$	6) $-44ax^n+286a^2x^{n+1}-66a^3x^{n+2}$
3) $12a^2x^3-30a^3x^2+18ax^4$	7) $x^{m+n}y^m-x^{2n}y^{m+n}-x^ny^{2m}$
4) $a(x+y)+b(x+y)$	8) $7x^{m+3}y^{n-2}+14x^my^{n+1}+21x^{m-3}y^{n+4}$

Exercice 3.36.
Décomposer en facteurs par la méthode des identités

1) a^2-9	2) b^2-a^{2m}	3) x^3y-xy^3
4) a^2-16b^2	5) a^4-9b^2	6) a^2-25x^2
7) $32a^2-2b^2$	8) $a^2x^2-b^2x^2$	9) $4x^2-16a^2$
10) $a^2b^2c^2-m^2$	11) $50x^4-2y^2$	12) $256x^2-64a^4$
13) $a^2x^2-81x^2$	14) $16x^2y^2-121y^4$	15) $x^4y^2-x^2y^4$
16) $3a^3x-3ax^3$	17) $150a^6b^2-24a^2b^2$	18) $37a^5x-333a^3x$
19) x^4-81	20) $81x^4-625a^4$	21) $32x^4-2a^4$
22) $3ax^4-3ay^4$	23) $3x^5-48xy^8$	24) $x^{11}y^4-x^5y^{10}$
25) $m^3\pm n^3$	26) $6xy^3\pm 6x$	27) $32x^5\pm 243y^5$
28) $125x^3\pm 1$	29) $192x^6y^6-2187z^6$	30) a^7b-ab^7
31) $x^{10}y-xy^{10}$	32) $a^{5m}-9a^{3m}y^{2n}$	33) $32x^5-243$
34) $343x^3-512b^6$	35) $64x^6-1$	36) $729a^6-64$

37) $(a-b)^2-c^2$	38) $(a+b)^2-(x-y)^2$
39) $(5a+2b)^2-(2b-5a)^2$	40) $(x+a)^2-(3x-2a)^2$
41) $(4x-a)^2-(4a-x)^2$	42) $(a+b+c)^2-(a-2b-c)^2$
43) $(x+1)^2-(x-1)^2$	44) $(a+b)^3+(a-b)^3$

Exercice 3.37.
Décomposer en facteurs par la méthode des groupements

1) $a^2-2ab+b^2-1$	2) $a^2-y^2-2xy-x^2$
3) $a^2-b^2+2bc-c^2$	4) x^2-2x-y^2+1
5) x^2-4y^2+4y-1	6) $cy+y+c+1$
7) $4x^2+2x-9y^2-3y$	8) c^2+d-d^2-c
9) $b^2y-b^2+a^2y-a^2$	10) $5a^3+a^2-20a-4$
11) a^4-2a^3+a-2	12) $b^2y-b^2-a^2y+a^2$
13) ax^2-x^2-4a+4	14) $8y^4-8y^3+y-1$
15) x^3+4x-5	16) x^3+6x+7
17) a^4+5a^2+4	18) a^5-2a^2+1
19) $a^4+b^4+a^2b^2$	20) $4x^4+y^4+3x^2y^2$
21) $a^2-b^2+x^2-y^2-2(ax-by)$	22) $a^2-b^2-c^2+d^2-2(ad-bc)$
23) $2a^3-2a^2b-a^2+ab+2ab^2-b^2$	24) $x^8-4x^6-2x^5+8x^3+x^2-4$

Exercice 3.38.
Décomposer les trinômes suivants

1) $x^2-8x+12$	8) $x^2+5x-14$	15) $4x^2+x-5$
2) $x^2-14x+13$	9) $x^2+20x+19$	16) $11x^2+28x-15$
3) $x^2-22x+85$	10) $x^2-4x-12$	17) $6x^4+5x^2+1$
4) x^2-4x-5	11) $2x^2+9x+7$	18) $21x^4-8x^2-5$
5) $x^2+10x+16$	12) $2x^2-2x-24$	19) $45x^2-39xy-6y^2$
6) $x^2-115x+1500$	13) $6x^2+15x+6$	20) $12x^2+34xy+10y^2$
7) $x^2-4x-32$	14) $27x^2-75x+48$	21) $2x^4+x^2y^2-3y^4$.

Chapitre 4

Équations et inéquations

4.1 Introduction

Dans bon nombre de problèmes, on a une fonction $f(x)$ qui nous donne la valeur d'une grandeur qui nous intéresse en rapport avec une variable x qui caractérise notre problème. Un autre comportement peut être donné par une autre fonction $g(x)$ qui dépend de la même variable. La plupart du temps, la solution à notre problème est la valeur que doit prendre la variable x pour que les valeurs des fonctions f et g soient égales. On appelle ce genre de problème une équation et le but du problème est de trouver la (ou les) valeur(s) de x pour lesquelles

$$f(x) = g(x).$$

De manière générale, il n'y a pas forcément de solution à une équation. Parfois il n'y en a qu'une et d'autres fois plusieurs. Cela dépend des fonctions f et g.

Exemple 1

La hauteur, en mètres, d'un objet en chute libre est donnée par la formule

$$f(t) = -5t^2 + 50t,$$

où t est le temps écoulé en seconde depuis le lancement depuis le sol. La hauteur, en mètres, d'un second objet en chute libre, lâché depuis une altitude de 100m est donnée par

$$g(t) = 100 - 5t^2.$$

Le problème que l'on veut résoudre est le suivant : Y a-t-il un instant où les deux objets seront à la même hauteur ? Si oui, quelle est cette hauteur ?

Pour résoudre ce problème, il nous faut comparer les hauteurs des deux objets. La question se résume à trouver un temps t_0 pour lequel la hauteur du premier objet $f(t_0)$ est égale à la hauteur du second objet $g(t_0)$ si ce temps existe. L'équation à résoudre s'écrit alors

$$f(t) = g(t).$$

L'expression $f(t)$ à gauche du signe "=" est le *membre de gauche* de l'équation et l'expression à droite du signe "=" le *membre de droite* de l'équation.

Avec nos définitions pour f et g, on obtient

$$-5t^2 + 50t = 100 - 5t^2.$$

Nous constatons que dans les deux membres de l'équation se trouve le terme $-5t^2$. Pour le supprimer, en utilisant les règles de l'algèbre, nous pouvons additionner $5t^2$ dans les deux membres en utilisant la compatibilité de l'addition avec l'égalité

$$(-5t^2 + 50t) + 5t^2 = (100 - 5t^2) + 5t^2.$$

Ce qui donne

$$50t = 100.$$

En divisant les deux membres par 50, en utilisant la compatibilité de la multiplication (par $\frac{1}{50}$) sur l'égalité, on trouve la solution

$$t = 2 = t_0.$$ [a]

Ainsi il existe un temps t_0 pour lequel les deux objets sont à la même altitude, ce temps est $t_0 = 2$ secondes. L'altitude commune est alors donnée indifféremment par $f(t_0)$ ou par $g(t_0)$

$$f(t_0) = g(t_0) = 100 - 5(2)^2 = 80.$$

L'altitude de la rencontre est de 80 m.

a. Il est souvent pratique de définir une lettre pour pouvoir parler de la solution un peu plus loin. C'est une bonne habitude à prendre, que de baptiser les nombres par des lettres. Cela rend les discussions ultérieures plus claires.

Dans les sections suivantes, nous allons traiter la théorie générale des équations. Après avoir posé les principes de base, nous allons les mettre en pratique en commençant par le cas le plus simple : l'équation du premier degré à une inconnue.

Dans les chapitres suivants, nous verrons comment traiter les cas de plusieurs équations à plusieurs inconnues du premier degré et les équations du second degré à une inconnue.

4.2 Équations

Définition 1

Soit f et g deux fonctions définies sur un ensemble A. On appelle *équation dans* A la proposition

$$f(x) = g(x)$$

pour tout élément $x \in A$. Le *membre de gauche* de l'équation est $f(x)$ et $g(x)$ est le *membre de droite* de l'équation. Le symbole x est l'*inconnue* de l'équation.

La valeur de l'équation (c'est-à-dire V ou F, car c'est une proposition) dépend de la valeur numérique donnée à l'inconnue.

Définition 2

On appelle *solution*, d'une équation $f(x) = g(x)$ sur A toute valeur $x_0 \in A$ pour laquelle l'équation est vraie.

Définition 3

On appelle *ensemble solution* d'une équation $f(x) = g(x)$ sur A l'ensemble S de toutes les solutions de cette équation

$$S = \{x_0 \in A \mid f(x_0) = g(x_0)\}.$$

4.2.1 Équations du premier degré

Définition 4

On dit que l'équation $f(x) = g(x)$ est du *premier degré* si f et g sont des fonctions affines.

Remarque 1

Le plus grand exposant (la plus grande puissance) de l'inconnue x est alors 1.

Dans les équations du premier degré, nous avons donc des fonctions de la forme

$$f(x) = a_1 x + b_1 \quad \text{et} \quad g(x) = a_2 x + b_2,$$

où a_1, a_2, b_1 et b_2 sont des nombres fixés une fois pour toutes. L'équation s'écrit alors

$$a_1x + b_1 = a_2x + b_2.$$

La méthode de résolution consiste à *isoler* l'inconnue x en utilisant les règles de l'algèbre. Isolons x à gauche du signe "=". Additionnons les deux membres de l'équation par $-a_2x$ de sorte à placer tous les termes qui contiennent un x dans le membre de gauche

$$(a_1x + b_1) + (-a_2x) = (a_2x + b_2) + (-a_2x)$$

ce qui donne

$$a_1x - a_2x + b_1 = b_2.$$

Nous pouvons factoriser x dans les deux premiers termes du membre de gauche et additionner $-b_1$ dans les deux membres. Ce qui donne successivement

$$(a_1 - a_2)x + b_1 = b_2$$

et

$$(a_1 - a_2)x = b_2 - b_1.$$

deux possibilités se présentent

1. $\mathbf{a_1 - a_2 = 0}$. C'est-à-dire $a_1 = a_2$. L'équation devient

   $$0 \cdot x = b_2 - b_1,$$

   soit

   $$0 = b_2 - b_1.$$

   a) Si $b_2 - b_1 = 0$, alors l'équation est toujours vraie. L'équation donnée est composée par la même fonction, car $f(x) = g(x)$. En effet, on a alors : $a_1 = a_2$ et $b_1 = b_2$. L'ensemble solution est, dans ce cas

   $$S = \mathbb{R}.$$

   b) Si $a_1 = a_2$, mais $b_1 \neq b_2$ alors l'équation est toujours fausse et le problème n'admet pas de solution

   $$S = \varnothing.$$

2. $\mathbf{a_1 - a_2 \neq 0}$. On peut alors diviser les deux membres de la dernière équation ci-dessus par $a_1 - a_2$ et on obtient

   $$x = \frac{b_2 - b_1}{a_1 - a_2}.$$

   Le problème admet une solution unique

   $$S = \left\{ \frac{b_2 - b_1}{a_1 - a_2} \right\}.$$

L'unicité de la solution, dans le dernier cas, vient du fait que tout nombre réel non nul possède un inverse unique et du fait que le produit de deux nombres réels (ou le quotient de deux réels) est unique également. Ainsi, le quotient qui apparaît dans la solution est bien unique. Donc, en général, une équation du premier degré à une inconnue possède une solution unique.

Exemple 2

Soit $f(x) = 3x - 1$ et $g(x) = 5x + 2$. Résoudre l'équation déterminée par f et g

$$3x - 1 = 5x + 2.$$

On écrit successivement

$$3x - 1 - 5x = 2,$$

soit

$$2x - 1 = 2,$$

d'où

$$2x = 3.$$

Ainsi l'équation admet exactement une solution

$$x = \frac{3}{2}.$$

L'ensemble solution est le singleton

$$S = \left\{ \frac{3}{2} \right\}.$$

Exemple 3

Soit $f(x) = 3x - 1$ et $g(x) = 3x + 2$. Résoudre l'équation déterminée par f et g

$$3x - 1 = 3x + 2.$$

On écrit successivement

$$3x - 1 - 3x = 2,$$

soit

$$0 \cdot x - 1 = 2,$$

d'où

$$0 = 3.$$

Cette dernière égalité est toujours fausse et l'équation donnée n'admet donc aucune solution. L'ensemble solution est alors vide

$$S = \varnothing.$$

Définition 5

Deux équations sont dites équivalentes si elles ont le même domaine de définition et les mêmes solutions.

Pour résoudre une équation, on la transforme successivement en des équations équivalentes jusqu'à obtenir une équation immédiate, dans laquelle l'inconnue figure seule dans un des membres. L'autre membre est alors une des valeurs (ou la valeur, dans le cas d'une solution unique) de l'inconnue qui vérifie l'équation.

C'est cette procédure qui est utilisée dans les exemples précédents.

4.2.2 Résumé des stratégies de résolution

Lorsque l'on doit résoudre une équation algébrique polynômiale, la première observation à faire est de reconnaître à quel type d'équation on a à faire : est-ce une équation du premier degré à une inconnue ? est-ce une équation de degré supérieur ou égal à 2 à une inconnue ?

Dans le cas d'une équation *du premier degré à une inconnue*, la stratégie à utiliser est la suivante (x représentera l'inconnue) :

1. S'il y a des termes en x dans les deux membres, il faut commencer par les faire apparaître uniquement d'un côté de l'égalité en ajoutant ou en soustrayant les termes convenables.
2. Il peut être nécessaire d'effectuer des multiplications d'abord pour séparer les termes en x des termes sans x.
3. Lorsque tous les termes en x sont rassemblés du même côté (disons à gauche) du signe $=$, on déplace tous les autres termes de l'autre côté (à droite).
4. On factorise l'inconnue de tous les termes de gauche et on effectue la somme des facteurs.
5. On isole l'inconnue x en divisant les deux membres de l'équation par le facteur de x.

Dans le cas d'une équation *de degré supérieur ou égal à 2*, l'idée est de se ramener au cas plus simple du premier degré. Pour cela, on introduit quelques étapes supplémentaires

1. On place tous les termes dans un seul membre de l'équation (disons à gauche du signe $=$) et on laisse le nombre 0 dans le membre de droite.
2. On factorise complètement le polynôme du membre de gauche.

3. Par théorème, si un produit de facteur est nul, c'est que l'un au moins de ces facteurs est nul. Dans notre cas, cela signifie que l'une des parenthèses au moins est nulle. On obtient ainsi une série d'équations du premier degré (éventuellement du second degré) que l'on résout comme ci-dessus.

Exemple 4

Soit à résoudre l'équation

$$x^3 + x = 4x^2 - 6.$$

On commence par annuler le membre de droite en ajoutant $-4x^2 + 6$ dans les deux membres

$$x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0.$$

En essayant quelques solutions simples, on voit que $x_0 = -1$ vérifie l'équation et est donc une solution. Par le théorème sur la factorisation des polynômes, on peut factoriser $(x+1)$ dans le membre de gauche

$$(x+1)(x^2 - 5x + 6) = 0.$$

La factorisation complète est alors immédiate

$$(x+1)(x-2)(x-3) = 0$$

et les solutions sont déterminées par

$$\begin{cases} x+1 &= 0 \\ \vee & \\ x-2 &= 0 \\ \vee & \\ x-3 &= 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x &= -1 \\ \text{ou} & \\ x &= 2 \\ \text{ou} & \\ x &= 3. \end{cases}$$

L'ensemble solution est ainsi

$$S = \{-1, 2, 3\}.$$

Remarque 2

La disjonction **ou** ou $\vee$ est essentielle, car en l'absence de connecteurs logiques un **et** est sous-entendu.

4.2.3 Équations rationnelles

La méthode de résolution des équations rationnelles consiste à se ramener à une équation polynomiale de degré 1 ou plus. Afin de se ramener à ce genre de problème, il faut d'abord mettre toutes les fractions sous le même dénominateur et dans le même membre. On obtient alors une équation du type

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = 0.$$

Ce genre d'équation admet une ou des solutions pour x aux deux conditions suivantes

1. Le dénominateur ne s'annule pas : $Q(x) \neq 0$.
2. Le numérateur s'annule : $P(x) = 0$.

On prend en compte la première condition en déterminant le *domaine d'existence de la fraction*

$$\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R} \mid Q(x) \neq 0\}.$$

C'est l'ensemble des valeurs pour lesquelles le dénominateur ne s'annule pas.

Ensuite, la deuxième condition s'exprime en posant l'équation

$$P(x) = 0.$$

Les solutions de cette équation qui se trouve dans $\mathcal{D}$ font partie de la solution S de l'équation rationnelle de départ.

Ainsi, la stratégie de résolution d'une équation rationnelle comprend trois étapes

1. Déterminer le domaine d'existence des fractions $\mathcal{D}$
2. Résoudre l'équation polynomiale obtenue par transformation de l'équation rationnelle.
3. Vérification des solutions.

Exemple 5

Soit à résoudre l'équation rationnelle

$$2\frac{x-1}{x+2} = -\frac{2x-1}{3-x}.$$

1. *Détermination du domaine d'existence des fractions*
   Pour que les fractions existent, il faut
   $$x+2 \neq 0 \qquad \text{et} \qquad 3-x \neq 0.$$
   Ainsi, on doit avoir
   $$x \notin \{-2, 3\}.$$
   Le domaine d'existence est alors
   $$\mathcal{D} = \mathbb{R} - \{-2, 3\}.$$
2. *Résolution de l'équation*
   On place les deux fractions dans le membre de gauche
   $$2\frac{x-1}{x+2} + \frac{2x-1}{3-x} = 0$$
   que l'on met au même dénominateur
   $$\frac{2(x-1)(3-x)+(x+2)(2x-1)}{(x+2)(3-x)} = 0.$$
   Une fraction ne peut s'annuler que si son numérateur est nul et son dénominateur est non nul, on est ainsi ramené à résoudre
   $$2(x-1)(3-x)+(x+2)(2x-1) = 0$$
   soit
   $$\begin{aligned} 2(-x^2+4x-3)+(2x^2+3x-2) &= 0 \\ 11x-8 &= 0 \\ x &= \frac{8}{11}. \end{aligned}$$
3. *Vérification des solutions*
   On a
   $$\frac{8}{11} \in \mathcal{D}$$
   donc la solution de l'équation initiale est
   $$S = \{\frac{8}{11}\}.$$

4.2.4 Équations irrationnelles

Les équations irrationnelles font intervenir des racines carrées, ou plus généralement n^{e}.

Là encore, la méthode générale consiste à se ramener à une équation polynomiale. Pour cela on transforme l'équation donnée en équations équivalentes en tentant de supprimer toutes les racines. Il faut prendre garde à ce qu'en général, en élevant une équation au carré, ou plus généralement à une puissance paire, on introduit des solutions étrangères au problème.

Lorsque toutes les racines ont disparu, on a une équation polynomiale que l'on peut résoudre de façon standard. Pour s'assurer que les solutions obtenues sont valables, il faut encore les tester dans l'équation de départ, et vérifier qu'elles se trouvent dans le domaine d'existence des racines de l'équation initiale.

La méthode générale comprend également deux étapes

1. Déterminer le domaine d'existence des racines.
2. Résoudre l'équation polynomiale obtenue en supprimant les racines par transformations successives et vérifier les solutions.

Exemple 6

Soit à résoudre l'équation

$$\sqrt{x-1} = \sqrt{2-x} + 1$$

1. *Détermination du domaine d'existence des racines carrées* Les racines existent uniquement si leur argument est positif ou nul. On doit donc avoir

$$\begin{cases} x-1 & \geq 0 \\ 2-x & \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x & \geq 1 \\ 2 & \geq x. \end{cases}$$

   On en déduit le domaine d'existence

$$\mathcal{D} = [1,2]$$

   qui réunit les deux conditions simultanément.

2. *Résolution de l'équation*

   La résolution de l'équation passe par l'élimination des racines. Pour les éliminer, il faut procéder systématiquement en les isolant à tour de rôle et en élevant au carré les deux membres

$$\begin{aligned} \sqrt{x-1} &= \sqrt{2-x} + 1 \\ x-1 &= (2-x) + 2\sqrt{2-x} + 1 \\ x-1-(2-x)-1 &= 2\sqrt{2-x} \\ 2x-4 &= 2\sqrt{2-x} \\ 2(x-2) &= 2\sqrt{2-x} \\ (x-2)^2 &= (2-x) \\ x^2-4x+4 &= 2-x \\ x^2-3x+2 &= 0 \\ (x-1)(x-2) &= 0. \end{aligned}$$

   Ainsi, les solutions de cette dernière équation sont $x_1 = 1$ et $x_2 = 2$.

3. *Vérification des solutions*

   On constate que ces deux solutions sont dans le domaine d'existence des racines carrées du problème initial

$$\{1,2\} \subset \mathcal{D}.$$

   Le fait d'élever au carré peut introduire des solutions étrangères au problème [a]. Si notre problème possède des solutions, alors ces solutions seront contenues dans les équations au carré. Mais les solutions des équations au carré ne sont pas forcément des solutions du problème original.

   Il faut donc tester nos solutions avec le problème initial. On vérifie alors que $x_1 = 1$ n'est pas une solution du problème initial, mais $x_2 = 2$ oui.

   Parmi les deux solutions, seul $x_2 = 2$ est une solution du problème donné. L'ensemble solution est alors

$$S = \{2\}.$$

a. En effet, on a l'implication

$$x = y \Longrightarrow x^2 = y^2$$

mais pas l'implication récirpoque. par exemple, $(-3)^2 = 3^2$, mais clairement $-3 \neq 3$.

4.3 Inéquations

Définition 6

Soit f et g deux fonctions et A une partie de $\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$. On appelle *inéquations* les propositions

$$f(x) \leq g(x) \qquad \text{et} \qquad f(x) < g(x)$$

où $x \in A$.

Résoudre une inéquation revient à déterminer l'ensemble S des valeurs qui rendent vraie l'inéquation.

Nous illustrons la méthode de résolution des inéquations du premier degré à l'aide de l'exemple suivant. Soit $f(x) = 3x - 1$ et $g(x) = -2x + 5$. Résolvons l'inéquation

$$f(x) \leq g(x),$$

soit

$$3x - 1 \leq -2x + 5.$$

Là encore, il s'agit d'isoler l'inconnue x en utilisant les règles de l'algèbre.

Concernant l'addition, il n'y a aucune précaution à prendre. On peut toujours additionner le même terme dans les deux membres d'une inégalité. Il s'en suit que l'on peut additionner $2x$ dans les deux membres

$$3x - 1 + 2x \leq 5,$$

soit

$$5x - 1 \leq 5.$$

Additionnons encore 1 dans les deux membres

$$5x \leq 6.$$

Pour isoler x, il faut diviser les deux membres par 5 (autrement dit, multiplier les deux membres par $\frac{1}{5}$). Contrairement à l'addition, il faut prendre des précautions lorsque l'on divise, ou multiplie, les deux membres d'une inégalité. Dans notre cas, on divise (on multiplie) par un nombre positif. Il n'y a donc pas de problème, et on trouve

$$x \leq \frac{6}{5}.$$

Exercice 4.1.
Que se passe-t-il si l'on doit diviser les deux membres d'une inégalité par un nombre négatif ?

L'ensemble solution est un intervalle, c'est l'ensemble de tous les nombres inférieurs à $\frac{6}{5}$

$$S = \left]-\infty; \frac{6}{5}\right].$$

4.3.1 Signe des polynômes

Étudier le signe d'un polynôme consiste à donner les intervalles pour lesquels un polynôme est négatif, positif ou nul.

On commence généralement par factoriser le polynôme en produit de binômes du premier degré ou en trinômes du second degré non factorisables. Comme le signe d'un produit de facteurs est donné par le nombre de facteurs négatifs (par la règle des signes) on étudie chaque monôme qui est élevé à une puissance impaire et on compte le nombre de signes négatifs.

Pratiquement, on étudie le signe d'un polynôme en faisant un tableau, *le tableau des signes*. La technique est illustrée dans l'exemple suivant.

Exemple 7

Soit le polynôme $p(x) = x^3(x-1)(x-2)$. Ce polynôme s'annule en $x = 0$, $x = 1$ et $x = 2$.

Faisons le tableau des signes du polynôme

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
x^3		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$p(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

La dernière ligne est obtenue en faisant le produit dans chaque colonne et en respectant la règle des signes.

En conclusion, les signes de $p(x)$ sont donnés par

$$\begin{aligned} p(x) < 0 &\iff x \in]-\infty; 0[\cup]1; 2[\\ p(x) = 0 &\iff x \in \{0; 1; 2\} \\ p(x) > 0 &\iff x \in]0 : 1[\cup]2; +\infty[. \end{aligned}$$

4.3.2 Inéquations rationnelles

La méthode générale pour résoudre une inéquation rationnelle consiste à

1. Placer tous les termes de l'inéquation dans un membre de l'inégalité (disons le membre de gauche).
2. Écrire le membre de gauche sous la forme d'une seule fraction (on met toutes les fractions sous un même dénominateur, en général le plus petit multiple commun des dénominateurs de chaque fraction).
3. Factoriser le numérateur et le dénominateur en binômes du premier degré ou en trinôme du deuxième degré.
4. Faire une étude de signe de chaque facteur et remplir un tableau des signes.
5. Appliquer la règle des signes dans chaque intervalle de valeurs et enlever les valeurs qui annulent le dénominateur.
6. La lecture du résultat de l'étape précédente détermine les intervalles de la solution.

Exemple 8

Soit à résoudre l'inéquation

$$\frac{x-1}{x+2} \leq \frac{x+1}{x-3}.$$

On commence par déplacer tous les termes dans le membre de gauche

$$\frac{x-1}{x+2} - \frac{x+1}{x-3} \leq 0.$$

On effectue la soustraction

$$\frac{(x-1)(x-3)-(x+1)(x+2)}{(x+2)(x-3)} \leq 0.$$

On effectue le produit du numérateur, en vue de le factoriser

$$\frac{-7x+1}{(x+2)(x-3)} \leq 0.$$

Par chance, c'est déjà un binôme du premier degré seul. On n'effectue surtout pas le produit du dénominateur, car il est déjà factorisé.

Il nous reste à connaître le signe de l'expression de gauche. La solution à notre problème est trouvée dès que l'on sait pour quelles valeurs de x l'expression de gauche est négative.

L'étude du signe de chaque facteur du numérateur et du dénominateur se fait dans le tableau des signes. On commence par y placer les zéros des facteurs. $f(x)$ représente le membre de gauche de la dernière inégalité obtenue.

x	$-\infty$		-2		$\frac{1}{7}$		3		$+\infty$
$-7x+1$		$+$	|	$+$	0	$-$	|	$-$	
$x-3$		$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$f(x)$		$+$	||	$-$	0	$+$	||	$-$	

La lecture du tableau est claire, l'expression de gauche de l'inégalité est négative uniquement pour les valeurs comprises entre -2 et $\frac{1}{7}$ ou plus grandes que $+3$. Les valeurs -2 et $+3$ annulent le dénominateur, il faut donc enlever ces valeurs. La solution finale est alors

$$S = \left]-2; \frac{1}{7}\right] \cup]+3; +\infty[\,.$$

Remarque 3

Il faut prendre garde à ne pas multiplier les deux membres par des facteurs qui contiennent des x. En effet, ces facteurs ont un signe indéterminé et il n'est pas possible de savoir s'il faut ou non changer le sens de l'inégalité après la multiplication.

Il est ainsi absolument *nécessaire* de commencer par déplacer tous les termes dans un membre avant de faire des manipulations et de se garder de multiplier ou diviser par des expressions qui contiennent l'inconnue.

4.3.3 Signe des fonctions rationnelles

On étudie le signe des fonctions rationnelles comme le signe des polynômes, à cela près qu'il faut factoriser les polynômes du numérateur et du dénominateur. L'étude du signe se fait, comme pour les polynômes, avec un tableau des signes.

La grande différence est que si un facteur du dénominateur s'annule, il faudra en enlever la valeur.

L'exemple suivant illustre la procédure.

Exemple 9

Soit $f(x) = \frac{2x^2-6x+4}{x^3+6x^2+12x+8}$.

La fonction rationnelle f se factorise comme suit

$$f(x) = \frac{2x^2 - 6x + 4}{x^3 + 6x^2 + 12x + 8} = \frac{2(x-2)(x-1)}{(x+2)^3}.$$

Le domaine d'existence de f est

$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} - \{-2\}.$$

En effet, si $x = -2$ le dénominateur de f s'annule et le quotient n'est pas défini.

Faisons le tableau des signes de f. La fonction f s'annule lorsque son numérateur s'annule, soit pour $x \in \{1; 2\}$.

x	$-\infty$		-2		1		2		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x+2)^3$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$f(x)$		$-$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	

Le double trait sous $x = -2$ dans la dernière ligne indique que f n'est pas définie en $x = -2$.

Ainsi, on a

$$\begin{aligned} f(x) < 0 &\iff x \in]-\infty; -2[\cup]1; 2[\\ f(x) = 0 &\iff x \in \{1; 2\} \\ f(x) > 0 &\iff x \in]-2 : 1[\cup]2; +\infty[. \end{aligned}$$

4.3.4 Systèmes d'inéquations

Il arrive qu'un problème se présente sous la forme d'un système composé de plusieurs inéquations de la même variable x (par exemple). Dans un tel cas, la stratégie consiste à résoudre chaque inéquation séparément afin de déterminer pour chacune d'elle le domaine de la solution x. On obtient la solution générale en prenant l'intersection de tous ces domaines, i. e. l'ensemble des valeurs qui vérifient toutes ces conditions.

Exemple 10

Soit à résoudre le système

$$\begin{cases} 2-3x & \geq 0 \\ x^2+3x-4 & < 0 \\ \dfrac{x-5}{x} & < 1. \end{cases}$$

Les domaines de chacune des ces inéquations sont

$$I_1 =]-\infty;\frac{2}{3}], \qquad I_2 =]-4;1[, \qquad I_3 =]0;+\infty[.$$

Ainsi la solution est fournie par

$$S = I_1 \cap I_2 \cap I_3 =]0;\frac{2}{3}].$$

4.3.5 Inéquations irrationnelles

Le cas des inéquations irrationnelles se ramène au cas des équations irrationnelles avec en plus la précaution à prendre que l'élévation au carré n'est pas toujours autorisée. Dans ce cas, le plus prudent est toujours de déplacer tous les termes dans un même membre et d'utiliser le théorème de multiplication d'une inégalité avec la règle des signes.

Mentionnons à ce propos les résultats de l'exercice 2.13

1. $(x \leq y) \Rightarrow x^n \leq y^n$ seulement si n est impair.
2. $(0 \leq x \leq y) \Rightarrow 0 \leq x^n \leq y^n$ si n est pair (ou impair).

Exemple 11

Soit à résoudre l'inéquation

$$\sqrt{2x-1} > \sqrt{x-2}.$$

La condition d'existence de la racine s'exprime par

$$2x-1 \geq 0 \qquad \text{et} \qquad x-2 \geq 0,$$

d'où le domaine d'existence de la racine

$$\mathcal{D} = [\frac{1}{2},+\infty[\cap[2,+\infty[= [2,+\infty[.$$

Les deux membres sont positifs, puisqu'il s'agit de racines carrées. On peut alors élever les deux membres au carré

$$2x-1 > x-2,$$

soit

$$x+1 > 0,$$

d'où

$$x > -1.$$

Ainsi, la solution finale est

$$S = [2,+\infty[.$$

4.4 Équations et inéquations paramétriques

Les équations paramétriques sont des équations dans lesquelles on a représenté certains nombres par des lettres. Autrement dit, des équations dont certains facteurs sont gardés inconnus lors de la résolutions.

L'idée derrière ce genre d'équation étant d'obtenir une réponse générale, une formule, de l'équation dans laquelle figurent les grandeur que l'on n'a pas voulu spécifier au départ. Ainsi on a une réponse qui dépend d'une ou plusieurs lettres. On obtient une réponse numérique dès que l'on remplace toutes les lettres restantes, *les paramètres*, par des nombres. Ainsi la réponse est une formule qui nous dit comment obtenir le résultat final dès que l'on connaît les valeurs des paramètres.

4.4.1 Équations paramétriques

Lors de la résolution d'une équation paramétrique, on peut utiliser toutes les techniques de résolution des équations ordinaires. Comme la valeur exacte des paramètres est inconnue, il faudra toutefois prendre des précautions lorsque l'on veut effectuer des opérations délicates, c'est-à-dire des opérations qui peuvent présenter quelques difficultés.

Les opérations délicates consistent essentiellement, pour l'instant, à effectuer une division par une expression qui contient un ou plusieurs paramètre. En effet, on sait que l'on ne peut jamais diviser par zéro. Ainsi il faudra, le cas échéant, s'assurer que l'expression par laquelle on divise ne soit pas nulle.

Illustrons la procédure par une exemple

Exemple 12

Soit à résoudre l'équation

$$m^2x + 1 = x + m.$$

C'est une équation paramétrique du premier degré à un paramètre m et à une inconnue x.

On commence par mettre cette équation sous la forme standard en annulant les termes en x du membre de droite

$$(m^2 - 1)x = m - 1.$$

Pour obtenir la solution finale, il faudrait diviser les deux membres par $m^2 - 1$. Or cette expression n'est pas connue, puisque le paramètre m n'est pas connu. Et comme il se peut que ce facteur soit nul, il faut prendre des précautions et distinguer plusieurs cas.

En premier lieu, il est clair que nous devons isoler le cas où $m^2 - 1 = 0$ des autres cas. Le cas $m^2 - 1 = 0$ est donné par deux possibilités qui sont obtenues en résolvant l'équation

$$\begin{aligned} m^2 - 1 &= 0 \\ (m-1)(m+1) &= 0 \\ &\begin{cases} m = 1 \\ m = -1. \end{cases} \end{aligned}$$

1^er^ cas : $\mathbf{m^2 - 1 \neq 0}$. Dans ce cas, on peut diviser les deux membres par $m^2 - 1$ et on obtient

$$x = \frac{m-1}{m^2-1}$$

soit

$$x = \frac{1}{m+1}.$$

L'ensemble solution est alors

$$S = \left\{ \frac{1}{m+1} \right\}.$$

2^e^ cas : $\mathbf{m = 1}$. Dans ce cas, le facteur entre parenthèse s'annule et on ne peut pas faire la division. Si l'on remplace m par 1 dans l'équation, on obtient

$$0 \cdot x = 0.$$

Or cette équation est toujours vraie, quelque soit la valeur de x. Ainsi, l'ensemble solution dans ce cas est

$$S = \mathbb{R}.$$

3^e^ cas : $\mathbf{m = -1}$. Comme précédemment, le facteur entre parenthèse s'annule et on ne peut pas effectuer la division par $m^2 - 1$. En remplaçant m par -1 dans l'équation, on trouve

$$0 \cdot x = -2$$

soit

$$0 = -2.$$

Or ceci est toujours faux, quel que soit la valeur donnée à x. Ainsi, l'ensemble solution est

$$S = \varnothing.$$

On peut représenter la solution finale de la façon suivante, qui réunit en un coup d'œil les différents cas

$$\begin{cases} S &= \mathbb{R}, \quad \text{si } m = +1 \\ S &= \varnothing, \quad \text{si } m = -1 \\ x &= \frac{1}{m+1}, \quad \text{si } m \notin \{-1; 1\}. \end{cases}$$

4.4.2 Inéquations paramétriques

Les inéquations paramétriques se traitent comme les inéquations en générales avec en plus les précautions nécessaires dans le traitement des paramètres. Cela ne présente pas de difficultés supplémentaires et nous ne donnerons par d'autres détails.

4.5 Ce qu'il faut connaître

1. Résoudre une équation du premier degré à une inconnue.
2. Résoudre un équation de degré supérieur à 1 par factorisation et réduction au degré 1.
3. Stratégie de résolution des équations rationnelles.
4. Stratégie de résolution des inéquations.
5. Stratégie de résolution des équations paramétriques.
6. Résoudre les équations irrationnelles simples.

4.6 Exercices

4.6.1 Équations

Exercice 4.2.
Résoudre les équations suivantes (justifier les transformations effectuées)

1. $3(2x-1)-5(1-4x) = 2x+64$
2. $8-3(5x+2) = 5x-2(4-3x)$
3. $2(3-2x)-3(5x+4) = 5x-2$
4. $(x-2)(x+4) = x^2-3x+2$
5. $(x+3)(x-5)-8x = x^2+5$
6. $(3x-4)(5-2x) = 2(5-x)-6x^2$
7. $\dfrac{5x}{3}-\dfrac{1}{5} = \dfrac{2x}{15}+\dfrac{4}{3}$
8. $\dfrac{5-4x}{2} = 2-\dfrac{2x-1}{3}$
9. $\dfrac{3x-4}{7} = \dfrac{1}{2}-\dfrac{5-4x}{14}$
10. $\dfrac{-8x+6}{3} = \dfrac{1}{4}-\dfrac{2x-3}{12}$
11. $\dfrac{2x}{5}-\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{5x}{4}-4\right) = x+\dfrac{27}{5}$
12. $3x-\dfrac{1}{2}\left(6+\dfrac{x}{5}\right) = \dfrac{3x}{2}+25$
13. $\dfrac{x}{8}-\dfrac{3x}{32}-\dfrac{x-1}{256} = \dfrac{-4x}{1024}$
14. $\dfrac{2x-1}{52}-\left(x-\dfrac{1-x}{13}\right) = \dfrac{3}{2}-\dfrac{x+2}{4}$
15. $\sqrt{2}x-1 = x+\sqrt{2}$

16. $\sqrt{5}(x-1)+x+1=0$

17. $\sqrt{5}x+1=3-\sqrt{3}x$

18. $(4+\sqrt{3})x+1=-\sqrt{3}(1+x)$

19. $\dfrac{x}{\sqrt{5}-2}=\dfrac{1}{\sqrt{5}+2}-(\sqrt{5}-2)x$

20. $\dfrac{x}{\sqrt{2}}-\dfrac{\sqrt{2}x}{1+\sqrt{2}}=\dfrac{3}{\sqrt{2}}-2$

Exercice 4.3.
Résoudre les équations suivantes (justifier les transformations effectuées)

1) $(3x+1)(4x-5)=0$	2) $(\sqrt{3}-x)(\sqrt{2}x+2)=0$
3) $x^2-16=0$	4) $x^2-5=0$
5) $4x^2-9=0$	6) $x^4-1=0$
7) $x^2+25=10x$	8) $x(x-1)=42$
9) $x^3+7x^2+12x=0$	10) $4x(x-1)=x^3$
11) $(2x+9)(x+5)=3-x$	12) $(x-2\sqrt{3})(x+2\sqrt{3})=12x-47$
13) $x^3+4x^2+3x+12=0$	14) $x^5+2=x(2x^3+1)$
15) $x^3+2x^2-x-2=0$	16) $x^3-2x^2-5x+6=0$

Exercice 4.4.
Résoudre les équations suivantes

1) $6(x+5)-5x=25$	5) $(x-3)^2-5(10+x)=x^2-8$
2) $4(4+2x)=60-3x$	6) $(x+5)^2-(x-5)^2=500$
3) $60x+1=3(3+4x)$	7) $(x-4)^2-5(16-x)=x(x-1)$
4) $(5-x)(x+4)=8-x^2$	8) $(x+2)(x+3)=x^2+366.$

4.6.2 Équations rationnelles

Exercice 4.5.
Résoudre les équations fractionnaires suivantes

1) $\dfrac{x+1}{x-2}=\dfrac{x-3}{x+4}$	2) $\dfrac{x-1}{x-2}=\dfrac{x-3}{x-4}$
3) $\dfrac{5+2x}{1-4x}=\dfrac{3+x}{5-2x}$	4) $\dfrac{3x+2}{5-3x}=\dfrac{2(4-x)}{2x-1}$

5) $\dfrac{x}{x-2} - \dfrac{2}{2x+3} = 1$ 6) $\dfrac{x-3}{x+3} - \dfrac{x+3}{x-3} = \dfrac{3}{x^2-9}$

7) $\dfrac{3x+1}{3(x-3)} + \dfrac{2x+1}{2(x+3)} = 2$ 8) $\dfrac{x}{x-3} - \dfrac{1}{2x+3} = 1$

9) $\dfrac{5}{x-3} - \dfrac{2}{x-4} = \dfrac{3}{x-5}$ 10) $\dfrac{4}{x+1} = \dfrac{x}{x-2} - 2$

11) $\dfrac{x}{x+1} - \dfrac{2}{x} = \dfrac{x^2}{x^2+x}$ 12) $\dfrac{2x}{x+1} - \dfrac{3x}{x-1} = \dfrac{6}{-1+x^2}$

13) $\dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x-1} = \dfrac{2}{1-x^2}$

14) $\dfrac{3x+1}{x+1} - \dfrac{2x}{x+2} + \dfrac{4}{x^2+3x+2} = 0$

15) $\dfrac{2x+1}{x+3} - \dfrac{x+1}{x-4} = \dfrac{5(1-2x)}{x^2-x-12}$

16) $\dfrac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{x}}} = 3$ 17) $\dfrac{\frac{x-1}{x+1} - \frac{x+1}{x-1}}{1-\frac{x-1}{x+1}} = 2$

18) $\dfrac{1+\frac{2x}{x+1}}{1-\frac{2x}{x+1}} = \dfrac{1+\frac{x}{x-1}}{1-\frac{x}{x-1}}$ 19) $\dfrac{\frac{x}{x+2}-1}{\frac{x}{x-2}-1} = \dfrac{1}{1+\frac{x+2}{x-2}}$

20) $\dfrac{\frac{x+3}{x-3}-1}{\frac{x+3}{x-3}-\frac{x-3}{x+3}} = \dfrac{\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}}{\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x-1}}$

Exercice 4.6.
Résoudre les équations suivantes

1) $|2x+1| = 3$ 2) $3|x-1| = 5-x$

3) $|x-4| + 5x - 1 = 0$ 4) $|x-2| = |4x+1|$

5) $|x-2| + |3x+1| = 4$ 6) $2|x-1| + |x+2| = 4-x$

7) $3|x+2| - |x-1| = 5$ 8) $|x^2-4| = 3x$

9) $||x+1|-2| = 3$ 10) $|x+|x-1|| + |3x-2| = 2$

11) $|x+1| - |x-2| + |x-3| = 4$ 12) $|3x-2| - |5x-4| + |x+2| = 2$

4.6.3 Inéquations

Exercice 4.7.
Résoudre les inéquations suivantes (justifier les transformations effectuées)

1) $-4x+5>7$

2) $2x-1 \leq 3x+5$

3) $\dfrac{x}{3}-\dfrac{3x}{4} \geq 2x$

4) $\dfrac{15x-1}{5}-\dfrac{9x+2}{3} \geq -1$

5) $\dfrac{3x}{4}+\dfrac{2}{3} > \dfrac{x}{3}-\dfrac{1}{2}$

6) $\dfrac{5x}{2}-\dfrac{2x}{5} < \dfrac{-x}{10}+\dfrac{3}{5}$

7) $\dfrac{5x+1}{3}-\dfrac{3x-2}{15} \leq x+\dfrac{x+7}{15}$

8) $\dfrac{2(1-x)}{5}-\dfrac{2x-1}{15} > \dfrac{2-x}{3}+3$

9) $\dfrac{3x-1}{4}-\dfrac{7x}{12} < \dfrac{2-3x}{3}+\dfrac{42x+1}{36}$

10) $\dfrac{1-x}{12}-\dfrac{x-1}{3}-\dfrac{2x-1}{8} \leq \dfrac{-x}{8}$

11) $\sqrt{3}(x-\sqrt{2}) > 3(\sqrt{2}-x)$

12) $\sqrt{3}(x+2) \geq \sqrt{2}x+4\sqrt{3}$

13) $\sqrt{5}(\sqrt{2}x-\sqrt{5}) < \sqrt{8}(\sqrt{5}x-\sqrt{2})$

14) $\dfrac{(\sqrt{7}-\sqrt{5})x}{2}+\dfrac{1}{\sqrt{5}} > \dfrac{x}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}+\dfrac{1}{\sqrt{7}}$

15) $\dfrac{x}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} \leq \dfrac{3x}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}-1$

16) $(x+2)(x-3) < (x+5)(x-4)$

17) $(3x-1)(x+2) \geq 3x^2+9x-2$

18) $(x-3)^2 \leq (x-4)(x-2)$

19) $(3x-5)(-4x-1) > (-2x+1)(6x-4)$

20) $(x-1)^3 > (x+2)(x^2-5x+13)$

Exercice 4.8.
Résoudre les inéquations suivantes

1) $x^2 > 25$

2) $9x^2 \leq 16$

3) $x^2-5x+6 \geq 0$

4) $-x^2+7x-12 < 0$

5) $(2-5x)(3x-1) > 0$

6) $(2-6x)(1-4x) < 0$

7) $(2x+5)(x-1)(3-4x) \geq 0$

8) $(4x^2-9)(x+1) \leq 0$

9) $(2x-3)(x+2)^2 < (4-x^2)(2x-3)$

10) $x^3+x^2-x-1 < 0$

11) $x^3-3x^2 > 6-2x$

12) $6x^3-8x^2 \leq 6x-8$

13) $2x^2(x-1) \geq x(x^2+3)$

14) $2x^3-9 \leq 18x-x^2$

Exercice 4.9.
Résoudre les systèmes d'inéquations suivantes

1) $\begin{cases} 2x-5 & <0 \\ 3x+2 & \geq 0 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 13-7x & \leq 0 \\ 3x-5 & >0 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 1-5x & >8-2x \\ 7x+5 & >4x-3 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2x+1 & \geq 3x-1 \\ 2-3x & \leq -4 \end{cases}$

5) $\begin{cases} 4x+3 & <2x+1 \\ 5-4x & >8-5x \end{cases}$ 6) $\begin{cases} \frac{4x-6}{3}-x & < \frac{2x+1}{5} \\ \frac{3x}{2} & \leq \frac{2+7x}{5} \end{cases}$

Exercice 4.10.
Résoudre les inéquations suivantes

1) $|5-x|>3$ 2) $|3-4x|<4x-1$

3) $|2x-4|<2x+7$ 4) $|x+4|>2+2|x-1|$

5) $|x+1|-|x-3|<2$ 6) $|2x-1|+|x|-|3-x|>4$

4.6.4 Équations irrationnelles

Exercice 4.11.
Résoudre les équations irrationnelles suivantes

1) $3\sqrt{x-5}=\sqrt{5x+3}$ 2) $\sqrt{11-2x}-\sqrt{6-4x}=0$

3) $\sqrt{3x-1}=2\sqrt{x+1}$ 4) $\sqrt{3x^2+16}=2x$

5) $\sqrt{9x^2-5}+3x=0$ 6) $\sqrt{9x^2-16}+3x=4$

7) $\sqrt{x^2+5}+1=x$ 8) $\dfrac{2x-3}{\sqrt{x-3}}=\sqrt{4x+9}$

9) $\dfrac{2x-3}{\sqrt{x-5}}=\sqrt{4x+1}$ 10) $\sqrt{2(x^2-1)}=x+1$

11) $\sqrt{9-x^2}-\sqrt{3x-1}=0$ 12) $\sqrt{12x+4}+3x=7$

13) $\sqrt{17-16x}+3=2x$ 14) $\sqrt{2x^2+3x-5}=x+1$

15) $\dfrac{2}{\sqrt{x-1}}=\dfrac{\sqrt{x}}{x-1}$ 16) $\sqrt{2(6-x)}=1+\sqrt{5-2x}$

17) $\sqrt{x+1}=\sqrt{2x+3}-1$ 18) $\sqrt{6x+4}-2=\sqrt{3x-2}$

19) $\sqrt{4x+9}+2=\sqrt{12x+1}$ 20) $\sqrt{x+26}-3=\sqrt{7x+11}$

4.6.5 Problèmes

Exprimer les problèmes suivants à l'aide d'une équation et donner la solution du problème en résolvant l'équation trouvée.

Exercice 4.12.
En ajoutant 102 à un nombre, on obtient le même résultat qu'en retranchant 13 de son sextuple. Quel est ce nombre ?

Exercice 4.13.
La somme de la moitié, du tiers et du quart d'un nombre est égal à 91. Quel est ce nombre ?

Exercice 4.14.
La somme de cinq nombres entiers consécutifs est égale à 95. Déterminer ces nombres.

Exercice 4.15.
La somme de quatre nombres impairs consécutifs est égale à $4'032$. Déterminer ces nombres.

Exercice 4.16.
Existe-t-il cinq nombres entiers consécutifs tels que celui du milieu soit égal au quart de la somme des quatre autres ?

Exercice 4.17.
Quel nombre faut-il retrancher du numérateur et du dénominateur de la fraction $\frac{73}{115}$ pour obtenir son inverse ?

Exercice 4.18.
Partager le nombre $1'123$ en deux parties telles que la première augmentée de 21 soit égale à la seconde divisée par 21.

Exercice 4.19.
Le prix du billet d'entrée à un spectacle est de 6 francs pour les adultes et de 4 francs pour les enfants. Sachant que 71 personnes assistent à ce spectacle et que la recette est de 378 francs, déterminer le nombre d'adultes et le nombre d'enfants.

Exercice 4.20.
On doit répartir des personnes autour d'un certain nombre de tables. Si l'on place 7 personnes par table, la dernière table ne compte que deux personnes, alors que si l'on en met 6 par table, 3 personnes ne trouvent pas de place. Déterminer le nombre de personnes et le nombre de tables.

Exercice 4.21.
Déterminer un nombre entier de deux chiffres satisfaisant aux deux conditions suivantes

1. Le chiffre des dizaines est le triple de celui des unités ;
2. La différence entre ce nombre et le nombre obtenu en permutant ses deux chiffres est égal à 54.

Exercice 4.22.
Déterminer tous les nombres entiers de trois chiffres satisfaisant aux deux conditions suivantes

1. Les chiffres qui constituent le nombre sont, dans l'ordre décroissant, trois entiers consécutifs ;
2. La différence entre le nombre et le nombre lu à l'envers est égale à 198.

Exercice 4.23.
Un père partage une certaine somme en parts égales entre ses enfants. Le premier reçoit $1'000$ francs plus le dixième du reste, le deuxième reçoit $2'000$ francs plus le dixième du nouveau reste, et ainsi de suite. Déterminer le nombre d'enfants et la somme partagée.

Exercice 4.24.
Partager le nombre 62 en quatre parties telles qu'en soustrayant 1 de la première, en additionnant 2 à la deuxième, en divisant par 3 la troisième et en multipliant par 4 la quatrième, on obtienne quatre résultats égaux.

Exercice 4.25.
Le célèbre mathématicien grec Diophante vécut le sixième de sa vie en enfance et le douzième en adolescence. Après un septième de sa vie et cinq ans de mariage, il eut un fils qui n'atteignit que la moitié de l'âge de son père, qui lui survécut de quatre ans. À quel âge Diophante décéda-t-il ?

Exercice 4.26.
On place les $\frac{3}{8}$ d'un capital au taux de 4% et le reste au taux de 5%. Déterminer ce capital, sachant que l'intérêt après une année s'élève à $11'205$ francs.

Exercice 4.27.
On place le tiers d'un capital au taux de 3%, le quart au taux de 4% et le reste au taux de 12%. Après une année, on retire, capital et intérêts réunis, la somme de $16'050$ francs. Quel est ce capital ?

Exercice 4.28.
Deux cyclistes quittent au même instant deux localités distantes de 146 km et vont à la rencontre l'un de l'autre.

Après combien de temps la distance les séparant sera-t-elle de 70 km, sachant que leurs vitesses respectives sont de 17 km/h et 21 km/h ?

Exercice 4.29.
Deux voitures distantes de 12 km roulent dans la même direction, l'une à la vitesse de 75 km/h et l'autre à la vitesse de 60 km/h. Combien de temps faut-il à la plus rapide pour rejoindre l'autre ?

Exercice 4.30.
Deux localités A et B sont distantes de 340 km. À 13 heures, un véhicule part de A et se dirige vers B à la vitesse de 80 km/h. Trente minutes plus tard, un autre véhicule quitte B et se déplace en direction de A à la vitesse de 120 km/h. À quelle heure et à quelle distance de A la rencontre aura-t-elle lieu ?

Exercice 4.31.
Deux sportifs A et B courent dans la même direction sur une piste circulaire de 50 mètres de diamètre, le premier à la vitesse de 12 km/h et le second à la vitesse de 10 km/h. Lors du départ, un demi-tour sépare les coureurs. Combien de tours A doit-il effectuer pour rattraper B ?

Exercice 4.32.
À quelle heure de l'après-midi l'aiguille des heures et l'aiguille des minutes d'une montre coïncident-elles pour la première fois ? À quelle heure ces aiguilles forment-elles pour la première fois un angle droit ?

Exercice 4.33.
On dispose de deux qualités de vin, le litre de la première valant 4.70 francs. En mélangeant 930 litres de la première sorte de vin et 310 litres de la seconde, on obtient un vin qui revient à 4.45 francs le litre. Quel est le prix du litre de la seconde qualité de vin ?

Exercice 4.34.
On dispose de cinq litres d'eau-de-vie titrant 55 degrés (c'est-à-dire que 100 parties de liquide contiennent 55 parties d'alcool pur). Quelle quantité d'eau distillée faut-il ajouter pour obtenir un mélange qui titre 43 degrés ?

Exercice 4.35.
On allie une masse de 3 kg d'argent dont le titre est 0.950 avec une certaine quantité d'argent dont le titre est 0.850. Quelle masse du second alliage faut-il prendre pour obtenir un alliage dont le titre est 0.910 ?

(On rappelle que le titre d'un alliage de métal précieux est le rapport entre la masse de métal fin contenu dans cet alliage et la masse totale de l'alliage).

4.6.6 Signe des polynômes

Exercice 4.36.
Déterminer les domaines de $\mathbb{R}$ pour lesquels les polynômes suivants sont positifs

1. $p(x) = x^2 - 14x + 13$
2. $p(x) = x^2 + 20x + 19$
3. $p(x) = 11x^2 + 28x - 15$

Exercice 4.37.
Effectuer une étude du signe des polynômes suivants

1. $p(x) = x^2 + 10x + 16$
2. $p(x) = 2x^2 - 2x - 24$
3. $p(x) = 45x^2 - 39xy - 6y^2$
4. $p(x) = x^2 - 115x + 1500$
5. $p(x) = 6x^2 + 15x + 6$
6. $p(x) = 12x^2 + 34xy + 10y^2$
7. $p(x) = 2(x + 5)(2x - 3) - 5(4x^2 - 9) + 6(3 - 2x)$
8. $p(x) = 24x^3 - 72x^2 + 54x$
9. $p(x) = 4x^8 - 256x^2$
10. $p(x) = 27x^6 - 135x^5 + 225x^4 - 125x^3$

11. $p(x) = x^4 - 25x^2 + 144$
12. $p(x) = 30x^4 - 63x^3 - 30x^2$
13. $p(x) = 90x^5 - 135x^4 - 40x^3 + 60x^2$
14. $p(x) = 2x^3 - 3x^2 - 3x + 2$
15. $p(x) = 6x^3 - x^2 - 10x - 3$
16. $p(x) = (2x-1)^3 + 9(1-2x)$
17. $p(x) = (3x-2)^2 - (2x-3)^2$
18. $p(x) = 2x^3 + 2x^2 - 24x$
19. $p(x) = x^6 - 5x^5 + 6x^4 - x^2 + 5x - 6$

4.6.7 Signe des fonctions rationnelles

Exercice 4.38.
Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes et les domaines de $\mathbb{R}$ pour lesquels elles sont positives

1. $f(x) = \dfrac{x^2+6x+9}{x^2-4x+4}$
2. $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1} - \dfrac{x-2}{x-1}$.

Exercice 4.39.
Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes et effectuer une étude de signe complète. Arranger les expressions d'abord au besoin

1. $f(x) = \dfrac{x^2-6x+9}{x^2-4x+4} - 1$
2. $f(x) = \dfrac{x+9}{x+4} - \dfrac{2x-1}{2x-1}$
3. $f(x) = \dfrac{2x+1}{x+4} - \dfrac{x-2}{x-3} - 1$
4. $f(x) = \dfrac{2x^3-7x^2+2x+3}{2x^3-9x^2+10x-3}$
5. $f(x) = \dfrac{8x^3+22x^2-6x}{4x^3+27x^2-7x}$
6. $f(x) = \dfrac{3+2x-x^2}{3+4x+x^2} + \dfrac{3x^3+27x^2}{3x^3-27x} + \dfrac{x^2+5x+6}{6+x-x^2}$
7. $f(x) = \dfrac{x-1}{2x^2-5x+3} + \dfrac{2x+4}{4-x^2} + \dfrac{3x+3}{2x^2+2x}$
8. $f(x) = \dfrac{3x^3+4x}{2x^2-x} + \dfrac{8x+6x^2}{1-4x^2} - \dfrac{3x^3+3x^2-4x-4}{2x^2+3x+1}$

4.6.8 Équations et inéquations paramétriques

Exercice 4.40.
Chercher les valeurs qu'il faut attribuer aux lettres a et b pour que les équations suivantes soient impossibles ou indéterminées (aient respectivement aucune solution, ou une infinité de solutions)

1) $(a+2)x = 7$	6) $a(x-4) + 7x + 14 = 0$
2) $(a+1)x = a^3 + 1$	7) $a^2(x-a+3) = 9x$
3) $(a-1)x = a^2 - 1$	8) $a^2(x-1) - 4(x+a) = 4$
4) $(a^2-1)x = a - 1$	9) $(a+b)x = b - 1$
5) $(a^2+2a-3)x = a + 3$	10) $bx + 7b = ax + 2b$.

Exercice 4.41.
Résoudre et discuter les équations suivantes

1) $(a-1)x = 3a + 2$	3) $m(x-m) = m(x-2m)$
2) $(m-3)x = 9 - m^2$	4) $2ax + 1 = 4x + b$.

Exercice 4.42.
Résoudre et discuter les équations suivantes

1) $\dfrac{x}{a-1} - 1 = \dfrac{a}{a+1} + 1$ 3) $\dfrac{x-a}{a-b} - \dfrac{x+a}{a+b} = \dfrac{2ax}{a^2-b^2}$
2) $\dfrac{x}{a-b} + \dfrac{x}{a+b} = 2$ 4) $\dfrac{x-2}{a-2} + \dfrac{x+2}{a+2} + \dfrac{ax-4}{a^2-4} = 0.$

Exercice 4.43.
Résoudre et discuter les inéquations suivantes

1) $ax - 3 < x + 2$ 3) $(x+a)^2 > (x-a)^2 + a + 1$
2) $2ax > (a-1)x + 7$ 4) $a^2x - a < 1 - x.$

4.6.9 Inéquations irrationnelles

Exercice 4.44.
Résoudre les inéquations irrationnelles suivantes

1) $3\sqrt{3x^2+25} \geq 2x$ 2) $2 - x < \sqrt{x^2+3}$

3) $\sqrt{x+5} > \sqrt{3-x}$ 4) $2\sqrt{5x+3} - \sqrt{3x-5} < 0$

5) $\sqrt{45-x} > \sqrt{x^2+3x}$ 6) $\sqrt{4x^2+5} > 2x+3$

Chapitre 5

Systèmes du premier degré

5.1 Introduction

Si deux ou plusieurs inconnues, $x_1, x_2, \ldots$ apparaissent dans un problème, une seule équation n'est plus suffisante, en général, pour trouver les inconnues. Si l'on a une équation à n inconnues

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = c,$$

on peut uniquement isoler une des inconnues et ainsi l'exprimer en fonction des autres

$$x_1 = \frac{c - a_2x_2 - a_3x_3 - \cdots - a_nx_n}{a_1}.$$

Ainsi, on peut donner aux inconnues $x_2, x_3, \ldots, x_n$ n'importe quelle valeur, mais si x_1 prend la valeur calculée grâce à la formule ci-dessus, alors l'équation initiale est vérifiée. On dit alors que l'on a $n-1$ (de 2 jusqu'à n) *degrés de liberté*. La solution de ce problème est alors données par une infinité de possibilités et est représentée par l'ensemble défini en compréhension

$$S = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = \frac{c - a_2x_2 - \cdots - a_nx_n}{a_1} \text{ et } (x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}\}.$$

C'est-à-dire par l'ensemble de tous les n-uplets $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dont x_1 est calculé à partir des valeurs de $x_2, \ldots, x_n$, qui, eux, peuvent être quelconques, grâce à la formule trouvée.

Exemple 1

Soit à résoudre l'équation à 3 inconnues x_1, x_2 et x_3

$$3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 1.$$

On peut isoler x_3

$$x_3 = \frac{3x_1 + 2x_x - 1}{5}.$$

On voit alors que l'équation initiale possède une (double) infinité de solution, en ce sens que l'on peut choisir x_1 et x_2 comme on le veut, pour autant que l'on choisisse alors x_3 selon la formule obtenue.

La solution s'écrit ainsi

$$S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_3 = \frac{3x_1 + 2x_x - 1}{5} \text{ et } (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Pour que les n inconnues soient complètement déterminées, il faut introduire d'autres équations sur ces mêmes inconnues. En fait, chaque inconnue doit être liée aux autres par une condition. L'énoncé d'une condition permet de poser une équation. Si plusieurs conditions sont données, il y aura plusieurs équations.

Dans ce chapitre on se propose de déterminer les solutions d'un ensemble d'équations qui portent sur un certain nombre d'inconnues. On appelle *système d'équations* un ensemble d'équations qui doivent être résolues simultanément. Cela signifie que ces équations sont vraies pour des valeurs des inconnues qui sont identiques dans chaque équations : tous les x_1 de chaque équation ont la même valeur, tous les x_2 ont la même valeur, et ainsi de suite.

Dans ce chapitre, on mettra l'accent essentiellement sur les systèmes de deux et trois équations et pour respectivement deux et trois inconnues.

Nous commençons par donner la méthode générale de résolution de m équations à n inconnues du premier degré. Cette méthode est valable même pour les systèmes de plus de trois équations et plus de trois inconnues.

Soit le système de m équations à n inconnues

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \vdots & = \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = b_m. \end{cases}$$

Les indices des coefficients a_{ij} du système, indiquent

1. Le premier indice, i, représente le numéro de l'équation. On dit que c'est l'*indice de ligne*.
2. Le second indice, j, représente le numéro de l'inconnue. On dit que c'est l'*indice de colonne*.

Ces terminologies viennent de l'algèbre linéaire et plus particulièrement du calcul matriciel.

Les accolades précisent que toutes les équations doivent être satisfaites pour exactement les mêmes valeurs des inconnues. Cela signifie que si l'on donne aux inconnues une valeur bien choisie pour chacune d'elles, alors en plaçant ces valeurs dans chaque équation, celle-ci est vérifiée. Autrement dit, tout le système est une proposition dans laquelle chaque équation est liée aux autres par un **et** logique.

Le théorie générale qui est née de ce genre de problèmes est l'*algèbre linéaire*.

5.2 Méthode de substitution

Il s'agit ici de résoudre une des équations en faveur d'une des inconnues, disons x_1, comme on l'a fait au début du chapitre.

On obtient alors une expression pour x_1 qui dépend des autres inconnues.

On peut remplacer dans toutes les autres $m-1$ équations x_1 par son expression. On obtient ainsi un nouvel ensemble de $m-1$ équations qui contiennent $n-1$ inconnues, l'inconnue x_1 ne s'y trouvant plus.

On peut recommencer la procédure et isoler, d'une des équations restantes, une autre inconnue, disons x_2. En remplaçant dans toutes les autres équations x_2 par son expression, on obtient un système de $m-2$ équations à $n-2$ inconnues. De cette façon on a éliminé deux inconnues, grâce à deux équations. Il ne reste plus que $m-2$ équations et $n-2$ inconnues.

On procède ainsi jusqu'à ce que toutes les m équations sont utilisées (il reste alors $n-m$ inconnues) ou que toutes les n inconnues sont épuisées (il reste alors $m-n$ équations).

Le cas idéal est de tomber sur 1 équation à 1 inconnue que l'on peut résoudre exactement et terminer avec $m-n=0$ équations pour $n-m=0$ inconnues.

Ainsi, pour résoudre un système de m équations à n inconnues, il faut que

$$m = n,$$

cela signifie qu'il faut avoir autant d'équations que d'inconnues.

Une fois que la dernière équation est résolue, on reprend les expressions obtenues pour l'inconnue précédente qui ne dépend que de la dernière qui a été trouvée. On peut la calculer. On peut ensuite calculer l'inconnue précédente grâce au deux dernières et ainsi de suite on trouve toutes les valeurs des inconnues.

Cette méthode s'applique sans autre à tout systèmes de n équations à n inconnues.

Exemple 2

Soit à résoudre le système de deux équations à deux inconnues

$$\begin{cases} 3x + 2y & = 5 \\ 2x - y & = 3. \end{cases}$$

De la deuxième équation on peut isoler facilement l'inconnue y

$$y = 2x - 3.$$

Comme les valeurs de x et y sont les mêmes dans les deux équations, on peut remplacer dans la première équation y par $2x-3$. On obtient ainsi

$$3x+2(2x-3)=5,$$

que l'on résout

$$\begin{aligned}3x+4x-6&=5\\7x&=11\\x&=\frac{11}{7}.\end{aligned}$$

On a ainsi obtenu une solution unique pour x. On peut remplacer cette valeur dans l'expression de y pour trouver

$$y=2\frac{11}{7}-3,$$

soit

$$y=\frac{1}{7}.$$

Ainsi, la solution du système existe et est unique

$$S=\left\{\left(\frac{11}{7};\frac{1}{7}\right)\right\},$$

où la première valeur du couple est la valeur unique de x qui est correcte et la seconde est la valeur unique de y qui est correcte.

On peut également écrire la solution en utilisant l'égalité des couples.

$$(x,y)=\left(\frac{11}{7},\frac{1}{7}\right).$$

5.2.1 Systèmes sous-déterminé

Si le système contient plus d'inconnues que d'équations, $m<n$, la procédure se terminera lorsque l'on aura une seule équation avec encore $n-(m-1)>1$ (i. e. plus d'une) inconnues.

Cela signifie, essentiellement qu'il y aura plusieurs possibilités pour chaque inconnue. Soit $k=n-(m-1)$ le nombre d'inconnues restantes dans la dernière équation. On peut, comme au début du chapitre, isoler une des inconnues restantes et l'exprimer à l'aide des $k-1=n-m$ inconnues restantes.

On dit que l'on a alors $n-m$ degrés de libertés, car on peut donner arbitrairement une valeur à $n-m$ inconnues et les autres inconnues seront alors fixées.

De manière générale, un système sous-déterminé possède une infinité de solutions.

$$S=\{(x_1,\ldots,x_n)|\ldots\}.$$

Exemple 3

Soit le sysème de 2 équations à 3 inconnues

$$\begin{cases}2x+y-z&=0\\3x-5y+3z&=5\end{cases}$$

On a une inconnue en trop. Tout ce que l'on peut faire est de réduire le problème le plus possible de la façon suivante. On utilise la première équation (qui est ici la plus simple) pour isoler l'inconnue z

$$z=2x+y.$$

On insère cette expression dans la deuxième équation à la place de z et on trouve

$$3x-5y+3(2x+y)=5$$

que l'on peut arranger afin d'obtenir

$$9x-2y=5.$$

Ainsi, on a réduit le problème à une équation à une inconnue. Dans cette dernière équation, on peut isoler y et l'exprimer à partir de x

$$2y = 9x - 5$$

pour obtenir finalement

$$y = \frac{9x-5}{2}.$$

On peut maintenant remplacer le y dans l'expression de z par cette dernière expression

$$z = 2x + \frac{9x-5}{2}$$

soit

$$z = \frac{13x-5}{2}.$$

Ainsi, il y a une infinité de solutions. On peut donner à x une valeur quelconque. Dans chaque cas, si l'on donne à y et à z les valeurs calculées à partir de x

$$\begin{cases} y &= \frac{9x-5}{2} \\ z &= \frac{13x-5}{2} \end{cases}$$

alors les valeurs de x, y et z ainsi obtenues vérifient les deux équations initiales.

Ainsi on a une infinité de solutions qui sont déterminées dès que l'on donne une valeur à x.

L'ensemble solution est alors

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in \mathbb{R} \wedge y = \frac{9x-5}{2} \wedge z = \frac{13x-5}{2} \right\}.$$

5.2.2 Systèmes sur-déterminé

Si le problème est donnée par plus d'équations que d'inconnues, la procédure de résolution s'arrêtera quand on aura donné une valeur à toutes les inconnues et il restera encore $m - n$ équations.

Le problème admettra une solution seulement si les valeurs trouvées vérifient également les autres équations. Ainsi, en général, un système sur-déterminé n'admet pas de solutions

$$S = \varnothing.$$

Exemple 4

Soit le système de 3 équations à 2 inconnues

$$\begin{cases} 2x + y &= 1 \\ 3x - y &= 5 \\ 5x + 2y &= 4 \end{cases}$$

Cette fois on a une équation de trop.

De la deuxième équation on peut isoler y

$$y = 3x - 5.$$

Dans la première on obtient

$$2x + 3x - 5 = 1$$

soit

$$5x = 6$$

et on a alors

$$x = \frac{6}{5}.$$

En remplaçant dans l'expression pour y

$$y = 3\frac{6}{5} - 5 = -\frac{7}{5}.$$

Ainsi des deux premières équations on a

$$\begin{cases} x &= \frac{6}{5} \\ y &= -\frac{7}{5}. \end{cases}$$

Si l'on teste ces valeurs dans la troisième équation on trouve

$$5\frac{6}{5} - 2\frac{7}{5} = 4$$

soit

$$\frac{16}{5} = 4$$

ce qui est clairement faux. Ainsi ce système n'admet pas de solution

$$S = \varnothing.$$

5.3 Méthode de combinaisons linéaires

De façon générale, la stratégie consiste toujours à éliminer les inconnues en utilisant les équations à disposition.

La méthode des combinaisons linéaires consiste à prendre plusieurs équations indépendantes et à les multiplier séparément par des nombres biens choisis. En additionnant alors les nouvelles équations, on obtient une nouvelle équation dans laquelle on a éliminé une ou plusieurs inconnues.

On procède ainsi jusqu'à obtenir une équation à une inconnue que l'on peut résoudre exactement. En procédant de cette façon pour toutes les inconnues, on trouve toutes les valeurs cherchées.

L'exemple suivant illustre cette démarche.

Exemple 5

Soit le système de 3 équations à 3 inconnues

$$\begin{cases} 3x - y + z &= 2 \\ x + y + z &= 5 \\ 2x + y - z &= 3 \end{cases}$$

On voit que dans la première équation figure $-y$ et dans la deuxième équation $+y$. Ainsi, si l'on additionne les membres de droites ensembles et les membres de gauche ensembles, les y disparaissent. On obtient une nouvelle équation sans terme en y

$$(3x - y + z) + (x + y + z) = 2 + 5$$

soit

$$4x + 2z = 7. \tag{5.1}$$

On peut également éliminer les y en composant la deuxième et la troisième équation du système. Par exemple en soustrayant la troisième à la deuxième on obtient

$$(x + y + z) - (2x + y - z) = 5 - 3$$

soit

$$-x + 2z = 2. \tag{5.2}$$

On obtient ainsi un sous-système de deux équations à deux inconnues

$$\begin{cases} 4x + 2z &= 7 \\ -x + 2z &= 2 \end{cases}$$

On obtient directement une équation pour x en soustrayant ces deux équations

$$(4x + 2z) - (-x + 2z) = 7 - 2$$

soit

$$5x = 5$$

d'où

$$x = 1.$$

En remontant les équations on peut utiliser la deuxième équation du sous-système pour trouver z

$$2z = 2 + x$$

d'où

$$z = \frac{2 + x}{2} = \frac{3}{2}.$$

et enfin, avec la première équation du système de départ

$$y = 3x + z - 2 = 3 + \frac{3}{2} - 2 = \frac{5}{2}.$$

Ainsi, on a trouvé une solution unique

$$\begin{cases} x &= 1 \\ y &= \frac{5}{2} \\ z &= \frac{3}{2} \end{cases}$$

Un autre exemple illustre encore cette méthode

Exemple 6

Soit le système de deux équations à deux inconnues

$$\begin{cases} 3x + 2y &= 10 \\ 2x + 5y &= 3 \end{cases}$$

On peut éliminer les y en multipliant la première équation par 5 et la deuxième par 2 et en soustrayant ces deux résultats

$$5(3x + 2y) - 2(2x + 5y) = 5 \cdot 10 - 2 \cdot 3$$

pour obtenir

$$11x = 44.$$

On obtient alors

$$x = 4.$$

On peut maintenant éliminer x en faisant

$$2(3x + 2y) - 3(2x + 5y) = 2 \cdot 10 - 3 \cdot 3$$

soit

$$-11y = 11,$$

d'où

$$y = -1.$$

Ainsi la solution est

$$\begin{cases} x &= 4 \\ y &= -1 \end{cases}$$

Reprenons ce dernier exemple en illustrant une manière de procéder qui évite les détails fastidieux de tout expliquer

Exemple 7

Reprenons le système. On commence par numéroter les équations afin de les rappeler plus simplement

$$\begin{cases} 3x + 2y &= 10 \quad (1) \\ 2x + 5y &= 3 \quad (2) \end{cases}$$

La première étape s'écrit alors simplement (après avoir effectué les calculs dans les deux membres)

$$5(1) - 2(2): \qquad 11x = 44.$$

d'où

$$x = 4.$$

Et la seconde étape devient

$$2(1) - 3(2): \qquad -11y = 11,$$

d'où

$$y = -1.$$

On conclut avec la solution

$$\begin{cases} x &= 4 \\ y &= -1 \end{cases}$$

Enfin une autre manière de représenter le même calcul est fournie par l'exemple suivant

Exemple 8

Toujours avec le même système

$$\begin{cases} 3x + 2y &= 10 \\ 2x + 5y &= 3 \end{cases}$$

On explique la première opération en notant les multiplications proposées. Il est alors sous-entendu que dès que la multiplication est faite, on opère une addition des deux résultats, membre à membre

$$\left\{\begin{array}{rl|r} 3x + 2y &= 10 & 5 \\ 2x + 5y &= 3 & -2 \end{array}\right.$$

et on obtient

$$11x = 44,$$

d'où

$$x = 4.$$

Pour extraire y on procède ainsi

$$\left\{\begin{array}{rl|r} 3x + 2y &= 10 & 2 \\ 2x + 5y &= 3 & -3 \end{array}\right.$$

et on obtient

$$-11y = 11,$$

d'où

$$y = -1.$$

On conclut encore avec la solution
$$\begin{cases} x & = 4 \\ y & = -1. \end{cases}$$

5.3.1 Indépendance linéaire

Soit un système de m équations à n inconnues. On dit que la i^e équation est linéairement indépendante des autres si l'on ne peut pas trouver de combinaison linéaire de ces dernières équations qui donne l'équation i.

Par exemple, dans les systèmes des exemples précédents de cette section, les équations de ces systèmes sont linéairement indépendantes les unes des autres.

Par contre, dans l'exemple des systèmes sur-déterminés où l'on avait 3 équations pour 2 inconnues, le système proposé est un système dans lequel les équations sont linéairement dépendantes. Pour être plus précis, les membres de gauches, qui contiennent les inconnues, sont linéairement dépendants
$$\begin{cases} 2x + y & = 1 \\ 3x - y & = 5 \\ 5x + 2y & = 4 \end{cases}$$
En effet, si l'on multiplie le membre de gauche de la première équation par $\frac{11}{5}$ et le membre de gauche de la deuxième équation par $\frac{1}{5}$ et que l'on ajoute les résultats on obtient
$$5x + 2y$$
dans le membre de gauche de la nouvelle équation. Par contre, le membre de droite devient
$$\frac{11}{5} \cdot 1 + \frac{1}{5} \cdot 5 = \frac{16}{5}.$$
Ainsi, l'équation qui résulte de cette combinaison linéaire est
$$5x + 2y = \frac{16}{5}.$$
On se retrouve alors avec deux équations qui ont le même membre de gauche, mais pas le même membre de droite. Ce qui ne peut jamais être le cas. Ainsi, $S = \varnothing$.

Si la dernière équation du système était
$$5x + 2y = \frac{16}{5},$$
cette dernière équation n'aurait rien ajouté de plus au système et aurait pu être enlevée, sans changer le problème.

Ainsi, par exemple, le système
$$\begin{cases} 2x + y & = 1 \\ 3x - y & = 5 \\ 5x + 2y & = \frac{16}{5} \end{cases}$$
contient une équation inutile et on peut enlever celle que l'on veut. En effet, on peut utiliser deux de ces équations pour obtenir la troisième, cela signifie bien que l'information contenue dans la troisième se trouve déjà dans les deux autres. Ce système est alors équivalent au système
$$\begin{cases} 2x + y & = 1 \\ 3x - y & = 5 \end{cases}$$
qui admet la solution unique
$$\begin{cases} x & = \frac{6}{5} \\ y & = -\frac{7}{5}. \end{cases}$$
Nous verrons qu'il est facile de déterminer si le système que l'on doit résoudre est un système dont les équations sont indépendantes ou pas grâce aux déterminants, dans la section suivante.

5.4 Méthode de Cramer

Dans ce qui suit nous allons déterminer une méthode qui permet d'obtenir directement les solutions d'un système de deux équations à deux inconnues ou de trois équations à trois inconnues en utilisant une formule calculée une fois pour toute. Ce qui est remarquable est que la formule est du même genre dans ces deux cas.

5.4.1 Système de deux équations à deux inconnues

Soit un système de deux équations à deux inconnues. Dans le cas général, on peut l'écrire sous la forme

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y & = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y & = b_2 \end{cases}$$

où $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1$ et b_2 sont des nombres quelconques.

Les nombres $a_{11}, \ldots, a_{22}$ sont les coefficients de l'équation. Les nombres b_1 et b_2 forment le vecteur du membre de droite du système.

Pour résoudre ce système, on peut utiliser la méthode des combinaisons linéaires pour éliminer une inconnue du problème. Ainsi, on peut multiplier la première équation par a_{22} et la seconde par a_{12} et soustraire les résultats pour éliminer y et obtenir une équation à une seule inconnue, x

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y & = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y & = b_2 \end{cases}\left|\begin{array}{l} a_{22} \\ a_{12}. \end{array}\right.$$

On obtient alors l'équation

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x = a_{22}b_1 - a_{12}b_2. \tag{5.3}$$

De la même façon, on peut éliminer x

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y & = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y & = b_2 \end{cases}\left|\begin{array}{l} a_{21} \\ a_{11}. \end{array}\right.$$

pour obtenir

$$(a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22})y = a_{21}b_1 - a_{11}b_2.$$

Ce coefficient est l'opposé du coefficient de x.En changeant les signes des deux membres on trouve

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})y = a_{11}b_2 - a_{21}b_1. \tag{5.4}$$

Les équations 5.3 et 5.4 ont le même coefficient pour x et y respectivement. Pour résoudre ces deux équations il faut distinguer deux cas, puisque les coefficients de a et de y sont égaux, au signe près.

1^{er} cas : Le coefficient de x et y est non nul

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0.$$

Dans ce cas on peut continuer la résolution et trouver x et y en divisant les deux membres de ces équations par ce coefficient

$$x = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

et

$$y = \frac{a_{21}b_1 - a_{11}b_2}{a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22}}.$$

Ainsi, le système admet, dans ce cas, une solution unique

$$\begin{cases} x & = \dfrac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \\ \\ y & = \dfrac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \end{cases} \tag{5.5}$$

On donnera, un peu plus bas, un moyen simple de retenir ces formules.

2^e cas : Le coefficient de x et de y est nul. Dans ce cas, le système revient au système

$$\begin{cases} 0 \cdot x & = a_{22}b_1 - a_{12}b_2 \\ 0 \cdot y & = a_{11}b_2 - a_{21}b_1 \end{cases}$$

On se retrouve alors avec deux possibilités

1. Les membres de gauche sont nuls

$$a_{22}b_1 - a_{12}b_2 = 0 \quad \text{et} \quad a_{11}b_2 - a_{21}b_1 = 0.$$

Dans ce cas, le système est équivalent au système

$$\begin{cases} 0 \cdot x & = 0 \\ 0 \cdot y & = 0. \end{cases}$$

En observant les coefficients du système, on constate alors que

$$a_{22}b_1 - a_{12}b_2 = 0 \Longrightarrow \frac{b_1}{b_2} = \frac{a_{12}}{a_{22}}$$

et que

$$a_{11}b_2 - a_{21}b_1 \Longrightarrow \frac{b_1}{b_2} = \frac{a_{11}}{a_{21}}$$

et pour les coefficients de x et y

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0 \Longrightarrow \frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{a_{12}}{a_{22}}$$

On voit alors que

$$\frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} = \frac{b_1}{b_2} = k$$

autrement dit, que les équations sont proportionnelles.
Si on appelle k ce rapport de proportionnalité, comme ci-dessus, on a

$$a_{11} = ka_{21}, \ a_{12} = ka_{22}, \text{ et } b_1 = kb_2$$

donc le système est composé de deux équations équivalentes

$$\begin{cases} ka_{21}x + ka_{22}y & = kb_2 \\ a_{21}x + a_{22}y & = b_2 \end{cases}$$

Ce dernier système est toujours vérifié et l'ensemble solution est une partie de $\mathbb{R}^2$ de la forme

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \in \mathbb{R} \text{ et } y = \frac{b_2 - a_{21}x}{a_{22}}\}$$

ou

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x = \frac{b_2 - a_{22}y}{a_{21}} \text{ et } y \in \mathbb{R}\}$$

selon que l'on isole x ou y.
Autrement dit, tout couple (x, y) de valeurs de $\mathbb{R}^2$ est une solution du problème.
Dans le cas où tous les coefficients sont nuls, on a clairement

$$S = \mathbb{R}^2.$$

2. Les membres de gauches ne sont pas nuls

$$a_{22}b_1 - a_{12}b_2 \neq 0 \quad \text{et} \quad a_{11}b_2 - a_{21}b_1 \neq 0.$$

Dans ce cas, le système est équivalent au système

$$\begin{cases} 0 \cdot x & \neq 0 \\ 0 \cdot y & \neq 0. \end{cases}$$

Ce qui n'arrive jamais et le système n'admet aucune solution

$$S = \varnothing.$$

Avant de discuter plus avant sur ces solutions, nous allons discuter de la notion de déterminant.

5.4.2 Le déterminant

En algèbre linéaire, les systèmes d'équations prennent la forme de tableaux (que l'on appelle *matrices*) que l'on multiplie avec des règles bien définies.

En particulier, il y a une matrice qui contient tous les coefficients du système. Par exemple dans le cas du système de deux équations à deux inconnues, il y a la matrice du système qui est carrée de deux lignes et deux colonnes (on dit 2×2)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Le membre de gauche s'écrit par une matrice colonne 2×1, un vecteur,

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

de même que le vecteur inconnu

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Définition 1

Le *déterminant* d'un système de deux équations à deux inconnues, $\det(A)$ est le nombre

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

C'est le produit des termes de la diagonale qui va d'en haut à gauche à en bas à droite moins le produit de la diagonale qui va d'en bas à gauche à en haut à droite. C'est la règle dite de *Sarrus*.

Si l'on remplace la colonne des coefficient de x, la première colonne, par le vecteur $\mathbf{b}$, la matrice A devient la matrice

$$N_x = \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{pmatrix}$$

et le déterminant de N_x devient

$$\det(N_x) = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22} - b_2a_{12}.$$

On reconnaît ici le numérateur x de la solution 5.5 du système.

Si on remplace la deuxième colonne de A, les coefficients de y, par le vecteur $\mathbf{b}$, on obtient la matrice

$$N_y = \begin{pmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{pmatrix}$$

dont le déterminant est

$$\det(N_y) = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{21}b_1 - a_{11}b_2.$$

Ce n'est rien d'autre que le numérateur de y dans la solution 5.5 du système.

Avec ces nouvelles notations, le système de deux équations à deux inconnues

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y & = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y & = b_2 \end{cases}$$

se résout en calculant d'abord le déterminant du système $\det(A)$. On distingue alors les cas

1. $\det(A) \neq 0$
2. $\det(A) = 0$

Dans le premier cas, le système admet une solution unique

$$\begin{cases} x & = \dfrac{\det(N_x)}{\det(A)} \\ \\ y & = \dfrac{\det(N_y)}{\det(A)} \end{cases}$$

Le second cas est à rapprocher de la discussion des équations linéairement indépendantes. Si le déterminant du système est nul, cela signifie que les membres de gauche des équations sont linéairement dépendantes. Le système admet alors une solution seulement si les membres de droite présentent la même dépendance.

1. Une infinité de solution, si
$$\det(N_x) = \det(N_y) = 0.$$
Alors
$$S \subset \mathbb{R}^2 \text{ ou } S = \mathbb{R}^2.$$
2. Aucune solution sinon. Alors
$$S = \varnothing.$$

5.4.3 Système de trois équations à trois inconnues

Les systèmes de trois équations du premier degrés à trois inconnues peuvent se résoudre exactement de la même façon que les systèmes de deux équations à deux inconnues.

Soit le système
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3. \end{cases}$$
La matrice A des coefficients du système est
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$
Ce déterminant est calculé grâce à la règle de Sarrus pour les matrices 3×3 (cette règle ne vaut que pour les matrices carrées de dimension 2 et 3, mais ne se généralise pas pour les matrices supérieures) : on recopie la matrice en répétant les deux premières colonnes à droite
$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22}. \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$
On effectue le produit des termes dans chacune des trois diagonales qui descendent de gauche à droite ($a_{11}a_{22}a_{33}$, $a_{12}a_{23}a_{31}$ et $a_{13}a_{21}a_{32}$). On additionne ces résultats. On effectue le produit des termes dans chacune des diagonales montantes de gauche à droite ($a_{31}a_{22}a_{13}$, $a_{32}a_{23}a_{11}$ et $a_{33}a_{21}a_{12}$) et on soustrait tous ces résultats à la somme précédente. Le déterminant de la matrice 3×3 est alors
$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}.$$
Après de longs et fastidieux calculs, mais qui ne présentent pas de difficulté, on montre que le système admet une solution unique si et seulement si le déterminant du système est non nul
$$\det(A) \neq 0.$$
Dans ce cas, on peut calculer les numérateurs comme dans le cas des systèmes de deux équations à deux inconnues, en créant les matrices
$$N_x = \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \qquad N_y = \begin{pmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{pmatrix}$$
et
$$N_z = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{pmatrix}.$$
Les solutions du système sont alors données par
$$\begin{cases} x &= \dfrac{\det(N_x)}{\det(A)} \\[2ex] y &= \dfrac{\det(N_y)}{\det(A)} \\[2ex] z &= \dfrac{\det(N_z)}{\det(A)} \end{cases}.$$
Dans le cas où le déterminant du système est nul, on a les même cas à traiter que dans les système de deux équations à deux inconnues.

5.5 Ce qu'il faut connaître

1. Stratégie de résolution d'un système par élimination/substitution.
2. Méthode de résolution par combinaisons linéaires.
3. Méthode de Cramer pour les systèmes 2×2 et 3×3.
4. Calcul des déterminants des systèmes 2×2 et 3×3.
5. Traitement des cas sur-déterminés et sous-déterminés.

5.6 Exercices

5.6.1 Méthode d'élimination ou substitution

Exercice 5.1.
Résoudre les systèmes suivants

1) $\begin{cases} 3x+4y &= 25 \\ 5y &= 15 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x-3y+25 &= 0 \\ 4x-y-25 &= 0 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x+y &= 19 \\ 2x-y &= 2 \end{cases}$

4) $\begin{cases} x+3y &= 11 \\ 5y-3(x-1) &= 68 \end{cases}$ 5) $\begin{cases} 12x-5y &= 29 \\ 4x-3y &= 11 \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 12x+11y &= 6 \\ 3y-2x &= 28 \end{cases}$

7) $\begin{cases} x+y &= 28 \\ 3x-11y &= 8y-48 \end{cases}$ 8) $\begin{cases} 2x+5y &= 69 \\ y-4(x-7) &= 67-3x \end{cases}$ 9) $\begin{cases} 5x &= y \\ 12x-2y &= 10 \end{cases}$

10) $\begin{cases} 72x+14y &= 330 \\ 63x+7y &= 273 \end{cases}$ 11) $\begin{cases} 2x+3y &= 4 \\ 3y+10x &= 44 \end{cases}$ 12) $\begin{cases} 21x+8y+66 &= 0 \\ 28x-23y-13 &= 0 \end{cases}$

Exercice 5.2.
Résoudre les systèmes suivants

1) $\begin{cases} x+\dfrac{3}{7}y &= 17 \\ y-\dfrac{5}{8}x &= 16 \end{cases}$ 6) $\begin{cases} \dfrac{4x+15}{3}-\dfrac{3y-5}{5} &= x \\ \dfrac{2y+3x}{4}+\dfrac{y+15}{5} &= y \end{cases}$

2) $\begin{cases} \dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{4} &= 9 \\ \dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{5} &= 7 \end{cases}$ 7) $\begin{cases} \dfrac{x-y}{3}-\dfrac{1}{4}\left(x-\dfrac{10-2y}{3}\right) &= 3 \\ \dfrac{x-5y}{5}+\dfrac{x+2}{2} &= x-4 \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dfrac{4x-5}{2y-3} &= 3 \\ \dfrac{3x+5}{y+1} &= 4 \end{cases}$ 8) $\begin{cases} \dfrac{3}{5}x+\dfrac{4}{10}y &= \dfrac{x-y}{5} \\ \dfrac{10(2x+3)}{11}-2\left(y-\dfrac{3x-5}{8}\right) &= 60 \end{cases}$

4) $\begin{cases} \dfrac{x-1}{8}+\dfrac{y-2}{5} &= 2 \\ 2x+\dfrac{2y-5}{3} &= 21 \end{cases}$ 9) $\begin{cases} \dfrac{13}{3+x+2y}+\dfrac{3}{6+4x-5y} &= 0 \\ \dfrac{6x-5y+4}{3} &= \dfrac{3x+2y+1}{19} \end{cases}$

5) $\begin{cases} \dfrac{x-4}{3}-\dfrac{3y+4}{10} &= x-y \\ \dfrac{2x-5}{5}-\dfrac{2y-4}{4} &= x-12 \end{cases}$ 10) $\begin{cases} \dfrac{x+5}{x+1} &= \dfrac{y-9}{y+7}+\dfrac{112}{(x+1)(y+7)} \\ 2x+10 &= 3y+1 \end{cases}$

Exercice 5.3.
Résoudre les systèmes suivants

1) $\begin{cases} 4x+3y+6z &= 41 \\ 8x+5y &= 31 \\ 7y &= 21 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3z-2y-x &= 18 \\ 2y+3z-2x &= 36 \\ 5x+2y-z &= 10 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 2x-3y+2z &= 41 \\ 3y-2z &= 13 \\ 5x-3y &= 22 \end{cases}$

4) $\begin{cases} x+4y-z &= 1 \\ 2x-3y+2z &= 21 \\ 2y-x+z &= 17 \end{cases}$ 5) $\begin{cases} 7x-4y-5z &= 56 \\ 3y-2z &= 13 \\ 5x-3y &= 22 \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 3x-y+z &= 29 \\ x+3y+30z &= 6 \\ x-y+z &= 17 \end{cases}$

7) $\begin{cases} 6x-y+3z &= 38 \\ 5x-2y+z &= 24 \\ 3x+5z &= 28 \end{cases}$ 8) $\begin{cases} 2x+3y+4z &= 53 \\ 3x+5y-4z &= 2 \\ 4x+7y-2z &= 31 \end{cases}$ 9) $\begin{cases} x+y+z &= 25 \\ x-y+z &= 5 \\ x+2z &= 2y-10 \end{cases}$

10) $\begin{cases} x+y+z &= 0 \\ (b+c)x+(a+c)y+(a+b)z &= 0 \\ bcx+acy+abz &= 1 \end{cases}$ 11) $\begin{cases} x-y-z &= 6 \\ x-2y-3z &= 10 \\ 5x+6y+z &= 2 \end{cases}$ 12) $\begin{cases} x+ay+a^2z &= a^3 \\ x+by+b^2z &= b^3 \\ x+cy+c^2z &= c^3 \end{cases}$

Exercice 5.4.
Déterminer dans les systèmes suivants lesquels sont indéterminés et lesquels sont impossibles

1) $\begin{cases} x-2y &= 3 \\ 3x-6y &= 9 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x+y-z &= 5 \\ 3x-2y+z &= 4 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 7x-5 &= 6y+3 \\ y+7x &= 7y+12 \end{cases}$

4) $\begin{cases} 5x-2y &= 7 \\ 10x+3y &= 7 \\ x-5y &= 7 \end{cases}$ 5) $\begin{cases} 2(x+y) &= 5 \\ \dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{3} &= 1 \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 3x-2y &= 5 \\ x-3y &= 4 \\ 7x+5y &= 2 \end{cases}$

7) $\begin{cases} 3x+2y &= 4 \\ \dfrac{x+3}{x-2} &= \dfrac{y+2}{y+1} \end{cases}$ 8) $\begin{cases} 4x-3y &= 11 \\ 4x+7y+z &= 1 \\ 4x+2y &= 6 \end{cases}$ 9) $\begin{cases} y-x &= 0 \\ 3x &= 3y+7 \end{cases}$

10) $\begin{cases} x+y+z &= 9 \\ x+2y+3z &= 14 \\ 3x+2y+z &= 22 \end{cases}$ 11) $\begin{cases} \dfrac{x-3}{y+2} &= \dfrac{2}{3} \\ \dfrac{x+3}{y-2} &= -\dfrac{3}{2} \end{cases}$ 12) $\begin{cases} 2x-y+z &= 16 \\ 3x+2y-z &= 5 \\ 9x-y+2z &= 40. \end{cases}$

Exercice 5.5.
Résoudre les systèmes d'équations suivants

1) $\begin{cases} x+y+z+v &= 10 \\ 2x-y+z &= 3 \\ 4y+3z &= 17 \\ 7y-3z &= 5 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x+y+2z+3v &= 52 \\ x-y+z-2v &= 0 \\ 2x-3y+2z-v &= 4 \\ 3x+5z-4v &= 44 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 2x-y+2z-v &= 20 \\ 5x-2y+v &= 11 \\ 4x+y-3v &= 20 \\ 2x-3y+2v &= 3 \end{cases}$

4) $\begin{cases} 4y-5x-v-3z &= -6 \\ 3z-2x+v+y &= 12 \\ 2z+y-5x-v &= 7 \\ 2x-3y+3z+4v &= -5 \end{cases}$ 5) $\begin{cases} 5x+y+2z+3v &= 51 \\ 3x-4y+2z+v &= 12 \\ x+4y-v &= 10 \\ x-2y+4v &= 27 \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x-y-z-v &= 8 \\ 2x+y+z-u &= 8 \\ y+z-u-v &= 0 \\ z+2x-u-y &= 16 \\ x-3v+2u-3z &= 4. \end{cases}$

5.6.2 Méthode des combinaisons linéaires

Reprendre les systèmes des exercices précédents 5.1, 5.2, 5.3, 5.4 et 5.5 et les résoudre par la méthode de substitution. Comparer les deux méthodes.

5.6.3 Méthode de Cramer

Reprendre les systèmes des exercices précédents 5.1, 5.2, 5.3 et 5.4 et les résoudre par la méthode de Cramer. Comparer les différentes méthodes.

5.6.4 Problèmes

Exercice 5.6.
Comment peut-on payer la somme de 270 francs avec 30 pièces, les unes de 5 francs et les autres de 20 ?

Exercice 5.7.
Deux ouvriers ont fait ensemble 151 mètres d'ouvrage, en travaillant respectivement 7 1/2 jours et 5 3/7 jours. S'ils avaient travaillé 8 1/5 jours et 7 1/2 jours, ils auraient fait 187 mètres. Combien de mètres chaque ouvrier fait-il par jours ?

Exercice 5.8.
En ajoutant 36 à un nombre de deux chiffres, on obtient le nombre renversé ; le chiffre des dizaines augmenté de 2 vaut le 3/4 du chiffre des unités. Quel est ce nombre ?

Exercice 5.9.
Un nombre de deux chiffres est tel qu'en y ajoutant 9, on obtient le nombre renversé et qu'en le diminuant de 9, le reste égale 4 fois la somme des chiffres. Quel est ce nombre ?

Exercice 5.10.
A et B travaillent à un ouvrage qu'ils peuvent terminer en 30 jours, et qui leur sera payé $1'152$ francs. Quand ils sont à moitié, A interrompt pendant 8 jours et B pendant 4 jours. À cause de cela, il leur faut 5 1/2 jours de plus. Combien chacun recevra-t-il ?

Exercice 5.11.
Il y a 4 ans, l'âge du père était le quadruple de celui de son fils ; dans 10 ans, il n'en sera plus que le double. Quels sont les âges actuels ?

Exercice 5.12.
Pierre dit à Simon : « J'ai deux fois l'âge que vous aviez quand j'avais l'âge que vous avez, et quand vous aurez l'âge que j'ai, la somme de nos deux âges égalera 63 ans. »Quels sont leurs âges ?

Exercice 5.13.
Il y a 7 ans, la moitié de l'age de mon oncle surpassait le mien de 2 ans. Aujourd'hui, mon âge surpasse de 5 ans les 2/5 de celui de mon oncle. Quels sont nos âges ?

Exercice 5.14.
Deux sommes placées l'une à 4 % et l'autre à 5 % produisent ensemble un revenu annuel de 400 francs. Si l'une était placée au taux de l'autre, elles donneraient 410 francs. Quelles sont ces deux sommes ?

Exercice 5.15.
Deux sommes placées à 5 % donnent 550 francs d'intérêt par an ; en diminuant le taux de la première et en augmentant celui de la seconde, chacun de 0.25 %, l'intérêt serait augmenté de 2.50 francs. Quelles sont ces deux sommes ?

Exercice 5.16.
Deux sommes, l'une de $5'000$ francs et l'autre de $6'000$ francs, rapportent ensemble 525 francs par an. En les plaçant l'une au taux de l'autre, l'intérêt ne serait que de 520 francs. Quels sont les deux taux ?

Exercice 5.17.
Deux capitaux A et B ont été placés comme suit : le quart de A et les 3/5 de B à 4 % ; les restes à 5 %. Le premier placement donne $2'160$ francs d'intérêts simples en 3 ans. et l'autre $5'200$ francs en 4 ans. Trouver les deux capitaux.

Exercice 5.18.
Jean a placé $12'600$ francs de plus que Louis et à 1 % de plus ; aussi retire-t-il 730 francs d'intérêts de plus par an. Alphonse place $3'000$ francs de plus que Louis et à 2 % de plus ; son revenu surpasse de 380 francs celui de Louis. Déterminer les capitaux placés et les taux.

Exercice 5.19.
Deux capitaux ont comme somme 6′000 francs. Le premier est placé à 1 % de plus que le deuxième et ils produisent ensemble 264 francs d'intérêts par an. Si le premier était placé au taux du second, et réciproquement, ils produiraient 276 francs d'intérêts. Quelles sont les deux sommes et à quels taux sont-elles placées ?

Exercice 5.20.
Un marchand a du vin de deux qualités : en mêlant 3 hl du meilleur avec 5 hl du moins bon, le litre vaut 24.60 francs. En mêlant 3 3/4 hl du meilleur avec 7 1/2 hl de l'autre, le litre revient à 24 francs. Quel est le prix du litre de chaque espèce ?

Exercice 5.21.
On a un certain nombre de litres de vin. Si l'on y ajoute 6 litres d'eau, le prix du litre diminue de 3.60 francs ; si l'on ajoute 10 litres d'eau, le prix du litre diminue de 5.60 francs. Déterminer le nombre de litres de vin et le prix du litre.

Exercice 5.22.
21 kg d'argent ne pèsent dans l'eau que 19 kg, et 9 kg de cuivre n'y pèsent que 8 kg. Un alliage d'argent et de cuivre de 148 kg perd 14 2/3 kg dans l'eau. Déterminer les quantités d'argent et de cuivre qu'il contient.

Exercice 5.23.
On a deux lingots de même poids et de titres[1] différents. Si on fond le premier avec le quart du second, on obtient un alliage au titre de 0.936. Si l'on fond le premier avec la moitié du second, on obtient un alliage au titre de 0.920. Déterminer le titre de chaque lingot.

Exercice 5.24.
Alice et Bob jouent deux parties ; à la première, Alice gagne autant d'argent qu'elle en avait, moins 8 francs ; elle en a alors deux fois autant que Bob. À la seconde partie, Bob gagne autant qu'il lui restait, moins 4 francs. Ils ont alors la même somme. Combien d'argent avait chacun ?

Exercice 5.25.
Une somme d'argent a été partagée également entre un certain nombre de personnes. S'il y avait eu 6 personnes de plus, chacun eût reçu 2 francs de moins. Au contraire, s'il y avait eu 3 personnes de moins, chacune aurait reçu 2 francs de plus. Déterminer le nombre de personnes, la part de chacune et la somme partagée.

Exercice 5.26.
On demandait à quelqu'un son âge, ainsi que celui de son père et de son grand-père. Il répondit : « Mon âge et celui de mon père font ensemble 56 ans ; mon père et mon grand-père ont ensemble 100 ans ; enfin mon âge et celui de mon grand-père font ensemble 80 ans. »Déterminer l'âge de chacun.

Exercice 5.27.
Trois fontaines A, B et C coulent dans un bassin ; A et B le remplissent en 1 h 10 min ; A et C en 84 min ; B et C en 2 h 20 min. Quel temps faut-il :

1. à chaque fontaine
2. aux trois fontaines à la fois

pour remplir le bassin ?

Exercice 5.28.
Trois artilleurs A, B et C ont tirés des coups de canon. A et B ont tirés ensemble 20 coups de plus que C ; B et C, 32 coups de plus que A ; A et C, 28 coups de plus que B. Calculer le nombre de coups tirés par chaque artilleur.

Exercice 5.29.
Un nombre de trois chiffres a 16 pour somme de ses chiffres ; en y ajoutant le nombre renversé, on obtient 1′211 ; en le retranchant du nombre renversé, on obtient 297. Quel est ce nombre ?

1. C'est-à-dire la fraction en masse de métal pur, autrement dit, la masse de métal pur divisée par la masse totale du métal.

Chapitre 6

Trinôme du second degré

6.1 Racines du trinôme du second degré

Un trinôme du second degré est un polynôme de degré 2 dans sa variable. Si x est la variable, le polynôme de degré 2 ne contient alors que des termes en x^2, en x et un terme sans x. Il ne contient donc que trois termes et a la forme suivante

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

Le nombre a est le coefficient de x^2, le nombre b celui de x et c est le terme constant (sans x.) Ainsi, un polynôme de degré 2, ne contient au plus que trois termes : c'est un *trinôme.*

Pour que le polynôme soit de degré 2, il faut clairement que $a \neq 0$, sans quoi, le polynôme serait de degré au plus égal à 1.

Dans les sections suivantes nous allons d'abord chercher les racines du trinôme du second degré, si elles existent. Une racine (ou un zéro) d'une fonction, est la valeur que doit prendre la variable x pour que la fonction s'annule : $f(x) = 0$.

Après un exemple introductif, nous donnerons la méthode générale. Cette méthode nous donne, de manière exhaustive, les solutions du trinôme du second degré si elles existent. Des exemples illustrent ensuite, l'utilisation de la méthode.

Dans un second temps, nous étudierons plus en détails le comportement de l'application trinôme du second degré, selon les valeurs des paramètres a, b et c.

6.1.1 Introduction

Soit le trinôme du second degré défini par $f(x) = 3x^2 + 6x - 18$. Cherchons les racines de ce trinôme, c'est-à-dire les valeurs de la variable x qui annulent l'application f, i. e. telles que

$$f(x) = 0.$$

Dans notre cas, cela revient à chercher les valeurs de x telles que

$$3x^2 + 6x - 18 = 0.$$

Mettons le coefficient de x^2 en évidence

$$3(x^2 + 2x - 6) = 0.$$

Ce qui implique

$$x^2 + 2x - 6 = 0.$$

Les deux premiers termes (ceux en x^2 et en x) sont les mêmes que ceux du développement du carré $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$. Nous pouvons donc remplacer ces termes par $(x+1)^2 - 1 = x^2 + 2x$. Nous obtenons alors

$$(x+1)^2 - 1 - 6 = 0,$$

soit

$$(x+1)^2 - 7 = 0.$$

En utilisant l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ on trouve

$$\left((x+1) + \sqrt{7}\right)\left((x+1) - \sqrt{7}\right) = 0.$$

Nous avons ainsi les deux possibilités

$$\begin{cases} (x+1)+\sqrt{7}=0 \\ \text{ou} \\ (x+1)-\sqrt{7}=0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1-\sqrt{7} \\ \text{ou} \\ x=-1+\sqrt{7}. \end{cases}$$

Ce que nous pouvons encore écrire, de manière plus compacte

$$x_{1,2}=-1\pm\sqrt{7}.$$

Ce qui signifie que les racines (ou zéros) du trinôme donné sont

$$x_1=-1-\sqrt{7} \quad \text{et} \quad x_2=-1+\sqrt{7},$$

comme on peut le vérifier par le calcul direct en remplaçant x par x_1 ou x_2 dans le trinôme donné. Il est évident que $x_1 < x_2$.

6.1.2 Méthode générale

Soit un trinôme du second degré de la forme $f(x)=ax^2+bx+c$, où $a\neq 0$. Pour chercher les racines du trinôme utilisons la méthode qui vient d'être illustrée. Comme $a\neq 0$, on peut écrire

$$ax^2+bx+c=0$$
$$a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=0$$

d'où

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0. \tag{6.1}$$

Les deux premiers termes sont les mêmes que ceux du développement de

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}.$$

Ainsi :

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}=x^2+\frac{b}{a}x.$$

L'équation (6.1) devient alors

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}=0.$$

En mettant les deux derniers termes au même dénominateur, on obtient

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}=0.$$

Nous définissons le *discriminant*

$$\boxed{\Delta=b^2-4ac}$$

On a alors :

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}=0. \tag{6.2}$$

Il convient maintenant de distinguer trois cas

1. $\underline{\mathbf{\Delta>0}}$: Si $\Delta>0$ on peut le considérer comme un carré. Dans ce cas, le membre de gauche de l'équation (6.2) est une différence de deux carrés et en utilisant l'identité remarquable $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$, on a

$$\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)=0 \tag{6.3}$$

Ce qui n'est possible que si l'une des deux parenthèses est nulle

$$\begin{cases} x + \dfrac{b}{2a} + \dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a} = 0 \\ \text{ou} \\ x + \dfrac{b}{2a} - \dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{b}{2a} - \dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a} \\ \text{ou} \\ x = -\dfrac{b}{2a} + \dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}$$

Nous avons ainsi deux solutions distinctes

$$\boxed{\begin{cases} x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \\ \text{et} \\ x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}. \end{cases}}$$

L'équation (6.3) devient alors

$$(x - x_1)(x - x_2) = 0.$$

Le trinôme se factorise et s'écrit :

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2).$$

2. $\underline{\mathbf{\Delta = 0}}$: Dans ce cas, le dernier terme de l'équation (6.2) s'annule et l'équation devient

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0.$$

On a alors une solution unique, que l'on nomme *double* et qui vaut :

$$\boxed{x_0 = -\frac{b}{2a}.}$$

Le trinôme est un carré parfait, et son signe est celui de a

$$f(x) = a(x - x_0)^2.$$

3. $\underline{\mathbf{\Delta < 0}}$: Si $\Delta < 0$ alors $-\frac{\Delta}{2a} > 0$. Le membre de gauche de l'équation (6.2) est une somme de deux nombres positifs. Cette somme ne peut jamais s'annuler. Il n'y a donc pas de solution dans ce cas. Le trinôme ne s'annule jamais et s'écrit comme la somme d'un carré parfait avec un nombre positif

$$f(x) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{-\Delta}{4a^2}\right)\right).$$

Les valeurs prises par f seront toujours plus grandes ou plus petites que $\frac{-\Delta}{4a}$ selon que $a > 0$ ou $a < 0$ respectivement.

Exemple 1

Soit le trinôme du second degré $f(x) = 3x^2 + 5x - 7$. Pour trouver les racines de ce trinôme, nous commençons par calculer le discriminant

$$\Delta = b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-7) = 25 + 84 = 109.$$

Le discriminant est positif, il y a donc deux racines distinctes

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 - \sqrt{109}}{6}$$

et

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 + \sqrt{109}}{6}.$$

Un simple calcul montre que

$$f(x) = 3(x - x_1)(x - x_2).$$

Exemple 2

Soit le trinôme du second degré $f(x) = 2x^2 - 2x + \frac{1}{2}$.

Le discriminant de ce trinôme vaut

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 4 - 4 = 0.$$

Le trinôme admet donc une racine double

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2 \cdot 2} = \frac{1}{2}.$$

De plus on peut écrire le trinôme sous la forme d'un carré parfait

$$f(x) = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2.$$

Il en découle que ce trinôme a toujours une valeur positive ou nulle.

Exemple 3

Soit le trinôme du second degré $f(x) = 2x^2 - 3x + 7$.

Le discriminant vaut

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 7 = 9 - 56 = -47.$$

Le discriminant est négatif. Le trinôme n'admet aucune racine réelle. On peut toutefois l'écrire sous la forme

$$f(x) = 2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{47}{8}.$$

Nous pouvons donc affirmer que $f(x) \geq \frac{47}{8}$ quelle que soit la valeurs de x. De plus, cette valeur est la plus petite que peut prendre le polynôme. C'est un minimum.

6.2 Signe du trinôme

Dans la section précédente, nous avons vu comment savoir si un trinôme du second degré a des racines et, le cas échéant, comment les calculer. Nous avons grossièrement ébauché une étude de la factorisation et du signe des trinômes. Dans ce paragraphe nous allons étudier plus en détails la factorisation du trinôme et son signe, selon les valeurs des paramètres a, b et c.

6.2.1 Factorisation du trinôme

Nous reprenons successivement les trois cas selon le signe du discriminant.

1. $\underline{\boldsymbol{\Delta > 0}}$: Le trinôme admet alors deux racines réelles distinctes x_1 et x_2. Chacune des parenthèses du membre de gauche de l'équation (6.3) s'écrit respectivement $(x - x_1)$ et $(x - x_2)$. Comme ce membre est obtenu après division de $f(x)$ par a, pour retrouver $f(x)$ il faut multiplier ce produit par a

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2).$$

2. $\underline{\boldsymbol{\Delta = 0}}$: Le trinôme admet une racine réelle double x_0 et le trinôme se factorise sous la forme

$$f(x) = a(x - x_0)^2.$$

3. $\underline{\boldsymbol{\Delta < 0}}$: Le trinôme n'admet pas de racine réelle, mais peut s'écrire sous la forme

$$f(x) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a^2}\right).$$

   où la parenthèse contient la somme de deux termes positifs. Ainsi la parenthèse est strictement positive.

6.2.2 Signe du trinôme

Dans l'ordre, reprenons les trois cas, selon le signe du discriminant.

1. **$\Delta > 0$** : Pour déterminer le signe du trinôme, nous devons étudier le signe de chacun des facteurs de $f(x)$. Le forme factorisée de f est
$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2).$$
Il y a trois facteurs dont il faut étudier le signe. Nous faisons cette étude de signe à l'aide du tableau des signes

x		x_1		x_2	
$x - x_1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x - x_2$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(x - x_1)(x - x_2)$	$+$	0	$-$	0	$+$

« Nous en concluons que le signe de $f(x)$ est partout le même que celui de a, sauf entre les racines. »

2. **$\Delta = 0$** : Lorsque le discriminant est nul, nous avons vu que f se factorise sous la forme d'un carré parfait
$$f(x) = a(x - x_0)^2.$$
Le carré étant toujours positif, le signe de f est toujours le même que le signe de a.

3. **$\Delta < 0$** : Dans ce cas, nous avons vu que $f(x)$ s'écrit comme le produit de a avec une somme de deux nombres positifs. C'est donc le produit de a avec un nombre positif. Ainsi, le signe de $f(x)$ est toujours celui de a.

6.2.3 Croissance et extrema

Extrema

Dans les trois cas, qui dépendent de la valeur de Δ, nous pouvons toujours écrire
$$f(x) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{-\Delta}{4a^2}\right)\right).$$
Le premier terme de la grande parenthèse est clairement toujours positif (le second dépend évidemment du signe de Δ, comme nous l'avons vu lors de la recherche des racines). Il s'annule lorsque $x = -\frac{b}{2a}$. La grande parenthèse prend alors sa valeur minimale $\frac{-\Delta}{4a^2}$. Si $a > 0$, la valeur de f sera alors minimale. Si $a < 0$ elle sera alors maximale. Ainsi

$\underline{a > 0}$: Le trinôme du second degré atteint son minimum lorsque $x = -\frac{b}{2a}$ et on a
$$f_{\min} = f(-\frac{b}{2a}) = -\frac{\Delta}{4a}.$$
$\underline{a < 0}$: Le trinôme du second degré atteint son maximum lorsque $x = -\frac{b}{2a}$ et on a
$$f_{\max} = f(-\frac{b}{2a}) = -\frac{\Delta}{4a}.$$
Ces résultats ne dépendent pas du signe de Δ.

Croissance

Soit x_1 et x_2 deux nombres quelconques. Supposons que $\{x_1, x_2\} \subset]-\infty, -\frac{b}{2a}[$. x_1 et x_2 sont plus petits (on dit aussi : à gauche) de $x_m = -\frac{b}{2a}$ et tels que
$$x_1 < x_2.$$
On a alors
$$x_1 + \frac{b}{2a} < x_2 + \frac{b}{2a} < 0.$$
Il en découle que
$$\left(x_1 + \frac{b}{2a}\right)^2 > \left(x_2 + \frac{b}{2a}\right)^2 > 0.$$

Soit

$$\frac{f(x_1)}{a} = \left(x_1 + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{-\Delta}{4a^2}\right) > \left(x_2 + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{-\Delta}{4a^2}\right) = \frac{f(x_1)}{a}.$$

Ainsi

$$\frac{f(x_1)}{a} > \frac{f(x_2)}{a}.$$

Si $a > 0$: Pour obtenir f, on doit multiplier cette inégalité par le nombre positif a, ce qui respecte l'inégalité. On a alors $f(x_1) > f(x_2)$.
Ainsi, en prenant des nombres de plus en plus grands ($x_1 < x_2$) on obtient des valeurs de plus en plus petites ($f(x_1) > f(x_2)$.) Donc la fonction est décroissante à gauche de $x_m = -\frac{b}{2a}$.

Si $a < 0$: Lors de la multiplication par a, on doit renverser le sens de l'inégalité. On obtient alors $f(x_1) < f(x_2)$.
Ce qui signifie qu'en prenant des valeurs de plus en plus grandes, on obtient des valeurs de plus en plus grandes ($f(x_1) < f(x_2)$). Donc le trinôme est croissant à gauche de $x_m = -\frac{b}{2a}$.

De même, lorsque $\{x_1, x_2\} \subset] - \frac{b}{2a}, \infty[$ et que $x_1 < x_2$, nous obtenons

$$\frac{f(x_1)}{a} < \frac{f(x_2)}{a}.$$

Si $a > 0$: Pour obtenir f, on doit multiplier cette inégalité par le nombre positif a, ce qui respecte l'inégalité. On a alors $f(x_1) < f(x_2)$. Donc la fonction est croissante à droite de $x_m = -\frac{b}{2a}$.

Si $a < 0$: Lors de la multiplication par a, on doit renverser le sens de l'inégalité. On obtient alors $f(x_1) > f(x_2)$. Donc le trinôme est décroissant à droite de $x_m = -\frac{b}{2a}$.

Ainsi, en guise de résumé, nous pouvons dire que

> Si $a > 0$: La fonction admet un minimum en $x_m = -\frac{b}{2a}$ qui vaut $f(x_m) = -\frac{\Delta}{4a}$. Le trinôme est décroissant à gauche de x_m et croissant à droite de x_m.
>
> Si $a < 0$: La fonction admet un maximum en $x_m = -\frac{b}{2a}$ qui vaut $f(x_m) = -\frac{\Delta}{4a}$. Le trinôme est croissant à gauche de x_m et décroissant à droite de x_m.

6.2.4 Graphe du trinôme du second degré

Représentation graphique d'une fonction

On représente usuellement les fonctions et les applications à l'aide d'un diagramme cartésien, du même type que celui qui permet de représenter les relations. Pour le trinôme du second degré, qui est un polynôme, donc une application, l'ensemble de départ est $\mathbb{R}$ et l'ensemble d'arrivée est dans $\mathbb{R}$. Ainsi, si f est un trinôme du second degré, c'est une application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, qui, à tout nombre réel associe un autre réel, noté $f(x)$. On le note

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x). \end{aligned}$$

En disposant les points du graphe de l'application, nous obtenons une courbe. Dans le cas d'un trinôme du second degré, cette courbe est une *parabole*. Le *graphe* de l'application est l'ensemble

$$G = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = f(x)\}.$$

Ainsi, le graphe est formé des couples de la forme $(x, f(x))$. La représentation graphique d'une application f, se construit à l'aide du diagramme cartésien comme sur la Fig.-6.1.

Supposons par exemple que l'on a une application f_a définie de $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ vers $\{0, 1, 2, 3\}$ par le graphe

$$G = \{(-2, 2), (-1, 3), (0, 1), (1, 2), (2, 1)\},$$

alors sa représentation graphique sera celle de la figure Fig.-6.1. C'est un ensemble de points "discrets" (séparés les uns des autres) qui image le graphe G.

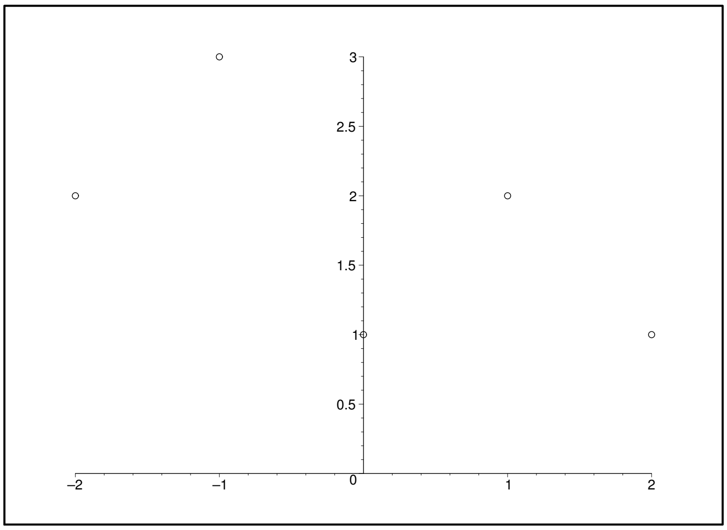


FIGURE 6.1 – Représentation graphique de l'application f_a.

Considérons maintenant une application plus "riche," définie sur toutes les valeurs d'un intervalle de nombres. Soit f_b l'application définie de $[-2, 2]$ vers $\mathbb{R}$ par

$$f_b(x) = x^5 - x^4 - 3x^3 + 2x^2 + x + 1.$$

Son graphe contient trop de couples, il n'est plus possible de l'écrire en extension. On le représente alors sous la forme d'une représentation graphique. Pour l'application f_b le graphe prend la forme de la figure Fig.-6.2.

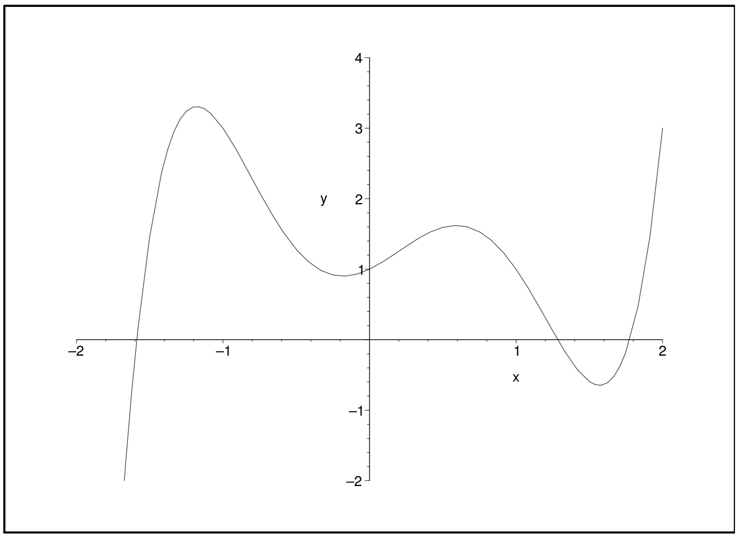


FIGURE 6.2 – Représentation graphique de l'application f_b.

Graphe du trinôme

Nous avons vu dans la section précédente que le trinôme du second degré $f(x) = ax^2 + bx + c$ admet soit un minimum (si $a > 0$), soit un maximum (si $a < 0$.) S'il admet un minimum, il est décroissant avant le minimum et croissant après. S'il admet un maximum, il est croissant avant et décroissant après le maximum. La courbe du graphe du trinôme du second degré porte le nom de *parabole*. Ainsi, le graphe de la fonction a une des formes décrites ci-dessous. Comme premier exemple nous donnons le graphe du trinôme

$$f_1(x) = x^2 - 2x - 2.$$

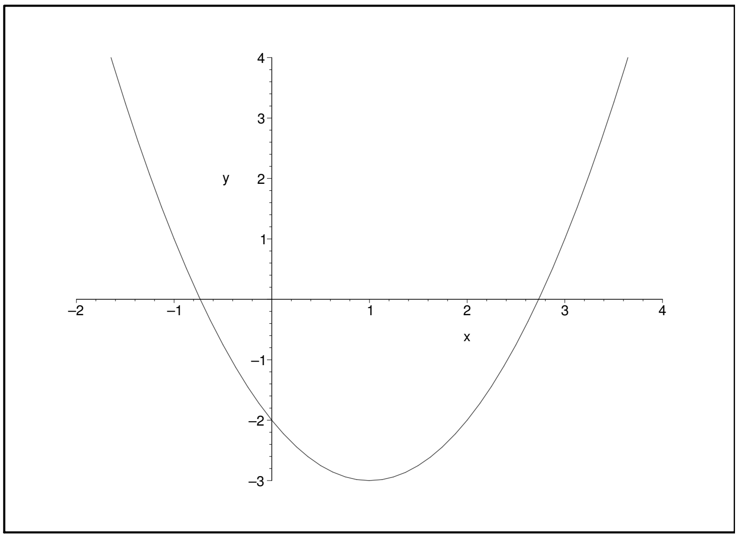


FIGURE 6.3 – Forme du graphe du trinôme du second degré $f_1(x) = x^2 - 2x - 2$.

Le discriminant de ce trinôme est

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 4 + 8 = 12.$$

Le discriminant étant positif, le trinôme admet deux racines

$$\begin{cases} x_1 & = \frac{2-\sqrt{12}}{2} = 1 - \sqrt{3} \simeq -0.73205\ldots \\ x_2 & = \frac{2+\sqrt{12}}{2} = 1 + \sqrt{3} \simeq 2.73205\ldots. \end{cases}$$

D'autre part, nous avons vu que nous pouvons écrire $f_1(x)$ sous la forme

$$f_1(x) = (x-1)^2 - 3,$$

d'où nous voyons que la plus petite valeur que peut prendre $f_1(x)$ est -3 lorsque $x_m = 1$. C'est son minimum. Nous avons vu dans la section précédente que $f_1(x)$ est décroissante pour les valeurs de x inférieures à $x_m = 1$ (à gauche de x_m) et croissante pour les autres valeurs (à droite de x_m).

Tout ceci se voit immédiatement dans le graphe du trinôme $f_1(x)$ de la figure Fig.-6.3. Remarquons que le graphe traverse l'axe horizontal Ox en $x_1 \simeq -0.7\ldots$ et en $x_2 \simeq 2.7\ldots$. Remarquons en outre que son minimum est bien atteint pour la valeur $x_m = 1$ et que l'on a bien $f_1(1) = -3$.

Modifions la valeur du terme constant et faisons le graphe de

$$f_0(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2.$$

Cette fois le discriminant est nul et le trinôme f_0 n'admet qu'une racine, une racine double $x_0 = 1$. De plus, son minimum est atteint toujours pour la valeur $x_m = 1$. Ainsi, en changeant le terme constant, nous n'avons pas changé la position du minimum. Par contre sa valeur a changé. Elle vaut maintenant $f(x_m) = 0$. Puisque $x_m = x_0$ comme nous pouvons le voir sur le graphique de f_0 dans la Fig.-6.4.

Nous remarquons que le graphe ne touche l'axe horizontal Ox qu'en $x_0 = 1$. Nous remarquons en outre que son minimum est encore atteint pour la valeur $x_m = 1$ et que l'on a bien $f_0(1) = 0$.

Augmentons encore la valeur du terme constant :

$$f_2(x) = x^2 - 2x + 3.$$

Le trinôme a, cette fois, un discriminant négatif : $\Delta = -8$. Il n'admet donc plus de racine, il ne s'annule jamais. On peut toutefois l'écrire sous la forme :

$$f_2(x) = (x-1)^2 + 2.$$

Nous voyons qu'il est toujours supérieur ou égal à 2, et qu'il ne prend la valeur 2 que si $x = 1$. C'est son minimum. On a alors $x_m = 1$. La valeur du trinôme en x_m est donc $f_2(x_m) = 2$. La figure Fig.-6.5 résume ces propriétés de f_2. Nous remarquons cette fois que le graphe ne touche plus l'axe horizontal. Nous voyons en outre que son minimum est toujours à la valeur $x_m = 1$ et que l'on a $f_2(1) = 2$.

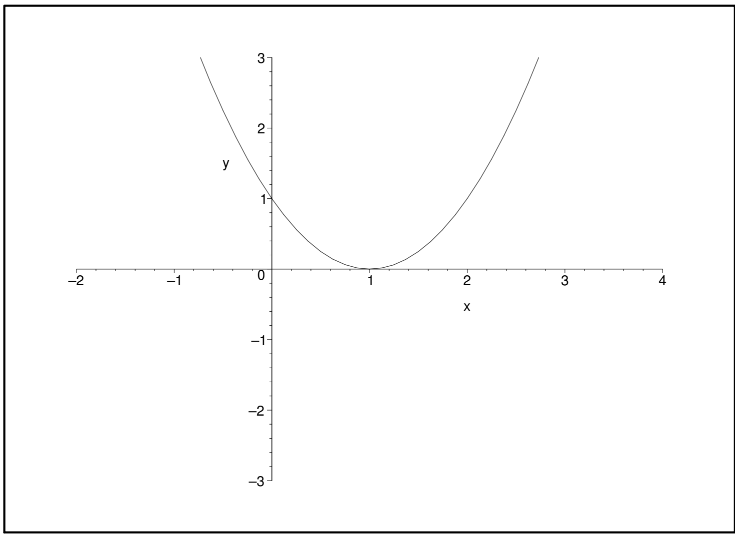


FIGURE 6.4 – Forme du graphe du trinôme du second degré $f_0(x) = x^2 - 2x + 1$.

Il est clair, sur ces trois exemples, que le rôle de la constante est de faire monter ou descendre la graphe. Plus la constante c du trinôme est grande, plus le graphe est haut. Autrement dit, plus la constante c est grande, plus la valeur $f(x)$ prise par le trinôme est grande.

Avant de passer à la suite, observons l'effet d'un changement de signe du coefficient de x^2. Soit f_3 l'application définie par :

$$f_3(x) = -x^2 - 2x + 3.$$

Nous avons alors

$$f_3(x) = -(x^2 + 2x - 3) = -\left((x+1)^2 - 4\right).$$

Cette fois le trinôme admet un maximum qui est atteint en $x_m = -1$ et prend la valeur $f_3(-1) = 4$. Le trinôme est croissant à gauche de $x_m = -1$ et décroissant à droite de $x_m = -1$. Le discriminant vaut $\Delta = 16$, d'où les racines $x_1 = -3$ et $x_2 = 1$, comme on peut le voir sur le graphe de la Fig.-6.6. Nous pouvons voir dans le graphe que le principal effet du changement de signe du terme en x^2 dans f_2 a été d'inverser le sens de la courbe et de déplacer l'extremum (qui est passé d'un minimum à un maximum) de manière symétrique par rapport à l'axe vertical y. Le minimum en $x_m = 1$ s'est transformé en un maximum en $x_m = -1$. Remarquons toutefois que la valeur maximale de f_3 est 4 tandis que la valeur minimale de f_2 est 2.

6.2.5 Relations de Viète et nombres complexes

Relations de Viète

Supposons que le trinôme $f(x) = ax^2 + bx + c$ admet les racines x_1 et x_2. On peut alors écrire le trinôme sous la forme factorisée

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2).$$

En développant cette expression on trouve

$$f(x) = a(x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2).$$

Comme cette expression doit être égale au trinôme donné, on doit avoir

$$a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}) = a(x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2).$$

En identifiant les termes en x, on trouve que

$$-(x_1 + x_2) = \frac{b}{a},$$

et en identifiant les termes constants

$$x_1x_2 = \frac{c}{a}.$$

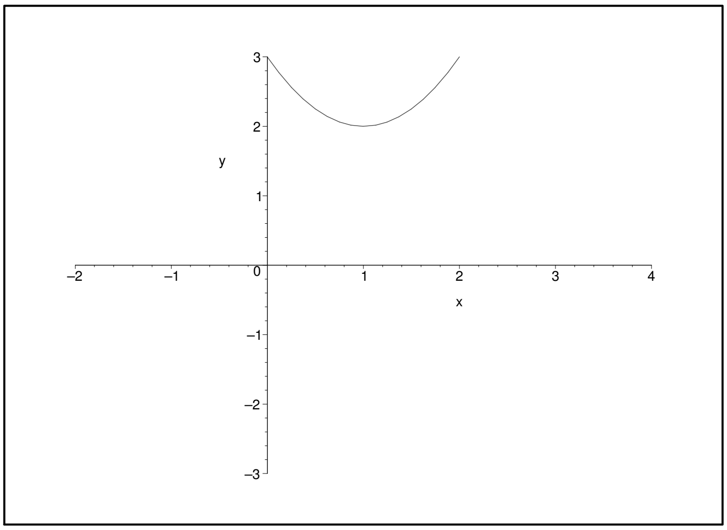


FIGURE 6.5 – Forme du graphe du trinôme du second degré $f_2(x) = x^2 - 2x + 3$.

Nous avons ainsi trouvé les relations de Viète

$$\boxed{\begin{cases} x_1 + x_2 & = -\dfrac{b}{a} \\ \\ x_1 x_2 & = \dfrac{c}{a}. \end{cases}}$$

Ces relations peuvent être utilisées pour trouver, dans les cas simples, les racines du trinôme, connaissant la somme et le produit des racines. Elles permettent de factoriser simplement un trinôme.

Nombres complexes

C'est un fait remarquable que même lorsque le discriminant d'un trinôme est négatif, on peut calculer la somme et le produit des racines du trinôme. Pourtant, il découle des paragraphes précédents que ces racines n'existent pas dans l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$.

On peut légitimement se poser la question : comment peut-on calculer la somme et le produit des racines, si les racines n'existent pas ?

La réponse à cette question réside dans le fait que ces racines n'existent pas dans $\mathbb{R}$. En effet, les racines d'une trinôme quelconque existent toujours dans l'ensemble des *nombres complexes* $\mathbb{C}$.

Que sont les nombres complexes ?

Imaginons qu'il existe un nombre, appelons-le i (pour imaginaire,) [1] qui soit tel que son carré vaut :

$$i^2 = -1.$$

Reprenons alors le cas où $\Delta < 0$. On a alors :

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{-\Delta}{4a^2}\right) = 0.$$

Ce que l'on peut maintenant écrire

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - i^2 \left(\frac{-\Delta}{4a^2}\right) = 0$$

1. On trouve parfois la notation j pour ce nombre, notamment en électricité, où la lettre i est utilisée pour représenter l'intensité du courant électrique.

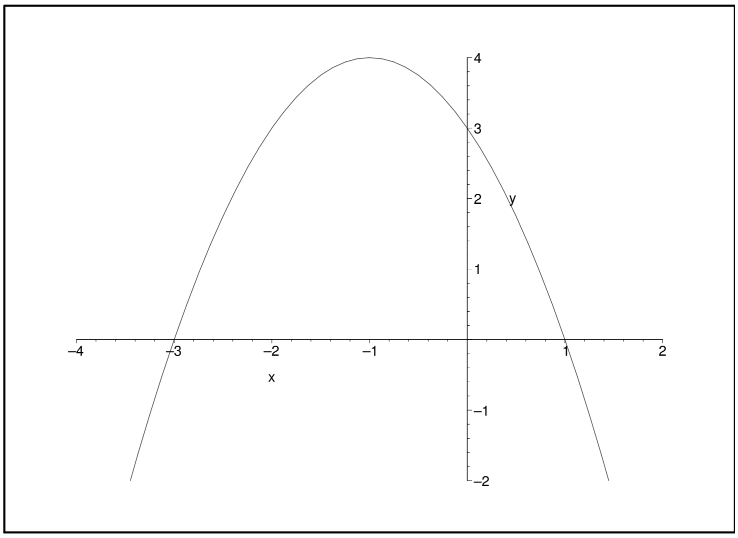


FIGURE 6.6 – Forme du graphe du trinôme du second degré $f_3(x) = -x^2 - 2x + 3$. Remarquer que le graphe traverse l'axe horizontal x en $x_1 = -3$ et en $x_2 = 1$. Remarquer en outre que l'application admet un maximum pour la valeur $x_m = -1$ et que l'on a $f_3(-1) = 4$. Constater que le changement de signe du coefficient de x^2 a provoqué l'inversion de la courbe et le déplacement de l'extremum.

soit

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{i^2}{4a^2}(-\Delta)\right) = 0$$

qui est une différence de deux carrés. On a alors

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-b}{2a} - i\dfrac{\sqrt{-\Delta}}{2a} \\ \text{et} \\ x_2 = \dfrac{-b}{2a} + i\dfrac{\sqrt{-\Delta}}{2a}. \end{cases}$$

Ces expressions sont de la forme :

$$\begin{aligned} &x_1 = A - Bi \\ &\text{et} \\ &x_2 = A + Bi \end{aligned}$$

où $A = \frac{-b}{2a}$ et $B = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$ sont des nombres réels. Les nombres de cette forme sont appelés nombres complexes. L'ensemble des nombres complexes se note $\mathbb{C}$. Le carré d'un nombre complexe n'est pas forcément positif. De plus on a bien

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 = 2A = -\frac{b}{a}, \\ \text{et :} \\ x_1 x_2 = A^2 + B^2 = \frac{b^2 - \Delta}{4a^2} = \frac{c}{a}. \end{aligned}$$

De manière générale, on définit l'ensemble des nombres complexes par

$$\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$$

où un couple $(a, b) \in \mathbb{C}$ représente le nombre complexe $z = a + bi = (a, b)$.

Les nombres complexes (A, B) pour lesquels $B = 0$ sont identifiés aux nombres réels $A = (A, 0)$. Ainsi, dans un certain sens, on peut écrire[2] : $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

L'étude détaillée des nombres complexes demande un chapitre à part entière. Ce paragraphe n'avait que la prétention de présenter la notion de nombre complexe.

2. Bien qu'en toute rigueur on devrait écrire $\mathbb{R} \times \{0\} \subset \mathbb{C}$.

6.3 Problèmes résolus

Exemple 4

Étudier les signes et les racines du trinôme

$$p(x) = 3x^2 - 2x + 1$$

Le discriminant réduit de ce trinôme est clairement négatif

$$\Delta' = b'^2 - ac = 1 - 3 = -2$$

Ainsi le trinôme n'a pas de racine. Il ne s'annule jamais et a toujours le même signe. Le signe du trinôme est celui du coefficient dominant, à savoir 3, donc le trinôme est toujours positif.

Exemple 5

Étudier les signes et les racines du trinôme

$$p(x) = 3x^2 - 5x - 1$$

et le factoriser.

Le discriminant du trinôme est positif

$$\Delta = b^2 - 4ac = 25 + 12 = 37$$

Le trinôme admet deux racines distinctes

$$\begin{cases} x_1 & = \frac{5+\sqrt{37}}{6} \\ x_2 & = \frac{5-\sqrt{37}}{6} \end{cases}$$

Le signe du trinôme est toujours celui du coefficient dominant sauf entre les racines. Dans notre cas, le trinôme est toujours positif, sauf entre les racines. La forme factorisée du trinôme est

$$p(x) = 3(x - x_1)(x - x_2)$$

6.4 Exercices

6.4.1 Racines du trinôme du second degré

Exercice 6.1.
Appliquer la méthode de l'introduction pour dire si les trinômes du second degré suivants ont des racines. Le cas échéant, calculer ces racines et factoriser le trinôme

1. $x^2 - x + 1$
2. $x^2 + x - 1$
3. $3x^2 + x - 1$

Exercice 6.2.
Résoudre les équations suivantes

1) $x^2 + 5x + 4 = 0$	6) $x^2 - 3x + 10 = 0$
2) $x^2 + 9x + 14 = 0$	7) $x^2 - 3x - 28 = 0$
3) $x^2 - 6x + 5 = 0$	8) $x^2 + 10x + 25 = 0$
4) $x^2 - 6x + 8 = 0$	9) $x^2 + 9x - 10 = 0$
5) $x^2 - 3x - 18 = 0$	10) $x^2 + x + 1 = 0$

Exercice 6.3.

Résoudre les équations suivantes

1) $3x^2 - 9x + 6 = 0$	5) $7x^2 - 49x - 126 = 0$
2) $3x^2 - 15x + 18 = 0$	6) $3x^2 + 24x + 21 = 0$
3) $4x^2 - 4x + 8 = 0$	7) $2x^2 - 12x - 14 = 0$
4) $2x^2 - 14x + 12 = 0$	8) $7x^2 + 21x - 28 = 0$

Exercice 6.4.
Résoudre les équations suivantes

1. $(5x - 2)(x + 3) = 7(x - 1)$
2. $(5x - 3)(x - 5) = (2x + 5)^2 + 90$
3. $(x - 4)^2 + (x - 3)^2 = (x - 2)(3x - 16)$
4. $14x^2 - (2x - 11)(5x + 4) - 33x = 32$
5. $(x + 1)(4x - 5) + (x + 2)(3x - 2) = (x + 3)(3x - 1)$
6. $(x + 3)(2x - 7) - (x - 5)^2 - 2(x + 2)(x - 4) = 0$

6.4.2 Signe du trinôme du second degré

Exercice 6.5.
Factoriser les trinômes suivants et faire une étude de signe
a) $f(x) = x^2 + 5x - 6$ b) $f(x) = 3x^2 - x - 2$ c) $f(x) = -4x^2 + 5x - 1$

6.4.3 Croissance du trinôme du second degré

Exercice 6.6.
Montrer que si $a > b > 0$, alors $a^2 > b^2 > 0$. Ensuite montrer que si $a < b < 0$, alors $a^2 > b^2 > 0$.

Exercice 6.7.
Chercher l'extremum des trinômes suivants. Est-ce un maximum ou un minimum ? Calculer la valeur du trinôme à l'extremum.

a) $f(x) = x^2 - 3x + 1$	b) $f(x) = -2x^2 + x - 3$	c) $f(x) = 4x^2 - 1$
d) $f(x) = 4x^2 + 5x - 1$	e) $f(x) = 2 + 5x - x^2$	f) $4x - 3x^2 + 3$.

6.4.4 Relations de Viète et nombres complexes

Exercice 6.8.
Calculer les valeurs du paramètre m pour que l'équation $3x^2 - 10x + m = 0$ admette

a) Deux racines distinctes.	b) Deux racines positives distinctes.
c) Une racine nulle.	d) Deux racines inverses.
e) Deux racines de signe contraire.	f) Pas de racine.

Exercice 6.9.
Calculer les valeurs du paramètre m pour que l'équation $x^2 + 4x + m + 2 = 0$ admette

a) Deux racines distinctes.	b) Deux racines négatives distinctes.
c) Deux racines identiques.	d) Une racine nulle.
e) Deux racines de signe contraire.	f) Pas de racine.

Exercice 6.10.
Calculer les valeurs du paramètre m pour que l'équation $(m + 4)x^2 - 2(m - 2)x + m - 4 = 0$ admette

a) deux racines distinctes.	b) deux racines opposées.
c) une racine nulle.	d) deux racines inverses.

Exercice 6.11.
Trouver deux nombres x_1 et x_2 qui ont respectivement pour somme et pour produit S et P dans chacun des cas suivants

$$a) \begin{cases} S &= 17 \\ P &= 30 \end{cases} \quad b) \begin{cases} S &= 1 \\ P &= -56 \end{cases} \quad c) \begin{cases} S &= \frac{24}{5} \\ P &= -1 \end{cases} \quad d) \begin{cases} S &= \frac{4}{5} \\ P &= \frac{-2}{5} \end{cases}$$

Exercice 6.12.
Á l'aide des relations de Viète, calculer les racines et factoriser les trinômes suivants

$$a)\ x^2 - 15x + 57 \qquad b)\ x^2 - 9x + 18 \qquad c)\ 2x^2 - 3x - 2$$

Exercice 6.13.
Former une équation du second degré ayant pour racine

$$a)\ \begin{cases} x_1 &= 7 \\ x_2 &= -3 \end{cases} \quad b)\ \begin{cases} x_1 &= -2 \\ x_2 &= -5 \end{cases} \quad c)\ \begin{cases} x_1 &= 3 \\ x_2 &= \frac{1}{3} \end{cases} \quad d)\ \begin{cases} x_1 &= 3+\sqrt{2} \\ x_2 &= 3-\sqrt{2}. \end{cases}$$

Exercice 6.14.
Dans l'équation $x^2 - mx + 36 = 0$, déterminer les valeurs du paramètre m pour que
a) $x_1 = x_2$ b) $x_1 = -x_2$ c) $x_1^2 + x_2^2 = 184$ d) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{5}{12}$.

Exercice 6.15.
Dans l'équation $x^2 - 5x + m = 0$, déterminer les valeurs du paramètre m pour que
a) $x_1 = \frac{1}{x_2}$ b) $x_1 - x_2 = 3$ c) $x_1 = 2x_2$ d) $2x_1 - x_2 = 7$.

6.4.5 Problèmes supplémentaires

Exercice 6.1

Résoudre les équations suivantes.

1. $x^2 - 7x + 10 = 0$
2. $x^2 - 2x - 63 = 0$
3. $-x^2 + x + 12 = 0$
4. $x^2 - x - 1722 = 0$
5. $2x^2 - x - 3 = 0$
6. $9x^2 + 6x + 1 = 0$
7. $3x^2 - 4x + 2 = 0$
8. $x^2 - 10x + 22 = 0$
9. $9x^2 + 6x - 2 = 0$
10. $9x^2 - 16 = 0$
11. $x^2 - 3x + 1 = 0$
12. $\sqrt{3}x^2 - 3x = 0$
13. $2x^2 - 6x - 3 = 0$
14. $25x^2 - 20x + 4 = 0$
15. $2x^2 + 5x + 2 = 0$
16. $8x^2 - 20x + 11 = 0$
17. $14x^2 + 27x - 20 = 0$
18. $225x^2 - 210x + 49 = 0$
19. $7x^2 - 18x + 11 = 0$
20. $7x^2 - 18x + 12 = 0$
21. $8x^2 - 12x + 1 = 0$
22. $-9x^2 + 12x + 5 = 0$
23. $\sqrt{3}x^2 - 4x + 2\sqrt{3} = 0$
24. $x(x + \sqrt{5}) = 2x$
25. $x(x + \sqrt{2}) = \sqrt{2}(x - \sqrt{2})$
26. $3x^2 - 2\sqrt{3}x + 1 = 0$
27. $x^2 - (3 - \sqrt{2})x + \sqrt{2} = 0$
28. $x^2 + (2 - 6\sqrt{2})x - 12\sqrt{2} = 0$
29. $3x(x + \sqrt{7}) = (1 + 2\sqrt{7})x$
30. $x^2 - \sqrt{3}(2 - \sqrt{3}) - 6\sqrt{3} = 0$
31. $(1+\sqrt{3})x^2 - (6\text{”}2\sqrt{3})x + 5 + \sqrt{3} = 0$

Exercice 6.2

Résoudre les équations paramétriques suivantes

1. $9x^2 + 3(2m + 1)x + m(m + 1) = 0$
2. $6x^2 - (5m - 2)x + m(m - 1) = 0$
3. $3mx^2 - (m + 3)x + 1 = 0$
4. $x^2 - 2ax + a^2 - b^2 = 0$
5. $x^2 - (a + b)x + ab = 0$
6. $x^2 - 6ax + 9a^2 - b^2 = 0$
7. $-4x^2 + 4bx + a^2 - b^2 = 0$
8. $4x^2 - 2ax + b(a - b) = 0$
9. $5mx^2 - (5m^2 + 2)x + 2m = 0$
10. $2(a - b)x^2 - (a^2 - b^2 + 2)x + a + b = 0$

Exercice 6.3

Pour chacune des équations suivantes, vérifier que le nombre x_1 donné est une solution de l'équation proposée, puis calculer l'autre solution

1. $4x^2 + 7x - 15 = 0$ et $x_1 = -3$
2. $3x^2 - 17x + 10 = 0$ et $x_1 = 5$
3. $3x^2 + (9 - 4\sqrt{2})x + 2 - 3\sqrt{2} = 0$ et $x_1 = \frac{\sqrt{2}}{3}$
4. $mx^2 + (2m - 1)x - 2 = 0$ et $x_1 = -2$
5. $(m + 1)x^2 + m(m - 2)x - 3m^2 = 0$ et $x_1 = -m$

Exercice 6.4

Trouver deux nombres réels connaissant leur somme S et leur produit P, dans chacun des cas suivants

1. $S = 22$ et $P = 117$
2. $S = 7$ et $P = -228$
3. $S = -13$ et $P = 48$
4. $S = \frac{19}{6}$ et $P = -6$
5. $S = 4$ et $P = 1$
6. $S = \sqrt{5}$ et $P = -10$
7. $S = -\sqrt{3}$ et $P = \frac{3}{4}$
8. $S = 3\sqrt{7}$ et $P = 13 - \sqrt{7}$

Exercice 6.5

Former une équation du second degré dont les solutions sont deux nombres réels donnés, dans chacun des cas suivants.

1. 7 et 13
2. -17 et 11
3. $2 + \sqrt{5}$ et $2 - \sqrt{5}$
4. $2 + \sqrt{3}$ et $3 - 2\sqrt{2}$
5. $a + \sqrt{b}$ et $-a - \sqrt{b}$
6. $1 - \frac{1}{m}$ et $1 + \frac{1}{m}$
7. $m + \sqrt{m^2 + 1}$ et $m - \sqrt{m^2 + 1}$
8. $\frac{a}{b}$ et $\frac{b}{a}$

Exercice 6.6

Déterminer le signe des solutions, si elles existent, de chacune des équations suivantes (sans résoudre l'équation)

1. $9x^2 - 21x + 10 = 0$
2. $12x^2 + 7x - 12 = 0$
3. $10x^2 + 35x + 4 = 0$
4. $-\sqrt{2}x^2 + (4 - \sqrt{2})x + 2 = 0$
5. $3x^2 + \sqrt{12}x = 0$
6. $9x^2 + 6\sqrt{7}x + 7 = 0$
7. $-2x^2 - 3\sqrt{5}x + 4\sqrt{3} = 0$
8. $x^2 + (5\sqrt{6} - 6\sqrt{5})x - 30\sqrt{30} = 0$

Exercice 6.7

Discuter, selon la valeur du paramètre m, l'existence et le signe des solutions de chacune des équations paramétriques suivantes.

1. $x^2 - 2(m - 3)x + (m - 3)^2 = 0$
2. $x^2 + (m + 2)x + m = 0$
3. $9mx^2 + 2(3m + 2)x + m = 0$
4. $(2m + 5)x^2 + 2x - 3 = 0$
5. $x^2 + 5x - m(m - 5) = 0$
6. $(m + 1)x^2 + 6x + m + 1 = 0$
7. $mx^2 + 2mx - m + 3 = 0$
8. $(m + 3)x^2 - 2(m + 1)x + m = 0$
9. $(4m + 3)x^2 - 4mx + m - 1 = 0$

Exercice 6.8

Transformer les radicaux doubles suivants en une somme ou une différence de radicaux simples.

1. $\sqrt{12 + 2\sqrt{35}}$
2. $\sqrt{9 + 4\sqrt{2}}$
3. $\sqrt{10 - 2\sqrt{21}}$
4. $\sqrt{4 + 2\sqrt{3}}$
5. $\sqrt{14 + 8\sqrt{3}}$
6. $\sqrt{11 - 6\sqrt{2}}$

Exercice 6.9

Résoudre les équations bicarrées suivantes.

1. $x^4 - 9x^2 = 0$
2. $x^4 + x^2 - 12 = 0$
3. $-x^4 + 7x^2 + 8 = 0$
4. $2x^4 - 7x^2 + 5 = 0$
5. $5x^4 + 13x^2 + 6 = 0$
6. $3x^4 - 2x^2 - 1 = 0$
7. $9x^4 + 5x^2 - 4 = 0$
8. $-5x^4 + 12x^2 + 9 = 0$
9. $25x^4 - 40x^2 + 16 = 0$
10. $4x^4 - 17x^2 + 4 = 0$
11. $12x^4 - 31x^2 + 9 = 0$
12. $16x^4 - 41x^2 + 18 = 0$
13. $-x^4 + mx^2 + 2m^2 = 0$
14. $2x^4 - 5mx^2 - 3m^2 = 0$
15. $x^4 - 5m^2x^2 + 4m^4 = 0$
16. $x^4 + (m-4)x^2 - 2m^2 + m + 3 = 0$
17. $m^2x^4 - (m^4+1)x^2 + m^2 = 0$
18. $mx^4 - (2m^2+1)x^2 + 2m = 0$

Exercice 6.10

Déterminer un nombre entier relatif tel que la somme de ce nombre et de son carré est égale à 21756.

Exercice 6.11

Trouver deux nombres entiers consécutifs dont la somme des carrés est égale à 3445.

Exercice 6.12

contenu...

Exercice 6.13

contenu...

Exercice 6.14

contenu...

Exercice 6.15

contenu...

Exercice 6.16

contenu...

Exercice 6.17

contenu...

Exercice 6.18

contenu...

Exercice 6.19

contenu...

Exercice 6.20

contenu...

Exercice 6.21

contenu...

Exercice 6.22

contenu...

Exercice 6.23

contenu...

Exercice 6.24

contenu...

Exercice 6.25

contenu...

Exercice 6.26

contenu...

Exercice 6.27

contenu...

Exercice 6.28

contenu...

Exercice 6.29

contenu...

Exercice 6.30

contenu...

Exercice 6.31

contenu...

Exercice 6.32

contenu...

Exercice 6.33

contenu...

Exercice 6.34

contenu...

Exercice 6.35

contenu...

Exercice 6.36

contenu...

Exercice 6.37

contenu...

Exercice 6.38

contenu...

Exercice 6.39

contenu...

Exercice 6.40

contenu...

Exercice 6.41

contenu...

Exercice 6.42

contenu...

Exercice 6.43

contenu...

Chapitre 7

Exponentielles et logarithmes

7.1 Rappel

Nous avons déjà rencontré la fonction puissance. C'est la fonction qui prend un nombre réel x et qui l'élève à une certaine puissance $n \in \mathbb{N}$ fixée d'avance

$$x \mapsto x^n.$$

Nous avons vu que cette fonction pouvait être étendue à des puissances négatives $n \in \mathbb{Z}$ en posant, si $n > 0$,

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}.$$

On a alors toute une série de propriétés.

L'idée de la fonction exponentielle est de considérer la puissance non pas avec l'argument qui change, mais avec la puissance qui change

$$x \mapsto a^x,$$

où cette fois c'est le nombre réel $a \in \mathbb{R}$ qui ne change pas et est fixé d'avance et la puissance qui est la variable.

Si $a = 0$ ou $a = 1$ la fonction obtenue n'est pas d'un grand intérêt, De plus si $a < 0$, il y a de très nombreux problèmes qui se posent. On décide dès lors de choisir le nombre a, *la base*, dans l'ensemble $\mathbb{R}^* - \{1\}$.

Le problème qui se pose alors est de déterminer l'ensemble de définition de cette fonction exponentielle et de vérifier qu'il s'agit bien d'une fonction.

Commençons déjà par fixer les notations. On appelle $\exp_a$ la fonction exponentielle de base $a \in \mathbb{R}^* - \{1\}$ et sa valeur pour un élément x du domaine de définition sera exprimée par

$$y = \exp_a(x) = a^x.$$

Nous avons déjà vu que si $x \in \mathbb{N}$ ou $x \in \mathbb{Z}$ la fonction est bien définie et donne un résultat sans ambiguïté.

D'autre part, lorsque nous avons étudié les racines, nous avons vu que la racine n^{e} d'un nombre a positif peut s'écrire

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}.$$

et partant de là, on peut donner le sens suivant à la puissance $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ d'un nombre positif a

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p} = \sqrt[q]{a}^p.$$

Ainsi, on peut prendre $\mathcal{D}'_{\text{exp}} = \mathbb{Q}$, sans difficultés. En fait, nous verrons plus tard, avec les outils de l'analyse, que l'on peut faire un choix encore plus vaste en prenant $\mathcal{D}_{\text{exp}} = \mathbb{R}$. La fonction exponentielle est alors définie dans $\mathbb{Q}$ (ou plus généralement dans $\mathbb{R}$) tout entier.

Comme la base a est strictement positive, le résultat sera également strictement positif.

Pour simplifier l'exposer, nous choisirons comme ensemble de définition de la fonction exponentielle l'ensemble $\mathcal{D}_{\text{exp}} = \mathbb{R}$.

7.2 La fonction exponentielle

Définition 1 (fonction exponentielle)

Soit $a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$. La *fonction exponentielle* de base a, notée $\exp_a$, est la fonction définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}_+^*$, par

$$\begin{aligned} \exp_a \ : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}_+^* \\ x &\mapsto \exp_a(x) = a^x \end{aligned}$$

Sans démonstration, nous donnons le résultat suivant

Théorème 7.1

La fonction exponentielle de base a est une fonction injective de $\mathbb{Q}$ vers $\mathbb{R}_+^*$.

La fonction exponentielle de base a est une fonction bijective de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}_+^*$.

Il découle directement des propriétés des puissances, les propriétés équivalentes pour la fonction exponentielle

Théorème 7.2

Soit $a \in \mathbb{R}_+^* - 1$ et $\{x, y\} \subset \mathbb{R}$. La fonction exponentielle de base a, $\exp_a$ a les propriétés suivantes

1. $\exp_a(0) = 1$
2. $\exp_a(1) = a$
3. $\exp_a(x)\exp_a(y) = \exp_a(x+y)$
4. $\exp_a(x)^y = \exp_a(xy)$.

7.3 La fonction logarithme

Nous avons déjà vu que la fonction exponentielle de base a est une fonction injective sur $\mathbb{Q}$ et bijective sur $\mathbb{R}$. Ainsi, à la fonction exponentielle on peut associer une fonction réciproque. C'est cette fonction que l'on appelle le logarithme de base a.

Définition 2 (fonction logarithme)

Soit $a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$. La *fonction logarithme* de base a, notée $\log_a$, est la fonction réciproque de la fonction exponentielle de base a

$$y = \log_a(x) \Leftrightarrow x = \exp_a(y).$$

On a la définition suivante

$$\begin{aligned} \log_a \ : \mathbb{R}_+^* &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto y = \log_a(x) \end{aligned}$$

Ainsi, d'une part

$$\exp_a \ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^* \qquad \text{et} \qquad \log_a \ : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}.$$

Cela signifie que le logarithme n'est défini que pour des nombres positifs. En effet, a étant positif, a^x est forcément positif, quel que soit la valeur de x. On n'obtient jamais un nombre négatif en élevant a à une puissance réelle quelconque. Ainsi, un nombre réel négatif, voire nul, x, ne peut pas être une puissance réelle de a.

D'autre part, le logarithme d'un nombre x est la puissance à laquelle il faut élever la base pour obtenir x

$$y = \log_a(x) \Leftrightarrow x = \exp_a(y),$$

c'est la manière usuelle de définir la réciproque d'une fonction.

Comme conséquence directe de la définition du logarithme de base a, on a le théorème

Théorème 7.3

Soit $a \in \mathbb{R}_+ * - \{1\}$. Alors

1. pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $\log_a(\exp_a(x)) = \log_a(a^x) = x$, ou encore

$$\log_a \circ \exp_a = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$$

2. pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a : $\exp_a(\log_a(x)) = a^{\log_a(x)} = x$, ou encore
$$\exp_a \circ \log_a = \mathrm{id}_{\mathbb{R}_+^*}.$$

Notation 1

Si la base est 10, l'usage veut que l'on ne note pas la base. Ainsi $\log_{10}$ s'écrit simplement log. L'écriture log, sans mention de la base, signifie toujours le logarithme dans la base 10.

Une autre base d'usage courant est la base e. Le nombre e est un nombre irrationnel qui vaut environ
$$e = 2.718281828459\ldots.$$
Le logarithme dans la base e se note ln (qui signifie *logarithme népérien* ou *logarithme naturel*). On trouve parfois la notation Log (avec un L majuscule) au lieu de ln, qu'il ne faudra pas confondre avec log, qui lui représente le logarithme dans la base 10.

Les propriétés suivantes découlent directement des propriétés analogues pour les exponentielles

Théorème 7.4 (propriétés du logarithme)

Soit $a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$ et $\{x, y\} \subset \mathbb{R}_+^*$. Le logarithme de base a, satisfait les propriétés suivantes

1. $\log_a(1) = 0$
2. $\log_a(a) = 1$
3. $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$
4. $\log_a(x^y) = y \log_a(x)$

Théorème 7.5 (du changement de base)

Soit $\{a, b\} \subset \mathbb{R}_+^* - \{1\}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a
$$\boxed{\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}.}$$

Théorème 7.6 (du changement de base de l'exponentielle)

Soit $\{a, b\} \subset \mathbb{R}_+^* - \{1\}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a
$$\boxed{\exp_a(x) = \exp_b(x \log_b(a)), \quad \text{soit } a^x = b^{x \log_b(a)}.}$$

7.4 Homomorphismes de groupe

Le groupe multiplicatif des réels positifs est mis en relations avec le groupe additifs des réels par les fonctions. logarithmes et exponentielles
$$\log_a : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$$
Cette mise en relation préserve la structure des deux groupes, dans le sens que si l'on prend de nombres positifs a et b et que l'on multiplie ces deux nombre, on obtient un nombre positif $c = ab$. Enfin si $x = \log_k(a)$ et $y = \log_k(b)$, alors on constate que $z = x + y = \log_k(c)$. Autrement dit, le groupe multiplicatif a comme image le groupe additif, par la fonction $\log_k$. On dit alors que $\log_k$ est un *homomorphisme de groupes* , de $(\mathbb{R}_+^*, \cdot)$ vers $(\mathbb{R}, +)$. Clairement, la fonction $\exp_k$ est également un homomorphisme des groupes $(\mathbb{R}, +)$ vers $(\mathbb{R}_+^*, \cdot)$.

Définition 3

Soit $(G,*)$ et $(F,\circ)$ deux groupes. Soit $f : G \to F$ une bijection. On dit que f est un *homomorphisme* des groupes $(G,*)$ et $(F,\perp)$ si f conserve la structure de groupe, à savoir si la fonction f vérifie les propriétés suivante

1. $f(e_G) = e_F$ L'image de l'élément neutre de G est l'élément neutre de F.
2. $f(u * v) = f(u) \circ f(v)$ pour tout $\{u,v\} \subset G$.

7.5 Exercices

Exercice 7.1.
Calculer les logarithmes suivants à l'aide de la définition du logarithme

1. $\log_2(8)$
2. $\log_3(27)$
3. $\log_{12}(144)$
4. $\log_{10}(10^5)$
5. $\log_{10}(10^{-3})$
6. $\log_{10}(0.01)$
7. $\log_8\left(\frac{1}{64}\right)$
8. $\log_{32}(2)$
9. $\log_{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{4}\right)$
10. $\log_2(4^x)$
11. $\log_a(a^{2x})$
12. $\log_{a^2}(a^{2x})$
13. $\log_a(\sqrt{a})$
14. $\log_a\left(\frac{1}{a^5}\right)$
15. $\log_a\left(\sqrt[5]{\frac{1}{a^3}}\right)$
16. $\log_a(\sqrt{a\sqrt{a}})$
17. $\log_a\left(\sqrt[3]{\frac{a}{\sqrt{a}}}\right)$
18. $\log_a\left(\sqrt{\frac{a\sqrt{a^3}}{\sqrt{a}}}\right)$

Exercice 7.2.
Résoudre les équations suivantes

1. $\log_5(x) = 3$
2. $\log_2(x) = 0$
3. $\log_3(x) = -3$
4. $\log_{0.5}(x) = -5$
5. $\log_x(16) = 2$
6. $\log_x(1) = 0$
7. $\log_2(\log_2(x)) = 0$
8. $\log_3(\log_3(x)) = 1$

Exercice 7.3.
Déterminer, dans chacun des cas suivants, lequel des deux nombres est le plus grand

1. $\log_2(3)$ et $\log_4(6)$
2. $\log_3(5)$ et $\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{5}\right)$
3. $\frac{1}{2}\log_a(b)$ et $\log_{a^2}(2b)$

Exercice 7.4.
Démontrer que $\log_2(10)$ n'est pas un nombre rationnel. Même question pour $\log_1 0(1984)$.

Exercice 7.5.
Transformer les expressions suivantes en utilisant les propriétés des logarithmes (avec $n \in \mathbb{N}^*$)

1. $\log_a\left(\dfrac{ax}{y^2 z}\right)$
2. $\log_a\left(\sqrt[3]{\dfrac{x^2}{y^5}}\right)$
3. $\log_{10}\left(\dfrac{100x}{\sqrt{y}}\right)$
4. $\log_a(x^{2n}) - n\log_a(x)$
5. $\log_a(\sqrt{x}) + \log_a(\sqrt{x^3}) - 2\log_a(x)$
6. $\log_a(\dfrac{1}{2}) + \log_a(\dfrac{2}{3}) + \log_a(\dfrac{3}{4}) + \cdots + \log_a(\dfrac{9}{10})$
7. $\log_a(x) + \log_a(x^2) + \log_a(x^3) + \cdots + \log_a(x^n)$

Exercice 7.6.
Calculer la valeur du nombre réel x dans chacun des cas suivants

1. $\log_2(x) = -1 + 4\log_2(7) - 3\log_2(21)$
2. $\log_a(x) = \log_a(2-\sqrt{3}) + 3\log_a\left((\sqrt{3}-2)^2\right) + 7\log_a(\sqrt{3}+2)$
3. $x\log_a(1.2) = \log_a(8) + \log_a(3\sqrt{3}) - \log_a(\sqrt{1000})$
4. $2\log_a(x) = \log_a(5) + \log_a(5\sqrt{5}) + \log_a(5+\sqrt{5+\sqrt{5}}) + \log_a(5-\sqrt{5+\sqrt{5}})$

Exercice 7.7.

Déterminet la condition pour que l'égalité ci-après soit vraie ($\{x, y, z, u\} \subset \mathbb{R}_+^*$) :

$$\log_a(xy + yu + uz + zx) = \log_a(x + u) - \log_a(y + z).$$

Exercice 7.8.
Vérifier que pour tout entier naturel n strictement positif, on a :

$$n = -\log_2\left(\log_2(\sqrt{\ldots\sqrt{\sqrt{2}}})\right), \quad \text{avec } n \text{ radicaux.}$$

Exercice 7.9.
Encadrer le nombre $\sqrt[4]{100^{102} + 101^{100} + 102^{101}}$ par deux puissances entières successives de 10.

Exercice 7.10.
Résoudre les équations suivantes

1. $2^x = 11$
2. $2^{1-x} = 0.6$
3. $3^x = 9^{x-2}$
4. $4^{2x-1} = 16^{3x+2}$
5. $3^{\frac{1}{x}} = 10^{x+2}$
6. $2^{(x^2)} = 4 \cdot 2^x$
7. $2^{|x|}4^x = 8$
8. $2^{x-1}16^{x+2} = 4^{2x-1}8^{3-x}$
9. $2^{x-1}16^{x+2} = 4^{x+2}8^{x-2}$
10. $5^{3x+1} - 5^{3x-1} = 48$
11. $5^{2x} - 2 \cdot 5^x - 3 = 0$
12. $\left(\dfrac{1}{16}\right)^x - 3\left(\dfrac{1}{4}\right)^x - 4 = 0$
13. $10^x - 10^{-x} = 1$
14. $(\sqrt{x})^x = x^{\sqrt{x}}$

Exercice 7.11.
Résoudre les équations suivantes

1. $\log(x^2) = (\log(x))^2$
2. $x^{\log(x)} = 100$
3. $\sqrt{x^{\log(\sqrt{x})}} = 10$
4. $\log(\sqrt{x}) = \sqrt{\log(x)}$
5. $2\log(x-2) = \log(2x-4)$
6. $\log\left((x-3)^2\right) = \log(19-9x)$
7. $\dfrac{1}{2}(\log(4) + \log(x)) = \log(x+9) - \log(\sqrt{x+9})$
8. $2\log(x) + 1 = \log\left(x + \dfrac{3}{5}\right)$
9. $\log(2x+1) - \log(x-1) = 1$
10. $2\log(3x+2) + \log(x) = \log(4x - 8x^2) + \log(2x+1)$
11. $\log\left(8 + \log\left(103 - \log(x+2)\right)\right) - 1 = 0$
12. $100^{1+\log(x)} = 1 + x$
13. $\log_9(x-1) = \log_3(x-1) - 1$
14. $\log_3(\log_2(x) - 4) = \log_9(16)$
15. $2\log_{0.25}(x) - \log_4(9) = 4$
16. $\log_2(x) + \ln(x) = 5$
17. $\log_3(e^{1+x}) = \ln(4^{2x})$
18. $(ax)^{\log(a)} = (bx)^{\log(b)}$ (où $a \neq b$, $1 \notin \{a, b\}$)

Exercice 7.12.
Résoudre les systèmes d'équations suivants.

1. $\begin{cases} 10^{x+y} &= 9 \\ 10^{x-y} &= 4 \end{cases}$
2. $\begin{cases} -3 \cdot 5^x + 5^y &= 0 \\ 7 \cdot 5^x - 5^y &= 1 \end{cases}$
3. $\begin{cases} x + y &= 1 \\ 10^x + 10^y &= 7 \end{cases}$
4. $\begin{cases} 10^{x+y} &= 28 \\ 10^x + 10^y &= 11 \end{cases}$
5. $\begin{cases} x + y &= 25 \\ \log(x) + \log(y) &= 2 \end{cases}$
6. $\begin{cases} \log(xy) &= 9 \\ \log(\frac{x}{y}) &= 3 \end{cases}$
7. $\begin{cases} 5\log(x^2) - 4\log(y) &= 0 \\ 3\log(x^5) - 2\log(y^2) &= 10 \end{cases}$
8. $\begin{cases} \log(x) + \log(y^2) &= 3 \\ \log(x^2) - \log(y) &= 1 \end{cases}$
9. $\begin{cases} \log(x) + \log(y) &= 3 \\ \log(\dfrac{x^2}{y} + 1 &= 0 \end{cases}$
10. $\begin{cases} \log(x) - 2\log(y) &= 5 \\ 2^x - 16^y &= 0 \end{cases}$
11. $\begin{cases} 2\ln(x) - 3\ln(y) &= 1 \\ 2^x - 16^y &= 0 \end{cases}$

Exercice 7.13.
Résoudre les inéquations suivantes.

1. $\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(\dfrac{1}{x+3}\right) \geqslant 0$
2. $3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} > 117$
3. $6^x + 6^{2-x} - 37 > 0$
4. $4^x + 50 \leqslant 15 \cdot 2^x$
5. $\log_5(5^x - 7) - \log_{25}(324) > 2 - x$
6. $\log_x(\dfrac{1}{3}) + \log_3(\dfrac{1}{x}) + 2 \geqslant 0$
7. $\log_a(2x) > \log_{a^2}(4x+1)$ (distinguer deux cas pour a)

Exercice 7.14.
Poser $u = \log_a(x)$ et $v = \log_a(y)$ et exprimer x et y à l'aide de u et v, dans un premier temps. Ensuite établir les propriétés du logarithme en calculant $\log_a(xy)$, $\log_a(\frac{1}{y})$ et $\log_a(\frac{x}{y})$.

Exercice 7.15.
Poser $u = \log_b(x)$ et exprimer x à l'aide de u. Ensuite établir la formule du changement de base en calculant $\log_a(x)$.

Exercice 7.16.
Poser $u = a^x$ puis calculer $\log_b(u)$ et établir la formule de changement de base de l'exponentielle en utilisant la définition du logarithme de base b pour exprimer u.

Quatrième partie

Appendices

Annexe A

Les nombres

Ce chapitre est globalement assez détaillé et présente la construction des ensembles de nombres utilisés en mathématique (cf. en particulier [Lan01]). La présentation est d'un niveau assez élevé afin de servir de référence pour les niveaux avancés. Le lecteur qui ne cherche qu'une connaissance générale de ces ensembles de nombres, sans entrer dans les détails de haut niveau peut sans autre se contenter des paragraphes A.1.7, A.2.3 sur les nombres entiers. Le reste du chapitre sur les nombres rationnels ne doit poser aucun problème.

A.1 Les entiers naturels

A.1.1 Les nombres entiers naturels

Nous pourrions utiliser les nombres de manière intuitive, sans tenter de les définir. Un autre approche consiste à définir les nombres en explicitant leur nature. Une telle tentative est réalisée en définissant les nombres comme des ensembles, dont le nombre d'éléments correspond au nombre que nous voulons définir. Une définition plus appropriée serait alors de les définir comme des classes d'équivalence d'ensembles de même cardinalité.

Dans ce jeu de construction, l'ensemble vide $\varnothing$ joue un grand rôle. Considérons l'ensemble $\varnothing$. Il n'a aucun élément et correspond donc naturellement au nombre zéro 0. Dans l'idée de construire les nombres naturels, on pose

$$0 = \varnothing.$$

L'existence du nombre naturel 0 est alors assurée, puisque l'ensemble $\varnothing$ existe, comme nous l'avons montré.

Á partir du nombre 0, nous pouvons définir l'ensemble contenant l'ensemble vide. C'est un singleton, qui contient 1 élément. On l'identifie alors au nombre 1

$$1 = \{\varnothing\} = \{0\}.$$

Nous pouvons construire le nombre deux en le définissant comme la paire des nombre 0 et 1

$$2 = \{0, 1\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}.$$

Et ainsi de suite, nous pouvons alors définir les nombres entiers $3, 4, 5, \dots$ de la même manière

$$\begin{aligned}
3 &= \{0, 1, 2\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\} \\
4 &= \{0, 1, 2, 3\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}\} \\
5 &= \{0, 1, 2, 3, 4\} = \dots \\
\text{etc.}
\end{aligned}$$

Soit, de manière générale

$$n = \{0, 1, 2, 3, \dots, n-1\}.$$

Nous voyons tout de suite que pour chaque entier ainsi défini, nous avons

$$\begin{aligned}
1 &= 0 \cup \{0\} = \varnothing \cup \{\varnothing\} = \{\varnothing\} \\
2 &= 1 \cup \{1\} = \{0\} \cup \{1\} = \{0, 1\} \\
3 &= 2 \cup \{2\} = \{0, 1\} \cup \{2\} = \{0, 1, 2\} \\
&\dots \\
n &= (n-1) \cup \{n-1\} = \{0, 1, 2, \dots, n-2\} \cup \{n-1\} = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}.
\end{aligned}$$

On définit donc « naturellement » le *nombre suivant (ou le successeur)* d'un nombre n, (i. e. l'addition par 1) comme :

$$S(n) = n + 1 = n \cup \{n\}.$$

Nous avons besoin d'un axiome qui nous garantit qu'il existe un ensemble qui contient tous les entiers naturels, puisque pour le moment rien ne nous garantit qu'un tel ensemble existe. Or il est tout à fait raisonnable de supposer qu'il existe. L'axiome suivant nous garantit qu'il existe un ensemble, noté $\mathbb{N}$, qui les contient tous.

Axiome 8 (de l'infini, des entiers naturels)

Il existe un ensemble $\mathbb{N}$ que l'on appelle *ensemble des entiers naturels* et qui a les propriétés suivante :
a) il existe dans $\mathbb{N}$ un nombre noté 0 qui n'est le successeur d'aucun autre nombre : $0 \in \mathbb{N}$.
b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, son successeur, $n + 1$ est dans $\mathbb{N}$.
c) $\mathbb{N}$ est le plus petit ensemble contenant tous les naturels.

Remarque 1

Pour écrire $\mathbb{N}$ en extension on écrit ses premiers éléments, suivis de points de suspension :

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \cdots\}.$$

L'ensemble $\mathbb{N}$ sans le nombre entier naturel 0 se note $\mathbb{N}^*$.

Remarque 2

Il découle de cet axiome que si, $S \subset \mathbb{N}$, (S est une partie de $\mathbb{N}$) que $0 \in S$ et que le successeur de tout nombre $n \in S$ est aussi dans S, alors $S = \mathbb{N}$.

Cette propriété de $\mathbb{N}$ permet de démontrer des propriétés dépendantes d'un entier naturel n par *récurrence.*

Théorème 1.1 (Théorème de récurrence)

Soit $p(n)$ une propriété dépendant de l'entier naturel n et telle que :
a) $p(0)$ est vraie.
b) si $p(n)$ est vraie, alors $p(n + 1)$ est vraie aussi.
Dans ces conditions, $p(n)$ est vraie pour tout entier n.

Preuve.
En effet, soit $S \subset \mathbb{N}$ défini par :

$$S = \{m \in \mathbb{N} \mid p(m) \text{ est vrai }\}.$$

S contient toutes les valeurs de n qui rendent $p(n)$ vraie.

Alors, par l'hypothèse a), $0 \in S$.

De plus, si $n \in S$, par l'hypothèse b), $n + 1 \in S$ également. Il découle alors de la remarque de l'axiome, que l'on doit forcément avoir $S = \mathbb{N}$. Ainsi, $p(n)$ doit être vraie pour tous les nombres naturels.

□

A.1.2 La somme des entiers naturels

On définit sur $\mathbb{N}$ une opération qui prend deux entiers naturels, et leur associe un autre entier naturel (on dit que c'est une *opération interne* dans $\mathbb{N}$.) Nous appellerons cette opération la *somme* de deux entiers. On parle aussi d'*addition* de deux entiers naturels.

Si nous réfléchissons un peu à la manière que l'on a de faire une somme, ou que l'on regarde un enfant additionner deux nombres entiers (disons 2 et 3,) nous constatons que la méthode la plus simple est d'ajouter une unité au premier nombre autant de fois que nous le dit le second. Par exemple, par calculer $2 + 3$ nous ajoutons 1 au nombre 2 trois fois de suite. C'est la méthode qui consiste à « compter sur les doigts. » Cela revient à faire :

$$2 + 3 = (((2 + 1) + 1) + 1) = ((3 + 1) + 1) = (4 + 1) = 5.$$

Ou, ce qui revient au même, de prendre le successeur du premier nombre autant de fois que nous le dit le second nombre :

$$2+3 = S(S(S(2))) = S(S(3)) = S(4) = 5.$$

Exemple 1

Montrons que « deux et deux font quatre. » Nous allons montrer, grâce à notre définition des nombres entiers, que l'on a bien :

$$2+2 = 4.$$

Par définition du nombre 2, nous avons

$$2 = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}.$$

Écrire $2+2$ signifie alors que pour obtenir le résultat, il faut prendre le successeur du premier 2, et prendre le successeur du résultat obtenu (le premier successeur pour l'élément $\varnothing$ contenu dans le second 2, et le second successeur pour le second élément $\{\varnothing\}$ du nombre 2.) On obtient alors

$$2+2 = S(S(2)) = S(3) = 4.$$

A priori, rien ne nous permet de penser que $2+3 = 3+2$. Si nous faisons le calcul, toutefois, nous obtenons

$$3+2 = S(S(3)) = S(4) = 5.$$

Ainsi on a bien que $2+3 = 3+2$. Mais il n'est pas encore évident que cette propriété est valable pour toute paire d'entier $\{m,n\}$ mis à la place de 2 et 3. Nous pouvons légitimement nous demander si nous avons

$$m+n = n+m$$

pour tous les entiers naturels m et n.

De plus, si nous calculons $(3+2)+1$ nous obtenons

$$(3+2)+1 = S(S(3))+1 = S(4)+1 = 5+1 = S(5) = 6.$$

D'autre part, si nous calculons

$$3+(2+1) = 3+S(2) = 3+3 = S(S(S(3))) = S(S(4)) = S(5) = 6.$$

Ici encore, nous pouvons nous demander si pour tous les entiers naturels m, n et k nous avons

$$(m+n)+k = m+(n+k).$$

Le théorème suivant [1] nous informe de la validité de ces propriétés, ainsi que de quelques autres

Théorème 1.2

La somme des nombres entiers admet les propriétés suivante :
a) 0 est un *élément neutre* pour l'addition : $n+0 = 0+n = n$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$.
b) l'addition est *associative* : $(m+n)+k = m+(n+k)$, $\forall\ \{m,n,k\} \subset \mathbb{N}$.
c) l'addition est *commutative* : $m+n = n+m$, $\forall\ \{m,n\} \subset \mathbb{N}$.

Remarque 3

Comme l'addition est associative, l'ordre dans lequel on opère les sommes est indifférent. Il n'est donc pas nécessaire d'indiquer dans quel ordre ont lieu les opérations. Il est donc inutile de placer des parenthèses lors d'une somme de nombre entiers, et nous omettrons les parenthèses, généralement, sauf pour accentuer un résultat. Ainsi nous écrirons

$$3+2+1 = 6,$$

1. Nous accepterons sans démonstration ce théorème. Il peut se démontrer toutefois, en utilisant le théorème de récurrence. Cette démonstration est donnée dans [Sch91, page 59]

Puisque le résultat est clairement défini.

A.1.3 Le produit des entiers naturels

On définit sur $\mathbb{N}$ une seconde opération, la *multiplication,* qui de deux entiers naturels, donne un autre entier naturel. On définit la multiplication à l'aide de l'addition. On parle aussi du *produit* de deux entiers.

On définit le produit de 2 avec 3, comme la somme de 2 avec lui-même, exécutée autant de fois que le dit le second nombre (ici 3)

$$2 \cdot 3 = 2 + 2 + 2 = 6.$$

De manière générale, on définit le produit de deux entiers m et n par

$$m \cdot n = \underbrace{m + m + \cdots + m}_{n \text{ fois}}$$

La multiplication des nombres entiers bénéficie de quelques propriétés illustrées dans les exemples suivants et rassemblées dans le prochain théorème. Nous voyons tout de suite que si nous calculons

$$3 \cdot 2 = 3 + 3 = 6$$

ce qui est le même résultat que

$$2 \cdot 3 = 2 + 2 + 2 = 6.$$

Mais comme pour la somme, il ne va pas de soi, que le résultat s'étende directement à tous les nombres entiers. Cela pourrait n'être vrai que pour certains entiers. En fait c'est un petit miracle que ce résultat soit toujours vrai.

De même, si nous calculons

$$4 \cdot (3 \cdot 2) = 4 \cdot (3 + 3) = 4 \cdot 6 = 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 24.$$

D'autre part

$$(4 \cdot 3) \cdot 2 = (4 + 4 + 4) \cdot 2 = 12 \cdot 2 = 12 + 12 = 24.$$

Ainsi, nous pourrions penser que la multiplication est associative pour les nombres entiers naturels. De plus

$$0 \cdot 3 = 0 + 0 + 0 = 0,$$

nous “voyons” bien que cette relation est encore vraie pour d'autres nombres que 3.

Enfin

$$4 \cdot 1 = 4 = 1 + 1 + 1 + 1 = 1 \cdot 4.$$

Tous ces résultats sont généralisés dans le théorème suivant que l'on admettra sans démonstration [2] :

Théorème 1.3

La multiplication des nombres entiers naturels a les propriétés suivantes
a) 1 est l'élément neutre de la multiplication : $1 \cdot n = n \cdot 1$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$.
b) la multiplication est associative : $(m \cdot n) \cdot k = m \cdot (n \cdot k)$, $\forall\ \{m, n, k\} \subset \mathbb{N}$.
c) la multiplication est commutative : $m \cdot n = n \cdot m$, $\forall\ \{m, n\} \subset \mathbb{N}$.
d) la multiplication est *distributive par rapport à l'addition* : $m \cdot (n+k) = m \cdot n + m \cdot k$, $\forall\ \{m, n, k\} \subset \mathbb{N}$.
e) 0 est l'*élément absorbant* de la multiplication : $0 \cdot n = n \cdot 0 = 0$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$.

Remarque 4

Comme pour l'addition, la propriété d'associativité nous dit que l'ordre dans lequel on effectue un produit n'a aucune importance sur le résultat. Ainsi, lors d'une multiplication de plusieurs nombres, nous pouvons omettre les parenthèses

$$(2 \cdot 3) \cdot 4 = 2 \cdot (3 \cdot 4) = 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24.$$

2. Une démonstration de ce théorème peut être trouvée dans [Sch91, page 61]. Cette démonstration utilise également le théorème de récurrence.

Remarque 5

Á cause de la propriété de distributivité, il est important de mettre les parenthèses lorsqu'il y a des multiplication avec des additions. On établi ainsi une règle de priorité. On effectue d'abord les multiplications et ensuite les additions, sauf s'il y a des parenthèses, auxquels cas, on effectue d'abord l'opération de la parenthèse.) Ainsi

$$2 \cdot 3 + 4 = 6 + 4 = 10,$$

mais

$$2 \cdot (3+4) = 2 \cdot 7 = 14, \quad \text{tout comme : } \; 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 6 + 8 = 14,$$

en accord avec la propriété de distributivité.

A.1.4 Puissance

De même que la somme des entiers permet de définir le produit de deux entiers, le produit de deux entiers permet de définir la puissance d'un entier m par un entier n.

A.1.5 Représentation des nombres : bases

Lorsqu'on en vient à représenter les nombres naturels, vient le problème de l'écriture de ces nombres. Jusqu'à maintenant, dans les exemples donnés, nous n'avons pas soulevé ce problème. Nous avons supposé que tout le monde connaît bien les règles de l'arithmétique et calcule en base 10. Mais c'est là un choix arbitraire et l'histoire nous montre qu'il n'en a pas toujours été ainsi.

De manière générale, quand nous travaillons avec les nombres entiers naturels, il faut convenir d'une méthode claire et bien définie pour les écrire. En premier lieu, il convient de déterminer les symboles à utiliser : *les chiffres.*

Selon les chiffres utilisés, on définit une base de calcul. En base 2 on n'utilise que les chiffre 0 et 1. En base 3 les chiffre $0, 1$ et 2 etc. En base 10 on utilise les chiffre $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$. Pour les bases supérieures à 10 on utilise les lettres majuscules A, B, C etc. pour représenter les “chiffre” $10, 11, 12$ etc.

Les bases les plus couramment utilisées sont la base 2 (système binaire,) la base 8 (système octal,) la base 16 (système hexadécimal) et évidemment la base 10 (système décimal)que nous utilisons dans la vie de tous les jours[3].

La notation procède de la manière suivante. Le nombre naturel $\varnothing$ est noté 0. Ensuite le successeur est noté 1. Le successeur de chaque entier est noté avec le chiffre suivant, jusqu'au chiffre de la base non compris. Une fois que tous les chiffres utilisés dans la base sont pris, on écrit le nombre avec deux chiffres. Le premier est 1 et le second 0. Ainsi, dans chaque base, le nombre de la base est noté 10. Le chiffre de droite représente les unités, et celui de gauche le nombre de fois que b unités on été incrémentée, où b est le nombre de base. Par exemple 23 en base 5 représente le nombre $2 \cdot 5 + 3 = 13$ en base 10. Mais il représente le nombre $2 \cdot 8 + 3 = 19$ en base 8. Ainsi la séquence des 17 premiers nombres naturels s'écrit, en base 2

$$\begin{aligned} \mathbb{N} = \{&0, 1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, 1000, 1001, \\ &1010, 1011, 1100, 1101, 1110, 1111, 10000, \ldots\} \end{aligned}$$

en base 3

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 10, 11, 12, 20, 21, 22, 100, 101, 102, 110, 111, 112, 120, \ldots\}$$

en base 5

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 10, 11, 12, 14, 20, 21, 22, 23, 24, 30, 31, \ldots\}$$

en base 8

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 20, \ldots\}$$

en base 10

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, \ldots\}$$

et enfin en base 16 (où cette fois 10 représente $1 \cdot 16 + 0 = 16$ et 11 représente $1 \cdot 16 + 1 = 17$, etc.)

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F, 10, 11, 12 \ldots\}.$$

3. Sauf mention expresse du contraire, la base utilisée pour représenter les nombre dans ce cours est la base 10.

Se pose naturellement le problème de la conversion de la notation d'un nombre d'une base en une autre : le changement de base. Prenons comme exemple la base 8. représentons le nombre 135 (exprimé ici en base 10) en base 8. Afin d'éviter des répétitions, on commence par déterminer la plus grande puissance de 8 contenue dans 135. Il s'agit de la 2[e] puissance $8^2 = 64$ on peut placer deux fois 64 dans 135. Ainsi le premier chiffre du nombre 135 en base 8 sera 2. Vient ensuite le nombre de fois que l'on peut placer la puissance 1 de 8 dans le reste : $135 - 2 \cdot 64 = 135 - 128 = 7$. Or le nombre $8^1 = 8$ ne peut pas être placer dans le nombre 7. Ainsi le chiffre suivant est 0. Enfin la 0[e] puissance de 8, $8^0 = 1$ entre 7 fois dans 7, donc le dernier chiffre est 7. Ainsi le nombre 135 (en base 10) s'écrit 207 en base 8. Afin de ne pas avoir à répéter chaque fois la base, nous conviendrons d'écrire 207_8 pour dire que 207 est exprimé en base 8 et de même pour les autres bases. Ainsi

$$135_{10} = 207_8.$$

Dans le système hexadécimal, on trouve

$$135_{10} = 87_{16}.$$

Cela signifie que $135_{10} = 8 \cdot 16_{10} + 7$.

A.1.6 Relation d'ordre des entiers naturels

Comme nous l'avons vu, un entier naturel n donné contient tous ses prédécesseurs. Il en découle une "hiérarchie naturelle" des entiers naturels . Par exemple, nous avons

$$0 \subset 1 \quad \text{et } 1 \subset 1.$$

De même

$$3 \subset 4 \quad \text{mais nous n'avons pas } 4 \subset 3.$$

Cette propriété permet de définir "naturellement" la notion de "inférieur à" :

Définition 1

inférieur On dit que l'entier naturel m est *inférieur ou égal* à l'entier naturel n, on note : $m \leqslant n$ si $m \subset n$.

Ainsi, nous avons

$$0 \leqslant 1, \quad 1 \leqslant 1, \quad 3 \leqslant 4, \quad \text{mais : } 4 \nleqslant 3.$$

A.1.7 Ce qu'il faut connaître

En général, lorsque nous manipulons des nombres entiers naturels, nous ne les considérons pas comme des ensembles. Nous disons que nous nous plaçons dans un niveau d'abstraction supérieur et nous les utilisons avec les propriétés et opérations que nous avons mis en place dans cette section et avec les notations introduites.

Ce qu'il convient de retenir des entiers naturels est contenu dans les points suivants

- Il existe un ensemble $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$ appelé *ensemble des entiers naturels.* Cet ensemble contient l'entier naturel 0 et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ son successeur immédiat $n + 1$ s'y trouve également.
- La somme de deux entiers naturels est un entier naturel. La somme est associative ($(m + n) + k = m+(n+k)$,) admet 0 comme élément neutre ($0+n = n+0 = n$) et est commutative ($m+n = n+m$.)
- Le produit de deux entiers naturels est un entier naturel. Le produit est associatif ($(mn)k = m(nk)$,) admet 1 comme élément neutre ($1 \cdot n = n \cdot 1 = n$,) admet 0 comme élément absorbant ($0n = n0 = 0$) et est commutatif ($mn = nm$.)
- Le produit est distributif relativement à l'addition ($m(n + k) = mn + mk$.)
- On convient de toujours effectuer les produits avant les additions.
- On définit une relation d'ordre dans $\mathbb{N}$. $m \leqslant n$ si $m = n$ ou si n est un successeur de m. L'entier naturel 0 est le plus petit entier naturel.

A.2 Les entiers relatifs

Maintenant que nous avons vu comment définir les entiers naturels, nous pouvons nous demander comment définir des nombres négatifs. Quel est la signification d'un nombre négatif ?

Nous allons définir ci-après les nombres négatifs à l'aide des notions d'ensemble quotient et de classes d'équivalences. L'intérêt de cette définition est, premièrement, que c'est probablement la seule manière de définir rigoureusement les entiers relatifs (entiers avec un signe) et, deuxièmement, que cette manière de faire se retrouve pour la construction des nombres rationnels, pour la notion de direction dans un plan, pour la notion d'angle, et surtout pour les vecteurs.

D'autre part, l'intérêt de définir les entiers relatifs de cette façon, permet de construire rationnellement les ensembles de nombres que l'on utilise tous les jours et de mieux comprendre pourquoi les règles d'arithmétique sont comme elles sont. De plus elles peuvent donner un meilleur aperçu des propriétés de ces nombres.

Commençons par manipuler un peu les nombres entiers naturels. Nous voyons rapidement que pour un nombre donné, N, il y a souvent plusieurs combinaisons de nombres naturels dont la somme donne le nombre N. Par exemple, le nombre 7 peut être obtenu de plusieurs manières différentes

$$7 = 0 + 7 = 1 + 6 = 2 + 5 = 3 + 4.$$

Considérons l'égalité

$$2 + 5 = 7.$$

De là, nous voyons bien que si nous cherchons un nombre entier n tel que $n + 2 = 7$ il suffit de prendre $n = 5$. Il n'est clairement pas possible de trouver un nombre n tel que

$$n + 8 = 7,$$

car 8 est déjà plus grand que 7. Par contre, il existe un nombre m tel que

$$8 = 7 + m.$$

Ce nombre est 1.

Nous allons créer de toute pièce un ensemble $\mathbb{Z}$ dans lequel il sera toujours possible de résoudre ce genre de problème, quels que soient les nombres entiers que nous mettrons au lieu de 7 et 8. Nous verrons que nous devrons enrichir l'ensemble des entiers naturels avec d'autres types de nombres. En fait, cela revient à généraliser la notion de nombre en quelque chose d'un peu plus complexe.

Considérons l'ensemble $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ de tous les couples de nombres entiers. Définissons dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ la relation $\mathcal{R}$ par

$$(m, n)\mathcal{R}(k, l) \Leftrightarrow m + l = k + n.$$

On a, par exemple

$$(2, 4)\mathcal{R}(3, 5),$$

car

$$2 + 5 = 3 + 4.$$

De même, on peut facilement voir que

$$(2, 4)\mathcal{R}(3, 5), \quad \text{que :} \quad (3, 5)\mathcal{R}(0, 2), \quad \text{et :} \quad (2, 4)\mathcal{R}(0, 2).$$

De plus il est clair que

$$(3, 5)\mathcal{R}(3, 5), \quad \text{ou que :} \quad (2, 4)\mathcal{R}(2, 4).$$

Et enfin

$$(2, 4)\mathcal{R}(3, 5) \quad \text{mais aussi :} \quad (3, 5)\mathcal{R}(2, 4).$$

De manière générale :

Théorème 1.4

La relation $\mathcal{R}$ définie ci-dessus a les propriétés suivantes
a) $\mathcal{R}$ est réflexive : $(m, n)\mathcal{R}(m, n)$, $\forall\ (m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.
b) $\mathcal{R}$ est symétrique : $(m, n)\mathcal{R}(k, l) \Rightarrow (k, l)\mathcal{R}(m, n)$, $\forall\ \{(m, n), (k, l)\} \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.
c) $\mathcal{R}$ est transitive : si $(m, n)\mathcal{R}(k, l)$ et $(k, l)\mathcal{R}(p, q)$ alors $(m, n)\mathcal{R}(p, q)$,
$\forall\ \{m, n, k, l, p, q\} \subset \mathbb{N}$.
Ainsi $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

La relation $\mathcal{R}$ permet de partitionner $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ en classes d'équivalences. Une classe d'équivalence de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est l'ensemble de tous les couples de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ qui sont en relation entre eux. On peut définir par exemple la classe d'équivalence, que nous conviendrons de noter $[0, 2]$, du couple $(0, 2)$ par

$$[0, 2] = \{(0, 2), (3, 5), (2, 4), \ldots\}.$$

L'usage veut que l'on note $+n$, ou plus simplement n, la classe d'équivalence du couple $(n, 0)$ et $-n$ celle du couple $(0, n)$. Ainsi nous avons

$$-2 = [0, 2] = \{(0, 2), (1, 3), (2, 4), (3, 5), \ldots, (n, n + 2), \ldots\},$$

et

$$+2 = [2, 0] = \{(2, 0), (3, 1), (4, 2), (5, 3), \ldots, (n + 2, n), \ldots\}.$$

Définition 2

entier relatif On appelle *nombre entier relatif* une classe d'équivalence de l'ensemble $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ relativement à la relation $\mathcal{R}$ définie ci-dessus.

Définition 3

Ensemble des entiers relatifs L'ensemble des entiers relatifs est la partition de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ résultant des classes d'équivalences de $\mathcal{R}$. On le note $\mathbb{Z}$.

Remarque 6

C'est l'ensemble de toutes les classes d'équivalence de de la relation $\mathcal{R}$ dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. On dit aussi que c'est l'*ensemble quotient* de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ par $\mathcal{R}$, on note $\mathbb{Z} = \frac{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}{\mathcal{R}}$.

Remarque 7

L'entier relatif 0 est le nombre entier relatif défini par

$$0 = [0, 0] = \{(0, 0), (1, 1), (2, 2), \ldots, (n, n), \ldots\}.$$

Remarque 8

Les nombres entiers relatifs de la forme $+n = [n, 0]$ sont appelés *nombres positifs ;* les autres, de la forme $-n = [0, n]$ sont appelés *nombres négatifs.*

Remarque 9

Tout entier relatif positif $+n = [n, 0]$ peut, "naturellement", être identifié au nombre entier naturel n. Ainsi, $\mathbb{Z}$ "contient" tous les nombres entiers naturels avec, en plus, les nombres négatifs. Ainsi, dans un certain sens, on a : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

Remarque 10

On représente l'ensemble des entiers relatifs en extension de la manière suivante :

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, \ldots\}.$$

L'ensemble des entiers relatifs positif est noté

$$\mathbb{Z}_+ = \{0, +1, +2, +3, +4, \ldots\}$$

et celui des entiers relatifs négatifs

$$\mathbb{Z}_- = \{\ldots, -4, -3, -2, -1, 0\}.$$

Chacun de ces ensembles sans l'entier 0 se note respectivement $\mathbb{Z}^*, \mathbb{Z}_+^*, \mathbb{Z}_-^*$.

A.2.1 Somme et produit des entiers relatifs

Il découle de la construction des entiers relatifs, que l'on peut également définir la somme et le produit des entiers relatifs. Les propriétés de ces opérations sont "naturellement" héritée de celles des entiers naturels.

La somme des entiers relatifs

Pour illustrer cela, considérons l'exemple suivant. Soient les nombres entiers relatifs +2 et +3. Il est naturel de considérer que la somme des entiers relatifs soit en accord avec celle des entiers naturels. Donc on doit avoir

$$(+2) + (+3) = +5.$$

C'est à dire

$$[2, 0] + [3, 0] = [5, 0] = [2 + 3, 0].$$

La somme dans les crochets est la somme des nombres entiers naturels. Par contre la somme des crochets est la somme des entiers relatifs. Nous avons utilisé le même symbole afin de ne pas alourdir la notation, mais il faut bien comprendre qu'il ne s'agit pas de la même opération.

Si nous prenons $+2 = [3, 1]$ et $+3 = [4, 1]$ nous devons avoir, afin de garder la cohérence de l'opération

$$[3, 1] + [4, 1] = [5, 0].$$

Ce qui signifie qu'il faut prendre

$$[3, 1] + [4, 1] = [7, 2] = [5, 0] = [3 + 4, 1 + 1].$$

On est donc naturellement menés à définir :

Définition 4

addition des relatifs On appelle *somme* ou *addition* des entiers relatifs $m = [a, b]$ et $n = [c, d]$ l'entier relatif

$$m+n = [a + c, b + d].$$

Remarque 11

Le symbole + entre m et n est celui de la somme des entiers relatifs, tandis que le symbole + entre a et c et entre b et d est celui de la somme des entiers naturels. Nous voyons de la définition, que, fondamentalement, la somme des entiers relatifs n'est pas identique à la somme des entiers naturels. Mais la définition de la somme des entiers relatifs se fait en se ramenant à la somme des entiers naturels.

Cette somme vérifie les propriétés suivantes,

Théorème 1.5

La somme des entiers relatifs satisfait les propriétés suivantes, où $\{m, n, k\} \subset \mathbb{Z}$:
a) La somme des entiers relatifs est associative : $(m + n) + k = m + (n + k)$.
b) $0 = [0, 0]$ est un élément neutre pour la somme des entiers relatifs : $0 + m = m + 0 = m$.
c) Tout élément $n \in \mathbb{Z}$ admet un élément symétrique (son opposé) n' pour la somme : $n+n' = n'+n = 0$. L'opposé de $+n = [n, 0]$ est $-n = [0, n]$ et réciproquement, pour $n \in \mathbb{N}$.
d) La somme des entiers relatifs est commutative : $m + n = n + m$.

Preuve.

Le théorème 1.2 nous assure que la somme des entiers naturels satisfait les propriétés ci-dessus (sauf la propriété c, qui est propre aux entiers relatifs.) Comme un entier relatif est représenté par un couple d'entier naturels, nous allons démontrer les propriétés ci-dessus à l'aide des propriétés des nombres entiers naturels. La somme qui apparaît ci-après dans les crochets est celle des entiers naturels. Si le signe de somme n'est pas dans les crochets, c'est la somme des entiers relatifs qui est entendue.

a) Soit $m = [a_m, b_m], n = [a_n, b_n]$ et $k = [a_k, b_k]$ trois entiers relatifs, avec a_m, a_n, a_k, b_m, b_n et b_k des entiers naturels. On a alors

$$\begin{aligned}(m+n)+k &= ([a_m, b_n] + [a_n, b_n]) + [a_k, b_k] = [a_m + a_n, b_m + b_n] + [a_k, b_k] \\ &= [(a_m + a_n) + a_k, (b_m + b_n) + b_k] = [a_m + (a_n + a_k), b_m + (b_n + b_k)] \\ &= [a_m, b_m] + [a_n + a_k, b_n + b_k] = m + (n + k).\end{aligned}$$

L'addition des entiers naturels est donc associative.

b) Soit $0 = [0, 0]$ et $m = [a, b]$ un entier relatif. On a

$$0 + m = [0, 0] + [a, b] = [0 + a, 0 + b] = [a, b] = n.$$

Ainsi 0 est élément neutre à gauche pour l'addition. On montre de même que : $m + 0 = m$. Donc 0 est aussi élément neutre pour l'addition à droite.

c) Soit $n = [a, b]$ un entier relatif. Cherchons un entier relatif $n' = [a', b']$ tel que

$$n + n' = 0.$$

On doit donc avoir

$$[a, b] + [a', b'] = 0.$$

Soit

$$[a + a', b + b'] = [0, 0].$$

Ceci implique que : $a + a' = b + b'$. Il suffit donc de choisir : $b' = a$ et $a' = b$. Ainsi $n' = [b, a]$. Supposons que n soit positif : $+n = [n, 0]$, alors $n' = [0, n] = -n$. Pour $-n = [0, n]$ négatif, on a $n' = [n, 0] = +n$.

d) Soit $m = [a_m, b_m]$ et $n = [a_n, b_n]$ deux entiers relatifs. On a alors

$$\begin{aligned}m + n &= [a_m, b_m] + [a_n, b_n] = [a_m + a_n, b_m + b_n] = [a_n + a_m, b_n + b_m] \\ &= [a_n, b_n] + [a_m + b_m] = n + m.\end{aligned}$$

□

Remarque 12

Ce théorème affirme que la structure $(\mathbb{Z}, +)$ est un *groupe* commutatif (ou abélien.)

Conventions Il découle de la définition de la somme des entiers relatifs que pour un entier présenté par un de ses éléments (a, b), on a

$$[a, b] = [a, 0] + [0, b] = (+a) + (-b).$$

L'usage veut que l'on omette le signe $+$ devant les nombre positifs. On note alors a au lieu de $+a$. De plus, l'usage veut que si l'on additionne un nombre avec un nombre négatif, on remplace le signe $+$ de l'addition par le signe $-$ du nombre négatif. Ainsi on note $a - b$ au lieu de $a + (-b)$. On parle alors de *soustraction.* Ainsi, nous pouvons écrire

$$[a, b] = a - b.$$

Si, de plus, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $(n, 0) \in [a, b]$, alors on note

$$a - b = [n, 0] = n.$$

Si, par contre, c'est $(0, n) \in [a, b]$, alors on note

$$a - b = [0, n] = -n.$$

Exemple 2

L'entier relatif représenté par l'élément $(3, 19)$ peut donc s'écrire

$$[3, 19] = 3 - 19.$$

De Plus, comme $(0, 16) \in [3, 19]$, on a

$$[3, 19] = 3 - 19 = [0, 16] = -16.$$

Ainsi, pratiquement, pour calculer une différence du type donné en introduction

$$a + 8 = 7$$

on l'écrit sous forme de nombre entiers relatifs et on résout le problème correspondant en additionnant par l'opposé

$$\begin{aligned} a + [8,0] &= [7,0] \\ a + [8,0] &= [8,1] \\ a + [8,0] + [0,8] &= [0,1] + [8,0] + [0,8] \\ a &= [0,1] = -1. \end{aligned}$$

Ainsi, nous voyons que notre construction des entiers relatifs permet de résoudre le problème posé initialement.

Le produit des entiers relatifs

De même que pour la somme, on s'attend à ce que le produit des nombres entiers relatifs soit en accord avec celui des nombres entiers naturels, lorsque l'on multiplie des nombre positifs entre eux

$$(+2)(+3) = +6.$$

En représentation des classes, on doit avoir

$$[2,0] \cdot [3,0] = [6,0] = [2 \cdot 3, 0].$$

En prenant des éléments de ces classes, on a (en utilisant les méthodes de calculs usuelles que l'on veut retrouver) [4]

$$\begin{aligned} [3,1] \cdot [5,2] &= (3-1)(5-2) = 3 \cdot 5 - 1 \cdot 5 - 3 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \\ &= 3 \cdot 5 + 1 \cdot 2 - (1 \cdot 5 + 3 \cdot 2) = (3 \cdot 5 + 1 \cdot 2, 1 \cdot 5 + 3 \cdot 2). \end{aligned}$$

Ainsi nous définirons le produit de deux entiers relatifs par

Définition 5

produit des relatifs Ainsi, si $m = [a,b]$ et $n = [c,d]$ sont des entiers relatifs, on définit le produit de m et n, par l'entier relatif

$$m \cdot n = [a,b] \cdot [c,d] = [a \cdot c + b \cdot d, b \cdot c + a \cdot d].$$

On montre alors que le produit des entiers relatifs a les propriétés suivantes

Théorème 1.6

La somme des entiers relatifs satisfait les propriétés suivantes, où $\{m, n, k\} \subset \mathbb{Z}$
a) La multiplication des entiers relatifs est associative : $(m \cdot n) \cdot k = m \cdot (n \cdot k)$.
b) $1 = [1,0]$ est élément neutre de la multiplication des entiers naturels : $1 \cdot n = n \cdot 1 = n$.
c) La multiplication des entiers relatifs est commutative : $m \cdot n = n \cdot m$.
d) La multiplication est distributive relativement à l'addition : $m \cdot (n+k) = m \cdot n + m \cdot k$.

Preuve.

a) Soient $m = [a_m, b_m], n = [a_n, b_n]$ et $k = [a_k, b_k]$, où a_m, a_n, a_k, b_m, b_n et b_k sont des entiers naturels, des entiers relatifs. En utilisant les propriétés des entiers naturels à l'intérieur des crochets, nous pouvons calculer

$$\begin{aligned} (mn)k &= ([a_m, b_m][a_n, b_n])[a_k, b_k] = [a_m a_n + b_m b_n, a_m b_n + b_m a_n][a_k, b_k] \\ &= [(a_m a_n + b_m b_n)a_k + (a_m b_n + a_n b_m)b_k, (a_m a_n + b_m b_n)b_k + a_k(a_m b_n + a_n b_m)] \\ &= [a_m(a_n a_k + b_n b_k) + b_m(b_n a_k + a_n b_k), a_m(a_n b_k + b_n a_k) + b_m(b_n b_k + a_n a_k)] \\ &= [a_m, b_m][a_n a_k + b_n b_k, a_n b_k + b_n a_k] = [a_m, b_m]([a_n, b_n][a_k, b_k]) = m(nk). \end{aligned}$$

Donc le produit des entiers relatifs est bien associatif.

b) Soit $1 = [1,0]$ et $n = [a,b]$ un entier relatif. On a alors

$$1 \cdot n = [1,0][a,b] = [1 \cdot a + 0b, 1 \cdot b + 0a] = [a,b] = n.$$

Donc 1 est bien neutre à gauche pour la multiplication. On montre de même que $n \cdot 1 = n$.

4. nous ne voulons rien prouver ici ! c'est pourquoi nous utilisons des propriétés de la multiplication qui nous sont bien connues, sans les avoir encore établies. Nous ne voulons que retrouver une définition adéquate de la multiplication. Toutes les propriétés que nous utilisons dans ce petit calcul, devrons évidemment être établies plus tard.

c) Soit $m = [1_m, b_m]$ et $n = [a_n, b_n]$ des entiers relatifs. On a alors

$$\begin{aligned} mn &= [a_m, b_m][a_n, b_n] = [a_m a_n + b_m b_n, a_m b_n + a_n b_m] \\ &= [a_n a_m + b_n b_n, a_n b_m + a_m b_n] = [a_n, b_n][a_m, b_m] = nm. \end{aligned}$$

Ainsi le produit des entiers relatifs est bien commutatif.

d) Ce point est laissé en exercice.

□

Remarque 13

Comme la multiplication est associative, l'ordre dans lequel on effectue une multiplication n'a aucune importance, on peut alors omettre les parenthèses

$$(m \cdot n) \cdot k = m \cdot (n \cdot k) = m \cdot n \cdot k.$$

Remarque 14

Lorsque l'on utilise des lettres pour représenter des nombres, le signe de multiplication est optionnel. Ainsi mn signifie $m \cdot n$.

Remarque 15

Comme $(\mathbb{Z}, +)$ est un groupe abélien et que la multiplication est associative, admette un élément neutre et qu'elle est distributive relativement à l'addition alors la structure $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ est un anneau. Comme, de plus, la multiplication est commutative, l'anneau est dit commutatif.

Nous avons maintenant défini les nombre entiers relatifs, en introduisant la notion de nombre négatif. Ceci nous permet de résoudre des problèmes du type : trouver le nombre entier x tel que

$$8 + x = 5$$

Nous pouvons maintenant écrire

$$x = 5 - 8$$

d'où

$$x = [5, 8] = [0, 3] = -3.$$

Considérons le produit de deux nombres négatifs

$$(-m) \cdot (-n) = [0, m][0, n] = [0 \cdot 0 + mn, 0 \cdot m + n \cdot 0] = +mn.$$

Ce qui démontre la propriété suivante de la multiplication des entiers relatifs

Proposition 1.7

Le produit de deux nombres entiers négatifs est un entier positif

$$(-m)(-n) = +mn.$$

Plus généralement

Proposition 1.8 (Règle des signes)

Le produit de deux entiers de même signe est positif et le produit de deux entiers de signe contraire est négatif. Soit $a, b \in \mathbb{N}$. nous avons :

$$(-a)(-b) = (+a)(+b) = ab, \qquad (-a)(+b) = (+a)(-b) = -ab.$$

Preuve.

Soit $\{a, b\} \subset \mathbb{N}$. On a vu ci dessus que

$$(-a)(-b) = +ab = (+a)(+b).$$

Montrons la dernière propriété

$$(-a)(+b) = [0, a][b, 0] = [0b + a0, ab + 0 \cdot 0] = [0, ab] = -ab.$$

De plus

$$(+a)(-b) = [a, 0][0, b] = [a0 + 0b, 0 \cdot 0 + ab] = [0, ab] = -ab = (-a)(+b).$$

□

A.2.2 Ordre des entiers relatifs

La relation d'ordre des entiers naturels peut facilement s'étendre aux entiers relatifs. Nous définissons la relation d'ordre des entiers relatifs en nous appuyant sur celle des entiers naturels.

Soit $+a$ et $+b$ deux entiers relatifs positifs. Supposons que les entiers naturels a et b correspondants sont tels que $b \leqslant a$. Il existe alors un naturel c tel que $a = b + c$. Ce qui signifie, que a est un successeur de b (c'est le c-ième successeur de b.) En termes d'entiers relatifs, cela signifie qu'il existe un entier relatif positif $+c$ tel que

$$+a = (+b) + (+c).$$

Nous allons construire la relation d'ordre des entiers relatifs de cette façon. Nous dirons qu'un entier relatif b est inférieur ou égal à un entier relatif a (positifs ou négatifs) s'il existe un entier relatif positif $+c$ tel que

$$a = b + (+c).$$

Autrement dit, $b \leqslant a$ s'il existe $+c \in \mathbb{Z}_+$ tel que

$$a - b = +c,$$

ou encore si $a - b \in \mathbb{Z}_+$.

Définition 6

ordre des relatifs Soit a et b deux entiers relatifs. On dit que b est *inférieur ou égal à* a si $a - b \in \mathbb{Z}_+$.

Remarque 16

On vérifie alors que tout nombre entier relatif positif est supérieur ou égal à zéro

$$0 \leqslant a \ \forall \ a \in \mathbb{Z}_+,$$

et tout nombre entier négatif est inférieur ou égal à zéro :

$$a \leqslant 0 \ \forall \ a \in \mathbb{Z}_-.$$

On a alors

$$a \leqslant b \ \Leftrightarrow \ a - b \in \mathbb{Z}_+ \ \Leftrightarrow \ 0 \leqslant a - b.$$

A.2.3 Ce qu'il faut connaître

Ce qu'il convient de retenir des entiers relatifs est contenu dans les points suivants

— Il existe un ensemble $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ appelé *ensemble des entiers relatifs* Ce ensemble contient tous les entiers naturels, ainsi que tous les nombres entiers négatifs.

— La somme de deux entiers relatifs est un entier relatif. La somme est associative ($(m+n)+k = m+(n+k)$,) admet 0 comme élément neutre ($0 + n = n + 0 = n$) et est commutative ($m + n = n + m$.)

— On note la somme d'un entier positif $+m$ avec un entier négatif $-n$: $m - n$.

— Le produit de deux entiers relatifs est un entier relatif. Le produit est associatif ($(mn)k = m(nk)$,) admet 1 comme élément neutre ($1 \cdot n = n \cdot 1 = n$,) admet 0 comme élément absorbant ($0n = n0 = 0$) et est commutatif ($mn = nm$.)

— Tout entier relatif n possède un symétrique, $-n$, relativement à l'addition, appelé son *opposé*. On a : $n - n = 0$.

— Le produit de deux nombres de même signe est positif, celui de deux nombres de signe contraire est négatif.

— Le produit est distributif relativement à l'addition ($m(n + k) = mn + mk$.)

— On convient de toujours effectuer les produits avant les additions.

— On définit une relation d'ordre dans $\mathbb{Z}$ par : $b \leqslant a \Leftrightarrow a - b \in \mathbb{Z}_+$.

A.3 Les nombres rationnels

Nous avons vu dans la section précédente comment des problèmes de somme nous ont menés à introduire une nouvelle classe de nombre, les nombres entiers relatifs (positifs ou négatifs.)

Le produit des nombres nous conduit rapidement devant des problèmes analogues. Nous pouvons très facilement déterminer un nombre entier x tel que

$$2x = 6.$$

Nous trouvons que la solution de ce problème est $x = 3$, car $2 \cdot 3$ est bien égal à 6.

Mais qu'en est-il du problème

$$2x = 5?$$

Il peut sembler évident que la solution n'est en tout cas pas un nombre entier ! Nous devons donc, pour être en mesure de répondre à ce problème, créer une nouvelle classe de nombre, comme nous l'avons fait pour les entiers relatifs.

Commençons par considérer dans l'ensemble $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ la relation $\mathcal{R}'$ définie par

$$(a, b)\mathcal{R}'(p, q) \Leftrightarrow aq = pb.$$

On vérifie sans peine que la relation $\mathcal{R}'$ est réflexive, symétrique et transitive. C'est donc une relation d'équivalence.

Définition 7

nombre rationnel On appelle *nombre rationnel* $\frac{a}{b}$ la classe d'équivalence de (a, b) relativement à la relation $\mathcal{R}'$ définie ci-dessus.

Remarque 17

Le nombre rationnel $\frac{a}{b}$ s'appelle aussi une *fraction* ou encore un *quotient.*

Remarque 18

Dans une fraction $\frac{a}{b}$ l'entier relatif a est le *numérateur* et l'entier relatif b le *dénominateur* de la fraction.

Ainsi, si $(a, b) \in \frac{a}{b}$ et $(p, q) \in \frac{p}{q}$, on a

$$\frac{a}{b} = \frac{p}{q} \Leftrightarrow aq = pb.$$

L'égalité de gauche est une égalité entre classes d'équivalences, tandis que l'égalité de droite est un égalité entre deux entiers relatifs, puisque a, b, p, q sont des entiers relatifs.

Au nombre entier relatif n on associe le nombre rationnel $\frac{n}{1} = n.$[5]

Le nombre entier relatif 0 est associé à la classe des nombres rationnels de la forme $\frac{0}{q}$. En effet, pour tout entier $q \in \mathbb{Z}^*$, nous avons :

$$\frac{0}{q} = \frac{0}{1} = 0, \text{ car } 01 = 0q = 0,$$

puisque 0 est absorbant pour la multiplication des entiers relatifs. Le nombre entier relatif 1 est associé aux rationnels de la forme $\frac{p}{p}$. En effet, pour tout entier $p \in \mathbb{Z}^*$, nous avons :

$$\frac{p}{p} = \frac{1}{1} = 1, \text{ car } p1 = 1p = p,$$

puisque 1 est élément neutre de la multiplication des entiers relatifs.

5. Noter l'abus de notation utilisé ici. n représente un entier relatif dans $\frac{n}{1}$, mais un nombre rationnel (une classe d'équivalence) dans n à droite du signe égal.

Définition 8

ensemble des rationnels On note $\mathbb{Q}$ l'ensemble de tous les nombres rationnels.

Remarque 19

On note $\mathbb{Q}^*$ l'ensemble des rationnels non nuls.

Remarque 20

Ainsi, par l'identification des entiers naturels n au rationnels de la forme $\frac{n}{1}$ nous voyons que l'on a : $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$. Nous avons donc : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

Supposons qu'un nombre relatif soit le quotient de deux nombres entiers négatifs $-a$ et $-b$. On a alors $\frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}$, car nous avons

$$\frac{-a}{-b} = \frac{a}{b} \Leftrightarrow (-a)b = a(-b).$$

Or les deux membres de l'égalité de droite sont égaux à $-ab$. Ainsi nous avons bien

$$\frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}.$$

De plus, comme on le verra dans la preuve ci-dessous, nous avons

$$\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}.$$

A.3.1 Somme et produit des rationnels

Nous en venons maintenant à définir la somme et le produit pour les nombres rationnels.

La somme des rationnels

Soit $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ deux nombres rationnels. On définit leur somme par

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}.$$

Nous voyons que c'est encore un nombre rationnel. De plus la somme des nombres rationnels a les propriétés suivantes :

Proposition 1.9

La somme des nombres rationnels a les propriétés suivantes :

1. La somme est associative.
2. 0 est l'élément neutre de la somme.
3. Tout nombre rationnel $\frac{a}{b}$ admet un opposé, noté $-\frac{a}{b}$, pour la somme.
4. La somme est commutative.

Preuve.
Nous allons démontrer successivement ces différents résultats.

1. Soit $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ $\frac{p}{q}$ trois fractions. On a :

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) + \frac{p}{q} = \frac{ad + bc}{bd} + \frac{p}{q} = \frac{(ad + bc)q + p(bd)}{(bd)q} = \frac{adq + bcq + bdp}{bdq}.$$

D'autre part

$$\frac{a}{b} + \left(\frac{c}{d} + \frac{p}{q}\right) = \frac{a}{b} + \frac{cq + pd}{dq} = \frac{a(dq) + b(cq + pd)}{b(dq)} = \frac{adq + bcq + bdq}{bdq}.$$

Ainsi, nous avons bien

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) + \frac{p}{q} = \frac{a}{b} + \left(\frac{c}{d} + \frac{p}{q}\right).$$

2. Soit $0 = \frac{0}{b}$ et $\frac{p}{q}$. On a
$$0 + \frac{p}{q} = \frac{0}{b} + \frac{p}{q} = \frac{0q + pb}{bq} = \frac{bp}{bq}.$$
Or $\frac{bp}{bq} = \frac{p}{q}$. En effet
$$(bp)q = p(bq).$$
Ce qui montre que $0 = \frac{0}{b}$ est bien l'élément neutre de l'addition.
3. Soit $\frac{a}{b}$ un rationnel. Soit $-\frac{a}{b} = \frac{p}{q}$ son opposé. On doit alors avoir
$$\frac{a}{b} + (-\frac{a}{b}) = 0.$$
Soit :
$$\frac{a}{b} + \frac{p}{q} = 0.$$
On en déduit qu'il faut
$$\frac{aq + pb}{bq} = \frac{0}{bq}.$$
Ainsi, pour avoir l'égalité, il suffit d'avoir $aq + pb = 0$. Ceci est le cas si $q = b$ et $p = -a$, ou si $q = -b$ et $p = a$. Or on a $\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$. Ainsi, tout rationnel $\frac{a}{b}$ possède bien un opposé
$$-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}.$$
4. Soit $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ deux rationnels. On a
$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + cb}{bd} = \frac{cb + da}{db} = \frac{c}{d} + \frac{a}{b}.$$
Ce qui prouve la commutativité.

□

Ces propriétés confèrent à $(\mathbb{Q}, +)$ la structure d'un groupe abélien.

Corollaire 1.10 (Simplification des fractions)

Au cours de la démonstration, nous avons prouvé la règle de simplification
$$\frac{bp}{bq} = \frac{p}{q}, \quad \forall \{b, p\} \subset \mathbb{Z}, \ \forall q \in \mathbb{Z}^*.$$

Remarque 21

Si une fraction $\frac{p}{q}$ ne peut pas se simplifier, on dit que les nombres entiers p et q sont *premiers entre eux*. Une autre manière définir des nombres premiers entre eux est de dire qu'il n'existe aucun diviseur commun de p et q. Ou encore qu'il n'existe pas de nombre r dont p et q sont des multiples.

Corollaire 1.11

Il découle de cette démonstration que nous avons
$$\frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}, \qquad \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b},$$
où $-\frac{a}{b}$ est l'opposé de $\frac{a}{b}$ relativement à l'addition des rationnels.

Définition 9

signe des rationnels On dit qu'un rationnel $\frac{a}{b}$ est positif si $\{a, b\} \subset \mathbb{Z}_+$ ou si $\{a, b\} \subset \mathbb{Z}_-$, avec $b \neq 0$. Il est négatif sinon.

Exemple 3

Les nombres rationnels suivants sont positifs

$$\frac{2}{3}, \quad \frac{-2}{-5}, \quad \frac{-6}{-7}.$$

Les nombres rationnels suivants sont négatifs

$$\frac{-2}{3}, \quad \frac{5}{-3}, \quad -\frac{7}{5}.$$

Remarque 22

On désigne par $\mathbb{Q}_+, \mathbb{Q}_-$ respectivement l'ensemble des rationnels positifs et des rationnels négatifs. Les ensembles de nombres rationnels sans le zéro s'écrivent $\mathbb{Q}^*, \mathbb{Q}_+^*$ et $\mathbb{Q}_-^*$.

Le produit des rationnels

Définissons le produit des rationnels par :

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

Le produit de deux rationnels est encore un rationnels et possède les propriétés suivantes, dont la preuve est laissée en exercice :

Proposition 1.12

La multiplication des nombres rationnels vérifie les propriétés suivantes :

1. La multiplication des rationnels est associative.
2. Le nombre rationnel $1 = \frac{a}{a}$ est neutre pour la multiplication.
3. Tout nombre rationnel non nul $\frac{a}{b}$ admet un symétrique, nommé *inverse,* $\frac{b}{a}$ tel que $\frac{a}{b}\frac{b}{a} = 1$.
4. La multiplication des rationnels est commutative.

Ces propriétés confèrent à $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$ la structure d'un groupe abélien. De plus :

Proposition 1.13

La multiplication des rationnels est distributive par rapport à l'addition des rationnels :

$$\frac{a}{b}\left(\frac{c}{d} + \frac{p}{q}\right) = \frac{a}{b}\frac{c}{d} + \frac{a}{b}\frac{p}{q}.$$

Remarque 23

Du fait que $(\mathbb{Q}, +)$ et $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$ soient des groupes abéliens et que la multiplication est distributive par rapport à l'addition, on dit que $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ est un *corps* commutatif.

Il découle de la règle des signes des entiers relatifs et des propriétés ci-dessus :

Proposition 1.14

Le produit de deux rationnels de même signe est positif. Le produit de deux rationnels de signe contraire est négatif.

A.3.2 Ordre des rationnels

On définit une relation d'ordre dans les nombres rationnels par :

Définition 10

ordre des rationnels Soit $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ deux rationnels. On dit que $\frac{a}{b}$ est *inférieur ou égal à* $\frac{c}{d}$, on note $\frac{a}{b} \leqslant \frac{c}{d}$ si $\frac{c}{d} - \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}_+$

$$\left(\frac{a}{b} \leqslant \frac{c}{d}\right) \Leftrightarrow \left(\frac{c}{d} - \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}_+.\right)$$

Remarque 24

Si $\{r, s\} \subset \mathbb{Q}$ on note également $r \geqslant s$ au lieu de $s \leqslant r$. On dit alors que r est supérieur ou égal à s.

Remarque 25

On montre que si $r \in \mathbb{Q}_+$ (r est positif,) alors $r \geqslant 0$ et si $r \in \mathbb{Q}_-$ (r est négatif,) alors $r \leqslant 0$. Ainsi :

$$r \in \mathbb{Q}_+ \Leftrightarrow r \geqslant 0.$$

On peut alors écrire :

$$\mathbb{Q}_+ = \{r \in \mathbb{Q} \mid r \geqslant 0\},$$

et :

$$\mathbb{Q}_- = \{r \in \mathbb{Q} \mid r \leqslant 0\}.$$

On vérifie sans peine que la relation $\geqslant$ a les propriétés suivantes :

Proposition 1.15

Le relation $\geqslant$ définie ci-dessus est :
réflexive : $\forall\, r \in \mathbb{Q},\ r \geqslant r.$
antisymétrique : $\forall\, \{r, s\} \subset \mathbb{Q},\ (r \geqslant s \text{ et } s \geqslant r) \Rightarrow\ s = r.$
transitive : $\forall\, \{r, s, t\} \subset \mathbb{Q},\ (r \geqslant s \text{ et } s \geqslant t) \Rightarrow\ r \geqslant t.$

Ces propriétés caractérisent une *relation d'ordre*. De plus, la relation $\geqslant$ est *connexe* :

Proposition 1.16

La relation d'ordre $\geqslant$ est connexe, i. e. pour tout $\{r, s\} \subset \mathbb{Q}$ on a l'une des relations suivante :

$$r \geqslant s, \qquad \text{ou :} \qquad s \geqslant r.$$

Remarque 26

Cette propriété nous dit que nous pouvons toujours comparer deux nombres rationnels. Nous disons alors que $\geqslant$ est une relation d'ordre *totale*.

Ainsi, $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \geqslant)$ est un corps *totalement ordonné*.

Remarque 27

On utilise souvent la notation $r \leqslant s$ pour $s \geqslant r$.

Définition 11

ordre strict On dit que $r \in \mathbb{Q}$ est *strictement supérieur à* $s \in \mathbb{Q}$ si $r \geqslant s$ et $r \neq s$. On note $r > s$:

$$r > s \Leftrightarrow (r \geqslant s \text{ et } r \neq s.)$$

A.3.3 Divisibilité : représentation décimale des rationnels

Nous pouvons passer d'une représentation en quotient à une représentation *dite décimale* des nombres rationnels. Cela consiste à effectuer *la division* du numérateur par le dénominateur, ou encore à calculer le quotient des deux nombres entiers.

Algorithme d'Euclide

Nous allons illustrer la procédure qui permet d'effectuer cette division. La méthode illustrée ci-dessous s'appelle l'algorithme d'Euclide de la division. En somme, l'algorithme spécifie que toute fraction $\frac{a}{b}$, où a et b sont deux nombres entiers positifs, peut s'écrire comme la somme de deux termes : un nombre entier n, le *quotient,* de fois b et un entier $r < b$ appelé le *reste* de la division :

$$\frac{a}{b} = nb + r.$$

Ainsi, nous avons clairement :

$$29 = 4 \cdot 7 + 1.$$

Le nombre n nous indique le nombre entier de fois que le nombre b se trouve dans le nombre a.

Représentation décimale des quotients

Pour passer à la représentation décimale des fractions, nous ne nous arrêtons pas à l'algorithme d'Euclide, mais continuons la procédure avec r. Nous appliquons l'algorithme d'Euclide pour obtenir le quotient n. ensuite nous plaçons un point décimal n. et réitérons l'algorithme d'Euclide sur $10r$. Dans l'exemple donné ci-dessus, cela donne successivement :

$$\frac{29}{7} = 4.1\ldots,$$

car $10 = 1 \cdot 10 = \underline{1} \cdot 7 + 3$, le nouveau reste étant $r = 3$.

$$\frac{29}{7} = 4.14\ldots,$$

car $30 = 3 \cdot 10 = \underline{4} \cdot 7 + 2$, le nouveau reste étant $r = 2$.

$$\frac{29}{7} = 4.142\ldots,$$

car $20 = 2 \cdot 10 = \underline{2} \cdot 7 + 6$, etc. On obtient finalement :

$$\frac{29}{7} = 4.142857142857\ldots.$$

On constate, dans cet exemple, que la suite décimale se répète indéfiniment. On dit que $\frac{29}{7}$ est un nombre périodique. On le lit : « quatre virgule 142857-périodique. »On le note :

$$4.\overline{142857},$$

pour indiquer que la séquence 142857 se répète indéfiniment.

On peut montrer que tous les nombres rationnels ont une représentation décimale finie ou périodique.

A.3.4 Nombre de nombre : le cardinal d'un ensemble

Considérons l'ensemble $I = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ et l'ensemble $A = \{a, b, c, d, e\}$. Nous pouvons associer à chaque élément de A un élément de I :

$$A_0 = a, \quad A_1 = b, \quad A_2 = c, \quad A_3 = d, \quad A_4 = e.$$

Ainsi, à chaque élément de I correspond un élément de A et inversement, à chaque élément de A correspond un élément de I. Nous disons que A et I sont en bijection l'un par rapport à l'autre. Intuitivement cela signifie qu'il y a autant d'élément dans A que dans I. On dit cela disant que les ensembles I et A sont *idempotents.*

Définition 12

cardinal On dit qu'un ensemble A est fini s'il existe un entier naturel n qui lui est idempotent. On appelle alors *cardinal* de l'ensemble A, cet entier naturel n. On note :

$$\mathrm{Card}(A) = n.$$

Le cardinal d'un ensemble est le nombre d'éléments que contient cet ensemble. On parle aussi de la puissance d'un ensemble. Dans l'exemple ci-dessus, l'ensemble I est le nombre entier naturel 5. On a ainsi :

$$\mathrm{Card}(A) = 5.$$

Définition 13

dénombrable On dit qu'un ensemble A est *dénombrable* s'il est fini, ou s'il existe une bijection de A dans $\mathbb{N}$.

Autrement dit, un ensemble est dénombrable s'il est fini, ou s'il est infini, mais qu'il est possible de numéroter ses éléments avec les entiers naturels. On dit qu'il a la puissance du dénombrable. On appelle $\aleph_0$, « aleph-zéro, »le cardinal de $\mathbb{N}$. $\aleph_0$ est un nombre *transfini.* Ce n'est pas un nombre naturel, ni un entier relatif.

Il est possible de numéroter les nombres entiers relatifs et les nombres rationnels avec les entiers naturels. Il en découle qu'il y a autant de nombres rationnels que d'entiers relatifs et que d'entiers naturels. Ainsi :

$$\mathrm{Card}(\mathbb{N}) = \mathrm{Card}(\mathbb{Z}) = \mathrm{Card}(\mathbb{Q}) = \aleph_0.$$

A.4 Les nombres réels

A.4.1 Introduction

L'ensemble des nombres rationnels n'est pas *complet.* Il présente des absences qui se manifestent dès que l'on tente de résoudre certains problèmes légitimes, i. e. qui sont clairement posés au sein même des nombres rationnels. Supposons que nous cherchons un nombre x tel que :

$$x^2 = 2.$$

Un simple calcul nous montre que ce nombre doit se trouver entre 1 et 2 puisque le carré de ces nombre vaut respectivement 1 et 4, ce qui entoure la valeur 2.

Nous pourions penser que ce nombre, noté $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel. Si c'est le cas, il existe deux nombres entiers a et b, premiers entre eux, tels que :

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}.$$

En élevant au carré cette égalité, nous obtiendrions :

$$2 = \frac{a^2}{b^2},$$

d'où :

$$a^2 = 2b^2. \tag{A.1}$$

Comme b^2 est un entier, nous en déduisons que a^2 est un nombre pair. Or le carré de a ne peut être pair que si a est pair. En effet, si a était impair, il existerait un entier n tel que $a = 2n + 1$. et nous aurions alors :

$$a^2 = (2n + 1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 = 2(2n^2 + 2n) + 1.$$

Ce qui est résolument un nombre impair. Donc, pour le cas qui nous occupe, a doit être pair et il s'écrit alors $a = 2n$. La relation (A.1) devient alors :

$$4n^2 = 2b^2,$$

soit :

$$2n^2 = b^2.$$

Ainsi b^2 est pair, donc b est également pair. Ainsi, si $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ ou a et b sont irréductibles, on voit que a et b sont tout deux pairs. Ils sont donc réductibles, ce qui contredit l'hypothèse de départ. Ceci montre que $\sqrt{2}$ ne peut pas être écrit comme une fraction. Ce n'est pas un nombre rationnel. On dit que c'est un nombre *irrationnel.*

On peut montrer de la même manière que $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \ldots$ ne sont pas rationnels. Il est ainsi nécessaire d'"agrandir" l'ensemble $\mathbb{Q}$ par un nouvel ensemble, qui contient aussi tous ces nombres irrationnels. Cet ensemble est appelé $\mathbb{R}$. On montre également que les nombres $\pi = 3.1415926535\ldots$ et $e = 2.718281828\ldots$ sont des nombres irrationnels.

A.4.2 Caractérisation des nombres réels

Plusieurs auteurs ont donnés des définitions diverses des nombres réels. Parmi ces définitions sont a mettre en évidence la définition issue de Dedekind et celle de Cantor. Nous choisirons la définition de Dedekind-Peano-Russel, car elle est dans l'esprit des définitions suivantes et permet d'établir simplement les propriétés de base des réels.

Dedekind a donné des nombres réels une définition qui permet de facilement établir leurs propriétés à partir de celles des rationnels. Pour lui, un nombre réels est une coupure des rationnels.

Définition 14

Coupure (de Dedekind) On appelle *coupure* des rationnels un couple (A, B) de parties de $\mathbb{Q}$ telles que :

1. $A \neq \varnothing$ et $B \neq \varnothing$
2. $A \cup B = \mathbb{Q}$
3. Si $x \in A$ et $y \in B$, alors $x < y$

Les ensembles A et B d'une coupure forment une partition de $\mathbb{Q}$.

Peano et Russel ont donné une version plus simple des réels. Une coupure contient deux ensembles, mais en fait un seul ensemble suffit.

Définition 15

Coupure inférieure On apelle *coupure inférieure ouverte* des rationnels un ensemble C, qui a les propriétés suivantes

1. $C \neq \varnothing$
2. $C \subset \mathbb{Q}$
3. Si $x \in C$ et $y \in \mathbb{Q} - C$, alors $x < y$.
4. Pour tout $x \in C$, il existe $y \in C$ tel que $x < y$.

On peut maintenant définir un nombre réel.

Définition 16

Nombre réel On appelle *nombre réel* une coupure inférieure ouverte.

Comme l'ensemble de toutes les coupures possibles de $\mathbb{Q}$ est une partie de l'ensemble des parties de $\mathbb{Q}$, cet ensemble existe.

Définition 17

On appelle *ensemble des nombres réels*, on le note $\mathbb{R}$, l'ensemble de tous les nombres réels.

Si $x \in \mathbb{Q}$ on définit le nombre réel x^*, correspondant au nombre rationnel x, par

$$x^* = \{r \in \mathbb{Q} \mid r < x\}$$

De cette façon, en identifiant tous les rationnels x par leur nombre réel correspondant x^*, on voit que :

$$\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Remarque 28

Depuis le début de ce paragraphe, toutes les occurrences du symbole $<$ représentent la relation « est inférieur à » dans les rationnels.

Exercice A.1.
Représenter schématiquement sur un axe $\mathbb{Q}$, une coupure, une coupure inférieure.

Comme les nombres réels 0^* et 1^* existent, on peut construire dans $\mathbb{R}$ l'équivalent des nombres entiers naturels, relatifs et des rationnels grâce à l'addition et à la multiplication. Ainsi on peut écrire :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Cet axiome permet de montrer que $\sqrt{2}$ est dans $\mathbb{R}$. Il suffit pour cela de poser :

$$\sqrt{2} = \mathbb{Q}_- \cup \{x \in \mathbb{Q}_+ \mid x^2 < 2\}$$

On vérifie sans peine que C forme une coupure des rationnels. Donc $\sqrt{2}$ est un nombre réel. Reste à prouver que $\sqrt{2}$ ainsi défini a bien la propriété attendue, à savoir :

$$\sqrt{2}^2 = 2,$$

ce que nous verrons plus tard, après avoir défini le produit des réels. Ainsi nous avons montré que $\mathbb{R}$ ne peut pas se confondre avec $\mathbb{Q}$, puisque $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel. Ainsi nous avons :

$$\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}, \qquad \text{et :} \quad \mathbb{Q} \neq \mathbb{R}.$$

A.4.3 Relation d'ordre

Les nombres réels sont ainsi des ensembles et on obtient naturellement une relation d'ordre dans l'ensemble des réels en définissant la relation $\leqslant$ par

Définition 18

ordre des réels On appelle $\leqslant$ la relation définie dans $\mathbb{R}$ par

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad (x \leqslant y \Leftrightarrow x \subset y)$$

Théorème 1.17 (d'ordre des réels)

Pour tout $\{x^*, y^*, z^*\} \in \mathbb{R}$ on a

1. "$\leqslant$" est réflexive : $x^* \leqslant x^*$
2. "$\leqslant$" est antisymétrique : $(x^* \leqslant y^*$ et $y^* \leqslant x^*) \Rightarrow \; x^* = y^*$
3. "$\leqslant$" est transitive : $(x^* \leqslant y^*$ et $y^* \leqslant z^*) \Rightarrow \; x^* \leqslant z^*$
4. "$\leqslant$" est connexe : $x^* \leqslant y^*$ ou $y^* \leqslant x^*$

La preuve de ce théorème ne présente aucune difficulté, nous la laisserons en exercice.

Remarque 29

Ainsi, $\leqslant$ est une relation d'ordre total dans $\mathbb{R}$. On dit alors que $\mathbb{R}$ est un ensemble totalement ordonné.

A.4.4 La somme

Si p^* et q^* sont les nombres réels correspondant aux rationnels p et q, on doit clairement avoir :

$$p^* + q^* = (p+q)^* = \{r \in \mathbb{Q} \mid r < p + q \}.$$

Or les réels sont des ensembles de rationnels, on peut donc définir la somme des réels à partir de celle des rationnels. Mais, en général, on ne peut pas écrire :

$$x^* = \{q \in \mathbb{Q} \mid q < \alpha\}$$

pour un réel x^*, car le nombre α n'est généralement pas rationnel, mais un réel. On définit alors la somme des réels en s'appuyant sur la somme des correspondants des rationnels

Définition 19

somme des réels Soit $x^* \in \mathbb{R}$ et $y^* \in \mathbb{R}$ on appelle *somme* de x^* et y^* le nombre réel :

$$x^* + y^* = \bigcup_{p \in x^*, q \in y^*} p^* + q^* = \bigcup_{p \in x^*, q \in y^*} (p+q)^* \tag{A.2}$$

Autrement dit, on fait la somme $q^* + r^*$ pour tous les rationnels q et r dans x^* et y^* respectivement. $(p+q)^*$ est bien une coupure et donc un nombre réel. La réunion de deux coupures est encore une coupure. De même une réunion infinie de coupures est encore une coupure. Ainsi la définition A.2 a bien un sens et la somme est une opération interne dans $\mathbb{R}$.

On démontre alors sans peine que

Théorème 1.18 (La somme)

La somme des nombres réels possède les propriétés suivantes :

1. "+" est associative : $(x^* + y^*) + z^* = x^* + (y^* + z^*)$.
2. "+" admet un élément neutre, c'est $0^* \in \mathbb{R}$: $0^* + x^* = x^* + 0^* = x^*$
3. tout $x^* \in \mathbb{R}$ possède un *opposé* $(-x)^* \in \mathbb{R}$: $x^* + (-x)^* = (-x)^* + x^* = 0^*$
4. "+" est commutative : $x^* + y^* = y^* + x^*$

Remarque 30

Ainsi $\mathbb{R}$ muni de la somme des nombre réels forme un groupe abélien $(\mathbb{R}, +)$.

A.4.5 Le produit

Nous voulons maintenant définir le produit des nombres réels. Évidemment, nous voulons que ce produit soit compatible avec celui des rationnels. On veut donc que si p et q sont des rationnels, alors :

$$p^* \cdot q^* = \{r \in \mathbb{Q} \mid r < pq\} = (pq)^*.$$

Comme pour la somme, nous définissons le produit des réels grâce à celui des rationnels. Mais une difficulté se présente à nous. En effet, comme les coupures contiennent tous les rationnels négatifs, à partir d'une certaine valeur, les $(pq)^*$ deviennent très grands lorsque q ou p sont très petits négatifs.

Procédons par étapes. Si n est un nombre naturel alors en multipliant tous les rationnels d'un réel x^* par n, on obtient encore une coupure des rationnels, soit un nombre réel, que l'on associe naturellement à :

$$n \cdot x^* = \{r \in \mathbb{Q} \mid r = nx, \text{ pour } x \in x^*\}.$$

Il est clair que si $q \in \mathbb{Q}$ on retrouve : $n \cdot q^* = (nq)^*$.

En effet, soit $r \in q^*$, on a alors

$$r < q$$

multiplions les deux membres par n, qui est positif, on obtient alors

$$nr < nq.$$

Ce qui prouve que $n \cdot q^* \subset (nq)^*$.

De plus, supposons $p \in (nq)^*$, on a alors

$$p < np$$

multiplions les deux membres par $\frac{1}{n}$. On obtient

$$\frac{p}{n} < q,$$

soit, en posant $r = \frac{p}{n}$, $r < q$ donc $r \in q^*$ et $p = nr \in n \cdot q^*$. Ce qui prouve que $(nq)^* \subset n \cdot q^*$. Ainsi, on a bien : $n \cdot q^* = (nq)^*$.

De même, si $q \in \mathbb{Q}_+$, on définit naturellement le produit de tous les éléments de x^* par q au nombre

$$q \cdot x^* = \{r \in \mathbb{Q} \mid r = qx, \text{ pour } x \in x^*\}.$$

Mais si $q \in \mathbb{Q}_+$, alors l'ensemble des produits des rationnels de x^* par $-q$ n'est plus une coupure, par contre, le complémentaire de de cet ensemble dans $\mathbb{Q}$ est une coupure et on le définit comme étant le produit de x^* par $-q$

$$(-q) \cdot x^* = \mathbb{Q} - \{r \in \mathbb{Q} \mid r = (-q)x, \text{ pour } x \in x^*\}$$

Là encore, on montre que si $p \in \mathbb{Q}$, on a : $(-q)p^* = ((-q)p)^*$.

Définition 20

Le produit des réels On définit ainsi le produit $x^* \cdot y^*$ des deux nombres réels x^* et y^*

$$x^* \cdot y^* = \{r \in \mathbb{Q} \mid \exists p \in x^*, r \in py^*\}$$

Le produit ainsi défini est une opération interne dans $\mathbb{R}$ et permet de démontrer le théorème

Théorème 1.19 (Le produit)

Le produit des nombres réels vérifie les propriétés suivantes :

1. "$\cdot$" est associative : $(x^* \cdot y^*) \cdot z^* = x^* \cdot (y^* \cdot z^*)$
2. "$\cdot$" admet un élément neutre $1^* \neq 0^*$: $x^* \cdot 1^* = 1^* \cdot x^* = x^*$
3. Pour tout $x^* \in \mathbb{R}^*$ il existe un *inverse*, noté $x^{*-1} = \frac{1}{x^*} \in \mathbb{R}^*$, tel que : $x^* \cdot x^{*-1} = x^{*-1} \cdot x^* = 1^*$
4. "$\cdot$" est commutative : $x^* \cdot y^* = y^* \cdot x^*$
5. "$\cdot$" est distributive relativement à "$+$" : $x^*(y^* + z^*) = x^*y^* + x^*z^*$.

Remarque 31

Ce théorème affirme que $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ est un groupe abélien. Comme nous l'avons vu, $(\mathbb{R}, +)$ est un groupe abélien également. Comme la multiplication est distributive relativement à l'addition des réels, la structure $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ est alors un *corps commutatif*. Comme, de plus, $\leqslant$ est une relation d'ordre total dans $\mathbb{R}$, $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leqslant)$ est un corps abélien totalement ordonné.

Ceci fait que l'ensemble $\mathbb{R}$ a les mêmes propriétés que l'ensemble $\mathbb{Q}$ relativement à l'addition et à la multiplication.

Dorénavant, nous ne distinguerons plus les réels par la notation x^* et écrirons simplement x.

Théorème 1.20

On a

1. pour tout $z \in \mathbb{R}$: $x \leqslant y \;\Rightarrow\; x + z \leqslant y + z$
2. Si $x \leqslant y$ et $u \leqslant v$, alors : $x + u \leqslant y + v$
3. Si $0 \leqslant x$ et $0 \leqslant y$ alors : $0 \leqslant xy$.

Remarque 32

Les nombres réels $x \leqslant 0$ sont dits négatifs et forment l'ensemble $\mathbb{R}_-$ des nombres réels négatifs. Les nombres positifs, $0 \leqslant x$, constituent l'ensemble $\mathbb{R}_+$ des nombres réels positifs. Sans le nombre 0, ces ensembles s'écrivent respectivement $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$.

Cardinal des nombres réels

Il n'est pas possible de numéroter les nombres réels avec les entiers naturels. Il y a une infinité de fois plus de nombres réels que de nombres entiers. On appelle $\aleph_1$ le nombre d'éléments de $\mathbb{R}$. Une conjecture mathématique (*l'hypothèse du continu*) stipule qu'il n'y a pas d'ensemble dont le nombre d'élément se situe entre $\aleph_0$ et $\aleph_1$. Autrement dit, $\mathbb{R}$ est le plus petit ensemble strictement plus grand que $\mathbb{N}$ (en nombre d'éléments) :

$$\mathrm{Card}(\mathbb{R}) > \mathrm{Card}(\mathbb{N}).$$

Il y a donc une très grande différence entre $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ d'une part et $\mathbb{R}$ de l'autre.

K. Gödel a montré que si les axiomes de la théorie des ensembles sont non-contradictoires, alors si on leur ajoute cette hypothèse en tant qu'axiome, la théorie des ensembles est encore non-contradictoire.

A.5 Les nombres complexes

Nous verrons dans le chapitre III.6 que certaines équations n'ont pas de solution réelle, mais que l'on peut néanmoins calculer la somme des solutions et leur produit. Ainsi, il doit exister des solutions de ces équations. Mais ces solutions ne sont pas réelles.

En fait, pour résoudre le problème, il suffit de considérer un nombre, que l'on représente par la lettre i, tel que

$$i^2 = -1.$$

Ce nombre i ne peut clairement pas être un nombre réel, puisque le carré de tout nombre réel est positif. On définit alors un *nombre complexe* par la donnée de deux nombres réels $(a, b) = a + bi$.

On généralise alors la notion d'addition, et de multiplication des réels aux nombres complexes, de manière naturelle

$$(a + bi) + (a' + b'i) = a + bi + a' + b'i = (a + a') + (b + b')i,$$

et

$$\begin{aligned}(a + bi)(a' + b'i) &= aa' + ab'i + a'bi + bb'i^2 = aa' + (ab' + a'b)i + bb'(-1)\\ &= (aa' - bb') + (ab' + a'b)i.\end{aligned}$$

L'*ensemble des nombres complexes* $\mathbb{C}$ est défini par l'ensemble $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Les nombres réels $x \in \mathbb{R}$ peuvent être identifiés aux nombres complexes de la forme $x = (x, 0)$. Ceux de la forme $(0, y)$ sont dits *imaginaires purs.*

L'addition des complexes est définie par

$$(a, b) + (a', b') = (a + a', c + b')$$

et la multiplication des complexes par

$$(a, b) \cdot (a', b') = (aa' - bb', ab' + a'b).$$

Pour $i = (0, 1)$, on voit que

$$i^2 = (-1, 0) = -1.$$

$(\mathbb{C}, +, \cdot)$ est un corps commutatif complet.

Remarque 33

Dans $\mathbb{C}$ le carré d'un nombre peut être négatif.

Remarque 34

On a, dans un certain sens

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

De plus, on a

$$\mathrm{Card}(\mathbb{C}) = \mathrm{Card}(\mathbb{R}) = \aleph_1.$$

A.6 Exercices

A.6.1 Les entiers naturels

Exercice A.2.
Construire l'ensemble des parties du nombre entier naturel 1. Combien d'éléments contient-il ? Est-ce un nombre entier naturel ?

Exercice A.3.
Construire l'ensemble des parties du nombre entier naturel 3. Combien d'éléments contient-il ? Est-ce le nombre entier naturel 4 ?

Exercice A.4.
Calculer :
a) $2 + 3$, d) $2 \cdot 2$
b) $4 + 5$, e) $3 \cdot 4$
c) $3 + 4$, f) $4 \cdot 5$

A.6.2 Les entiers relatifs

Exercice A.5.
Représenter le nombre entier relatif 0. Donner des éléments de sa classe d'équivalence.

Exercice A.6.
Montrer que :
a) $2 + (-2) = 0$
b) $3 + (-1) = 2$
c) $3 + (-5) = -2$

A.6.3 Les nombres rationnels

Exercice A.7.
Démontrer le théorème 1.4

Exercice A.8.
Démontrer les propriétés 1.12.

Exercice A.9.
Démontrer la propriété 1.13.

Exercice A.10.
Partant de la définition de $\mathbb{Q}_+$ et de $\geqslant$ montrer que

$$\mathbb{Q}_+ = \{r \in \mathbb{Q} \mid r \geqslant 0\}.$$

Exercice A.11.
Montrer, comme dans l'exercice précédent que

$$\mathbb{Q}_- = \{r \in \mathbb{Q} \mid r \leqslant 0\}.$$

A.6.4 Les nombres réels

Exercice A.12.
Montrer que $\sqrt{3}$ n'est pas un nombre rationnel.

Exercice A.13.
Montrer que $\sqrt{5}$ n'est pas un nombre rationnel.

Exercice A.14.
Montrer que $\sqrt{2}$ est un nombre réel.

A.6.5 Les nombres complexes

Exercice A.15.
Trouver deux nombres complexes $z \in \mathbb{C}$ tels que $z^2 = -4$.

Exercice A.16.
Calculer le carré des nombres complexes suivants :
a) $2 + i$ c) $-3 - i$
b) $-1 + i$ d) $-1 - i$

Exercice A.17.
Montrer que les nombres complexes $z_1 = -1+i$ et $z_2 = -1-i$ sont des solutions de l'équation du second degré :

$$x^2 - 2x + 2 = 0$$

Annexe B

Solutions aux exercices

Chapitre I.1. Logique

1.2

a) proposition

b) si le critère est vérifiable, proposition sinon pas

c) Si le critère est clair (à parti quel point elle est grande ?) p sinon pas.

d) pas une proposition (p.ex. "est vide"

e) pas une proposition (p.ex. "sont blanches")

f) proposition (F)

g) cela dépend du contexte (p.ex. thermomètre)

h) pas une proposition (p.ex. "je me trouve...")

i) proposition (V)

j) pas une proposition (p.ex "= 28")

1.3

a) Vrai b) Faux c) Faux
d) Vrai e) Vrai f) Faux

1.4

a) « Il pleut ou les routes ne sont pas mouillées. »(Vrai)

b) « Il ne pleut pas et les routes sont mouillées. »(Faux)

c) « S'il ne pleut pas, alors les routes ne sont pas mouillées. »(Vrai)

d) « Si les routes ne sont pas mouillées, alors il ne pleut pas. »(Vrai)

e) « S'il pleut, alors les routes ne sont pas mouillées. »(Faux)

f) « S'il ne pleut pas, alors les routes sont mouillées. »(Vrai)

g) « Il est faut qu'il pleuve et que les routes ne soient pas mouillées. »(Vrai)

1.5

p	$\neg p$	$\neg(\neg p)$
V	F	V
F	V	F

On peut remarquer que les valeurs de vérité de la première colonne et la dernière colonne sont identiques.

1.6

Avec $p \wedge q = \neg\big((\neg p) \vee (\neg q)\big)$ on peut faire la table de vérité

p	$\neg p$	q	$\neg q$	$(\neg p) \vee (\neg q)$	$\neg\big((\neg p) \vee (\neg q)\big)$
V	F	V	F	F	V
V	F	F	V	V	F
F	V	V	F	V	F
F	V	F	V	V	F

La dernière colonne donne la valeur de vérité de $p \wedge q$.

1.7

Avec $p \Rightarrow q = (\neg p) \vee q$ on peut faire la table de vérité

p	$\neg p$	q	$(\neg p) \vee q$
V	F	V	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	V	F	V

La dernière colonne donne la valeur de vérité de $p \Rightarrow q$.

1.8

p	q	r	$(q \vee r)$	$p \wedge (q \vee r)$	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	V	V
V	F	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	V	V	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	V	V	F	V
F	F	V	V	V	F	V	V
F	F	F	F	F	F	F	F

On constate que les deux colonnes concernées (la 5$^{\text{e}}$ et la dernière) ont exactement les mêmes valeurs.

1.9

a) On a

$$\neg(\forall x, p(x)) \leftrightarrow \exists x, \neg p(x)$$

b) On a

$$\neg(\exists x, p(x)) \leftrightarrow \neg(\neg(\forall x, \neg p(x))) \leftrightarrow \forall x, p(x)$$

1.10

1.11

On a

$$\neg(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \neg\big((\neg p) \vee q\big) \Leftrightarrow \neg(\neg p) \wedge (\neg q) \Leftrightarrow p \wedge (\neg q)$$

1.12

On a

$$(\neg p \vee q) \Leftrightarrow \neg\big(p \wedge (\neg p)\big) \Leftrightarrow \neg(\neg p \wedge p)$$

1.13

On a

$$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow \big((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)\big) \Leftrightarrow \big((q \Rightarrow p) \wedge (p \Rightarrow q)\big) \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow p)$$

1.16

On a

$$(p \rightarrow p) \Leftrightarrow (\neg p \vee p)$$

c'est le principe du tiers exclu. On montre que c'est une tautologie à l'aide d'une table de vérité.

1.17

1.18

cf. exercice 1.11.

1.19

1. $P \Rightarrow Q$ V, réciproque F (5 n'est pas divisible par 30), donc P et Q ne sont pas équivalentes.
2. $P \Rightarrow Q$ F, réciproque V, non équivalentes.
3. $P \Rightarrow Q$ V, réciproque V, équivalentes.
4. $P \Rightarrow Q$ F, réciproque V, non équivalentes.
5. $P \Rightarrow Q$ V, réciproque V, équivalentes.
6. $P \Rightarrow Q$ V, réciproque V, équivalentes.
7. $P \Rightarrow Q$ F, réciproque V, équivalentes.

1.20

1. Si x n'est pas divisible par 5, alors x n'est pas divisible par 30.
2. Si x n'est pas un carré, alors x n'est pas un rectangle.
3. Si x se termine par le chiffre 0, alors x est divisible par 10.
4. Si x n'est pas nul, alors le produit xy n'est pas nul.
5. Si x n'est pas divisible par 3 ou par 5, alors x n'est pas divisible par 15.
6. Si y n'est pas le père ou la mère de x, alors x n'est pas le fils de y.
7. Si x n'est pas équilatéral, alors x n'est pas isocèle.

1.21

D'autre solutions existent, avec P l'ensemble des nombres premiers et $\mathcal{D}_n$ est l'ensemble des diviseurs de n.

1. F, $\forall x \in \mathbb{N}, \frac{x}{2} \in \mathbb{Z}$
2. V, $\exists x \in P, \frac{x}{2} \in \mathbb{N}$, avec P l'ensemble des nombres premiers.
3. V, $\forall x \in \mathbb{N}, x \leqslant x^2$
4. F (zéro), $\neg(\exists n \in \mathbb{N}, \frac{2^n}{2} \notin \mathbb{N}$ ou encore $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{2^n}{2} \in \mathbb{N}$
5. V, $\exists! x \in P, \forall n \in \mathbb{N}, x \neq 2n+1$
6. F (à cause de $2 = 1^2 + 1$, V pour les autres), $\forall x \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}, x = n^2 + 1, \frac{x}{2} \in \mathbb{N}$
7. V, $\exists x \in \mathbb{N}, \frac{n}{2} \notin \mathbb{N}, \frac{42}{n} \in \mathbb{N}$
8. F (les nombres parfaits, p.ex. $6 = 1 + 2 + 3$), $\neg(\exists n \in \mathbb{N}, n = \sum_{m \in \mathcal{D}_n} m)$
9. F, $\forall x \in \mathcal{R}, x \in \mathcal{C}$ avec $\mathcal{R}$ l'ensemble des rectangles et $\mathcal{C}$ l'ensemble des carrés.
10. F,
11. V $(3, 2)$,
12. V, $\forall m, n \subset \mathbb{N}, m + n = n + m$

Chapitre II.1. Théorie des ensembles

1.4

1. $A = \{\text{pouce}, \text{index}, \text{majeur}, \text{annulaire}, \text{auriculaire}\}$
2. $B = \{a, n, t, i, c, o, s, u, l, e, m\}$
3. $C = \{\text{printemps}, \text{été}, \text{automne}, \text{hiver}\}$
4. $D = \{\text{été}, \text{automne}\}$
5. $E = \varnothing$
6. $F = \{31, 33, 37\}$
7. $G = \{2\}$
8. $H = \varnothing$
9. $I = \{0, 10, 20, 30\}$
10. $J = \{-20, -15, -10, -5, 0\}$
11. $K = \{11, 13, 15, 17, 19\}$

1.5

Chapitre II.2. Relations

Chapitre III.1. Opérations élémentaires

Chapitre III.2. Puissances et racines

Chapitre III.3. Polynômes et fonctions rationnelles

B.0.1 Polynômes

Exercice B.1

Calculer la valeur numérique des polynômes suivants

1. -4
2. -4
3. 28
4. 0
5. -1
6. 0
7. 0 et 0
8. -11
9. 1
10. -11
11. -7
12. $-\dfrac{19}{216}$

Exercice B.1.
Effectuer les additions ou les soustractions suivantes, indiquer le degré du polynôme obtenu et ordonner le polynôme

1. $(x^4 - x^3 + 2) + (x^2 - 2x + 5)$
2. $(x^2 - 5x - 3) + (2x^2 - 3x + 1)$
3. $(-2x^5 + 3x^2 - 1) + (-x^5 - 3x^3 + x^2 - 5)$
4. $(\frac{1}{8}x^2 - 2x + 3) + (-\frac{5}{8}x^2 - 3)$
5. $(-3x^4y^2 + 2xy^2 - xy + y^2) + (4xy^2 + 2x^2 - y^2)$
6. $(2x^3 - 3x^2 + 2) + (-5x^3 + x - 1) + (-2x - 3)$
7. $(3x^2y^2 - 4xy + y^2) + (2x^2y^2 + 5xy^2 + 4xy + 1) + (-5x^2y^2 - y^2 - 5xy^2 - 1)$
8. $(2x^4 - x^3 + 1) - (3x^4 - x^3 - 2)$
9. $-(3x^2 + 2x - 1) - (-3x^2 + 2x + 1)$
10. $(\frac{2}{5}x^3 - 5) - (\frac{3}{5}x^3 - 2x^2 - 1)$
11. $(5x^3y^3 - 2x^2y - x^2 - y^2) - (-2x^2y + xy - 2x^2 + 5)$
12. $(2x^2y^2 - 3xy - 4) - (2x^2y^2 + 3xy - 5)$

Exercice B.2.
Effectuer les multiplications suivantes et ordonner le polynôme obtenu

1) $xy(-2x^3y^2)$
2) $(-5x^2y)(-\frac{2}{5}xy)$
3) $(3xy^3z^2)(2x^2yz^3)(-xy)$
4) $(3x^{2n-1}y)(5x^{n+1}y^2)$
5) $6x(x-3)$
6) $-4x^2y(2x-y)$
7) $-2ax^2y(-3x^2y + 4ay)$
8) $(x^2 + 2xy + y^2)x^2y$
9) $-\frac{2}{3}xy^2(\frac{3}{2}x^2 + \frac{2}{5}y^2)$
10) $6x^ny^{2m}(x^{3n-1} + y^m)$
11) $(x-1)(x+2)$
12) $(2x-3)(x-5)$
13) $(x-y)(3x-4y)$
14) $(x+1)(2x+1)(x-3)$
15) $(2x-5)(x^2+5x+6)$
16) $(x-y+z)(xy+yz+xz)$
17) $(x-y)(x^3+x^2y+xy^2+y^3)$
18) $4x(x+y) - 2x(x-y)$
19) $(x+y)(3x-y) - (x-y)(3x+y)$
20) $(3x-1)(1-4x) - (4x-3)(x-2)$
21) $(x-y+z)(x+y) - (x+y-z)(y+z) - (-2y^2 - x + z)y$
22) $x(x^2 + (n-1)x + 1) + (x^2 - (n-1)x + 1)x$

Exercice B.3.
Écrire immédiatement les produits suivants

1) $(x+3)(x+5)$
2) $(x+5)(x-2)$
3) $(x-3)(x+2)$
4) $(x-4)(x-5)$
5) $(a+3)(a+2)$
6) $(a-4)(a+5)$
7) $(x+a)(x-b)$
8) $(x-a)(x-b)$
9) $(x-2a)(x+3a)$
10) $(x-3a)(x-5a)$
11) $(x^2+4)(x^2-1)$
12) $(x^2-3)(x^2+5)$
13) $(x^2-8)(x^2-3)$
14) $(a^2-b)(a^2+2b)$
15) $(x^2+a)(x^2+3a)$
16) $(x^2-2a)(x^2-4a)$
17) $(a-2x)(a+x)$
18) $(a-3x)(a-x)$
19) $(2x+1)(x-5)$
20) $(3x+2)(x+1)$
21) $(2x-1)(x-3)$
22) $(3x-2)(2x-1)$
23) $(4x+3)(7x-2)$
24) $(2x^2-3)(x^2-1)$
25) $(2x^2+3)(x^2+2)$
26) $(x^2+x+2)(x+1)$
27) $(x^2-x+3)(x-2)$
28) $(x^3+x^2-x+2)(x+3)$
29) $(x^2+3x+1)(x^2-1)$
30) $(x^2+x-3)(x^2-x+1)$

Exercice B.4.
Former le carré et le cube des binômes suivants

1) $x+y$
2) $x-a$
3) $2a+b$
4) $ax-by$
5) $1-4abc$
6) x^2-3b^2
7) $2ab^2c^3-5$
8) $-0.3a^2+0.2b^2$
9) a^m+b^n
10) $2a^{3m}-3b^{2n}$
11) $-ab^{n+1}+a^{m+1}b$
12) $ax^{m-1}-2by^{n+1}$

Exercice B.5.
Écrire immédiatement les produits suivants

1) $(a+3)(a-3)$
2) $(x-y)(x+y)$
3) $(a^2-b^2)(a^2+b^2)$
4) $(-ax+b)(ax+b)$
5) $(-2a-4b)(2a-4b)$
6) $(2xy^2+c^2)(2xy^2-c^2)$
7) $(3a^2x^3+7b^2y^3)(3a^2x^3-7b^2y^3)$
8) $(a+b-c)(a+b+c)$
9) $(a^2+b^2-ab)(a^2+b^2+ab)$
10) $(2x-y-3z)(2x+y+3z)$
11) $(x-y)(x+y)(x^2+y^2)$
12) $(a^2-4a+4)(2-a)$
13) $(x^2+3)(x^4+9)(x^2-3)$
14) $(a^2+4a+4)(a+2)$

Exercice B.6.
Effectuer les opérations suivantes et réduire le polynôme obtenu

1. $3(2-x)^2-5(x+1)^2$
2. $((x+1)y-(x-1))^2$
3. $(3(x+y)-z)^2-(3(x+y)+z)^2$
4. $(xy(x-y))^3$
5. $(x+y)^3-(x-y)^3-6x^2y$
6. $(x+2)^3-4(x+1)^3+6x^3-4(x-1)^3+(x-2)^3$
7. $(x^2-xy)^2-(x^2-xy-2y^2)^2+(y(x+2y))^2$
8. $10(x-1)^3-2(3(x-1)^2-5(1-x)^3)$
9. $36(x-2)^4-9((x-1)(x^2+x+1)+4(2-x)^4)+9(x+1)(x^2-x+1)$

Exercice B.7.
Effectuer les opérations suivantes et réduire le polynôme obtenu

1. $(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$
2. $(x^2+2x-1)(x^2-2x+1)$
3. $(a+2b+c-d)(a-2b+c+d)$
4. $(x^3+x^2+x+1)(x^3-x^2+x-1)$
5. $(a^2+2ab+b^2-c^2)(2ab+b^2+c^2-a^2)-(a^2-2ab+b^2-c^2)(b^2-a^2+c^2-2ab)$
6. $(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)$
7. $(a+2)(a^2-2a+4)-(a-2)(a^2+2a+4)$
8. $(a+b)(a^2+ab+b^2)(a-b)(a^2-ab+b^2)$
9. $(x+y)^3-(x-y)^3-(x^3-y^3)-(x-y)(x^2+xy+y^2)$
10. $(a+b+c)^2-[(a-b-c)^2-(a^2+b^2+c^2)+4a(b+c)]$
11. $(a+b+c+d)^2+(a-b-c+d)^2+(a-b+c-d)^2+(a+b-c-d)^2$
12. $(a+b)^4+(a^4+b^4)-2(a^2+b^2+ab)^2$

13. $a(b+c)(b^2+c^2-a^2)+b(c+a)(c^2+a^2-b^2)+c(a+b)(a^2+b^2-c^2)$
14. $[(x+1)y-(x-1)]^2-[(y+1)x-(y-1)]^2$
15. $[(1+x)^3+(1+x)^2y+(1+x)y^2+y^3]-[3x(x+1)+y(y+1)+2xy+1]$
16. $(8a^3-x^6)(8a^3+x^6)-(4a^2-x^4)[2a(2a+x^2)+x^4][4a^2-x^2(2a-x^2)]$

B.0.2 Factorisation et identités remarquables

Exercice B.8.
Calculer mentalement

1. $19^2, 21^2, 22^2, 29^2, 41^2, 42^2$
2. $19 \cdot 21, 29 \cdot 31, 41 \cdot 39, 18 \cdot 22$

Exercice B.9.
Calculer les carrés de binômes suivants

1) $(x+5)^2$	2) $(7-x)^2$
3) $(2x+3)^2$	4) $(5x-4)^2$
5) $(-2x-5)^2$	6) $(ax-by)^2$
7) $(2x^2+1)^2$	8) $(x^3+y^2)^2$
9) $(\frac{1}{2}x-\frac{1}{4})^2$	10) $(\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}y)^2$
11) $(x^n+y^n)^2$	12) $(3x^{2n}-y^m)^2$
13) $(3x^{2m}-2y^{3n})^2$	14) $(xy^{n-1}-x^{n-1}y)^2$
15) $(ax^{n+1}y-bxy^{n+1})^2$	

Exercice B.10.
Compléter chacune des expressions suivantes de manière qu'elle devienne le carré d'un binôme

1) x^2+6x	2) x^2+25	3) $4x^2-20x$
4) x^2-x	5) y^2+4xy	6) $x^{4n}+1$

Exercice B.11.
Compléter les carrés dont font partie les binômes suivants

1) $4x^2+4x$	2) $4a^2b^2+9$
3) $16a^4-8a^2y^2$	4) $9b^4+16y^6$
5) $9a^6-30a^3b^4$	6) $16a^2b^2+9a^4b^6$
7) $a^{4m}+4a^{2m}y^{3n}$	8) $4b^{4m}+9y^{4n}$
9) $16y^4b^2-16y^2b^2c$	10) $4(x-y)^2+81a^2$
11) $16(2a+b)^2-40(2a+b)$	12) $0.04a^2b^2+0.09a^4c^2$

Exercice B.12.
Former les carrés des polynômes suivants

1) $a+b+c$	5) $3x^2+4x+3$	9) x^3-5x^2+2x+1
2) $a-b+c$	6) x^2-5x+1	10) $2-x-x^2+3x^2$
3) $a-b-c$	7) x^2-2x-5	11) $a-b+c-d$
4) $a-c+b+d$	8) a^2-b^2+1	12) $2x^{m+1}-3x^m+4x^{m-1}$.

Exercice B.13.
Utiliser les identités remarquables pour effectuer les opérations suivantes

1) $(x-5)(x+5)$	2) $(4x-7)(4x+7)$
3) $(x^3+y^2)(x^3-y^2)$	4) $(3xy+2)(3xy-2)$
5) $(x^n+y^m)(x^n-y^m)$	6) $(4x^2yz-7)(7+4x^2yz)$
7) $(x+y+3)^2$	8) $(2x-y-z)^2$
9) $(3x+2y-1)^2$	10) $(x+1)^3$
11) $(2-x)^3$	12) $(2x-1)^3$
13) $(2x-3y)^3$	14) $(x^2-y^3)^3$
15) $(3x^{2n}-y^n)^3$	16) $(x^2+y^2)(x^4-x^2y^2+y^4)$
17) $(x-3)(x^2+3x+9)$	18) $(x+2)(x^2-2x+4)$
19) $(x^3-y)(x^6+x^3y+y^2)$	20) $(3(x+y)-z)(3(x+y)+z)$

Exercice B.14.
Former le terme en x^3 de chacune des expressions suivantes

1) $(x^2-3x+2)(x^2+x)$
2) $(2x^3-5x^2+2x-4)^2$
3) $(x^3-2x^2+4x-8)(x+2)$
4) $(x^2-3xy+2y^2)(5x^2+2xy-7y^2)$
5) $(x+y)^2(x-y)^2$
6) $(x^2-ax)^2-(x^2+ax)^2$

Exercice B.15.
Pour chacun des polynômes suivants, effectuer la substitution indiquée

1. $p(x) = x^3+3x^2-2x+6$ et $x = y-1$
2. $p(x) = x^3+ax^2+bx+c$ et $x = y-\frac{a}{3}$
3. $p(x) = x^4+4x^3+6x^2+4x+5$ et $x = y-1$

Exercice B.16.
Soit deux applications f et g définies dans $\mathbb{R}$. Déterminer, dans les cas suivants, les applications composées $f\circ f, f\circ g, g\circ f$ et $g\circ g$.

1. $f\ :\ x\mapsto 3x-1$ et $g\ :\ x\mapsto x^2+1$
2. $f\ :\ x\mapsto x^2-2x+2$ et $g\ :\ x\mapsto 2x-3$
3. $f\ :\ x\mapsto x^2-1$ et $g\ :\ x\mapsto x^2+5x-3$
4. $f\ :\ x\mapsto x^3-2x$ et $g\ :\ x\mapsto 2x+1$

B.0.3 Division des polynômes

Exercice B.17.
Effectuer les divisions suivantes de polynômes. Écrire le résultat sous les deux formes comme en page 110.

1. $(14x-7):7$
2. $(5x^3-15x^2):(-5x)$
3. $(27x^4+6x^3-9x^2):3x^2$
4. $(2ax-bx):x$
5. $(24a^3x^5-18a^2x^4+6ax^2):3ax$
6. $(-6x^2-5x-8):(2x+1)$
7. $(2x^3-5x^2-4x+8):(x-3)$
8. $(x^3-5x^2-2x+24):(x-4)$
9. $(2x^3+3x^2-23x-12):(2x+1)$
10. $(-6x^2+13x+5):(-2x+5)$
11. $(9x^4-18x^3-5x^2-19x+20):(3x-4)$
12. $(6x^4+7x^3-9x^2+5x-1):(3x-1)$
13. $(2x^5-x^4-2x^3+2x^2+x):(x^2-1)$
14. $(-x^5+2x^4-7x^2+9x+3):(x^2-3)$
15. $(x^7-2x^4-x^3+x^2+x+1):(x^4-1)$
16. $(8x^6-6x^5-12x^4+9x^3+8x^2-26x+15):(4x-3)$
17. $(x^5-5x^3-5x^2+4x+3):(x^2-2x-1)$
18. $(x^4-10x^3+23x^2+10x+2):(x^2-5x-1)$
19. $(x^2+(a+b)x+ab):(x+a)$
20. $(x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ac)x-abc):(x-a)$
21. $(x^4-ax^3+(b-1)x^2+ax-b):(x^2-1)$

Exercice B.18.
Déterminer le nombre réel a de manière que le trinôme ax^2+x-1 soit divisible par le binôme $x+2$ (sans reste).
Même question pour le trinôme x^2+ax-2 et le binôme $x+1$.

Exercice B.19.
Montrer qu'il n'existe pas de nombre réel a tel que le polynôme x^3+2x^2-ax+1 soit divisible par le binôme x^2-1.
Par quelle valeur faut-il remplacer le terme constant (le terme $+1$ du polynôme) pour qu'une telle valeur de a existe ?

Exercice B.20.
Pour chacune des fonctions réelles f définies ci-après, déterminer les valeurs entières positives de la variable x dont l'image par f est un entier positif (commencer par modifier l'écriture de $f(x)$ en effectuant la division).

1) $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$ 2) $f(x) = \dfrac{5x-3}{x+2}$

3) $f(x) = \dfrac{4x+16}{x-2}$ 4) $f(x)\dfrac{x^2-2x+84}{x-1}$

5) $f(x) = \dfrac{x^2+11}{x+1}$ 6) $f(x) = \dfrac{x^3-x^2-5x+15}{x-3}$

Exercice B.21.
Effectuer les divisions suivantes

1. $[3x^2-(3a+b-3)x-3a-b] : (x+1)$
2. $[2x^2+x(4a-b)+2a^2-ab] : (2x+2a-b)$
3. $(6a^{4m}-a^{3m}-82a^{2m}+81a^m+36) : (2a^m-3)$
4. $(4a^{2m+4}+6a^{2m+3}-a^{2m+2}+5a^{2m+1}-2a^{2m}) : (a^{m+1}+2a^m)$.

Exercice B.22.
Les divisions suivantes ne se font pas exactement. Dire quel est le degré maximum du reste, puis effectuer la division

1. $(6x^5+5x^4-25x^3+31x^2-12x+5) : (2x^2-3x+2)$
2. $(120x^4+154x^3+71x^2+14x+8) : (6x^2+5x+1)$
3. $(a^7-4a^6+2a^5+a^4-3a^2+2a-6) : (a^5-3)$
4. $(a^4-a^3b-a^2b^2-ab^3-b^4) : (a-2b)$
5. $(a^8-2a^5+a^4+2a^3+1) : (a^6+a^5-a^3+a+1)$

Exercice B.23.
Déterminer les coefficients littéraux de manière que les divisions suivantes s'effectuent sans reste ; écrire ensuite le quotient

1. $(x^2+ax+12) : (x-3)$
2. $(x^2+ax+15) : (x+3)$
3. $(x^3+ax^2+19x-12) : (x-1)$
4. $(3x^4-ax^3+8x^2-2ax-20) : (x-2)$
5. $(8x^4-3x+a) : (2x-1)$
6. $(2x^3+ax^2+3x-1) : (2x+1)$
7. $(x^3+ax^2+bx+6) : (x-2)(x-3)$
8. $(4x^4+7x^3-ax^2+bx+24) : (x-2)(x+4)$
9. $(x^4+ax^3+3x^2+2x+b) : x(x+1)$
10. $(x^3-5x^2+ax+b) : (x-1)^2$
11. $(x^3+ax^2-9x+b) : (x+1)^2$
12. $(x^3+4x^2+ax+b) : (x^2+x+1)$
13. $(4x^4+ax^3+7x^2+bx+3) : (2x^2+x+1)$
14. $(2x^4-5x^3+ax^2-2x+4b) : (2x^2-x-1)$

B.0.4 Fonctions rationnelles

Exercice B.24.
Simplifier les fractions suivantes et les factoriser si possible

1) $\dfrac{9x^2y^3}{3xy}$

2) $\dfrac{-4x^3y}{12xy^4}$

3) $\dfrac{16xy}{24x^2}$

4) $\dfrac{-15x^6y^3z^2}{-3x^2y}$

5) $\dfrac{6x+18}{3}$

6) $\dfrac{7}{14x-21}$

7) $\dfrac{270x^3-30x}{x^2}$

8) $\dfrac{xy}{xz+xy}$

9) $\dfrac{x-x^2}{5x+x}$

10) $\dfrac{3x-3y}{5x-5y}$

11) $\dfrac{ax+ay}{bx+by}$

12) $\dfrac{7x-7y}{8y-8x}$

13) $\dfrac{5xy^3-5x^3y}{x^3y-xy^3}$

14) $\dfrac{x^2y^2-xy^3+x^4y^2}{x^3y^2}$

15) $\dfrac{x^3-x^2}{x^3+x^2}$

16) $\dfrac{18xyz-15xy}{12xyz-10xy}$

17) $\dfrac{x+4}{2x^2-32}$

18) $\dfrac{x^2-y^2}{x+y}$

19) $\dfrac{x^4-y^4}{x^2-y^2}$

20) $\dfrac{x^2-6x+9}{x-3}$

21) $\dfrac{x^3-1}{x^2-1}$

22) $\dfrac{(x+1)^3}{x^3+1}$

23) $\dfrac{x^2-2xy+y^2}{y^2-x^2}$

24) $\dfrac{1-9x^2}{15xy-5y}$

25) $\dfrac{x^2-9}{x^2-2x-15}$

26) $\dfrac{x^2+(a+b)x+ab}{x^2+(b+c)x+bc}$

27) $\dfrac{x^2-6x+8}{16-x^2}$

28) $\dfrac{x^3+6x^2+12x+8}{2x^2-8}$

29) $\dfrac{x^2-y^2-2yz-z^2}{x+y+z}$

30) $\dfrac{x^2-5x+6}{x^3-9x^2+27x-27}$

31) $\dfrac{x^4+2x^2y^2+y^4}{ax^4+bx^4-ay^4-by^4}$

32) $\dfrac{-x^3-x^2+x+1}{-x^5+x^3-x^2+1}$

33) $\dfrac{x^2-6x+8}{x^3-5x^2+2x+8}$

34) $\dfrac{2x^3+5x^2+4x+1}{x^3+3x^2+3x+1}$

Exercice B.25.
Effectuer les additions ou soustractions suivantes (simplifier le résultat obtenu le cas échéant)

1) $\frac{x}{2}-\frac{x}{3}+\frac{5x}{6}$ 2) $\frac{3x}{5}-\frac{2x}{15}-\frac{5x}{4}$

3) $-\frac{10x}{14}+\frac{8x}{21}+\frac{27x}{81}$ 4) $\frac{ax}{675}-\frac{bx}{45}-\frac{cx}{9}$

5) $\frac{x}{y}+\frac{y}{z}$ 6) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\frac{1}{z}$

7) $\frac{x}{5y}-\frac{z}{3y}$ 8) $\frac{x}{y^2}-\frac{z}{y}$

9) $\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}$ 10) $\frac{3x-2}{7}-\frac{2x-3}{6}+\frac{x-1}{21}$

11) $\frac{-2x-5}{6}-\frac{3x-1}{5}+\frac{4x-1}{21}$ 12) $\frac{4x+4}{4}-\frac{-15x+12}{18}+\frac{-x-2}{6}$

13) $1-\frac{x-y}{x+y}$ 14) $\frac{3}{x+3}-\frac{3}{x+6}$

15) $\frac{-1}{x-1}+\frac{1}{x+3}$ 16) $\frac{1}{x-1}-\frac{4}{x-2}+\frac{3}{x-3}$

17) $\frac{x-y}{x+y}-\frac{x+y}{x-y}$ 18) $\frac{2}{x^2-1}-\frac{3}{x+1}$

19) $\frac{8}{x^2-1}-\frac{4}{x+1}-\frac{2}{x-1}$ 20) $\frac{-7}{2x^2-32}+\frac{4}{3x+12}+\frac{5}{12x-48}$

21) $\frac{x+y}{x-y}-\frac{2xy+2y^2}{x^2-y^2}$ 22) $\frac{-1}{3-x}-\frac{4}{x^2-9}$

23) $\frac{-5}{x^2-3x+2}+\frac{8}{x^2+3x+2}-\frac{2}{x^2-1}$

24) $\frac{-12}{x^2+2x-3}+\frac{15}{x^2+x-6}-\frac{2}{x^2-3x+2}$

25) $\frac{x+11}{x^2+2x-3}-\frac{x+5}{x^2+x-2}+\frac{x+1}{x^2+5x+6}$

26) $\frac{x-18}{x^2-x-12}-\frac{x+9}{x^2+8x+15}+\frac{x+14}{x^2+x-20}$

27) $\frac{x+2}{4x-8}-\frac{x^2+2x-1}{6x^2-24}-\frac{2}{3x}$

28) $\frac{x-1}{x^3+2x^2+2x+1}-\frac{1}{x-1}-\frac{x^2+5}{-x^3+1}$

29) $\frac{-2x^2+x+3y}{x^4-2x^2y^2+y^4}+\frac{x+1}{x^3+x^2y-xy^2-y^3}+\frac{x-1}{x^3-x^2y-xy^2+y^3}$

30) $\frac{x+y}{z^2-(x+y)z+xy}+\frac{x+z}{y^2-xy-yz+xz}+\frac{y+z}{x^2-xz-xy+yz}$

Exercice B.26.
Effectuer les multiplications suivantes

1) $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4x}$

2) $-3x^2 \cdot \frac{1}{5x}$

3) $\frac{4x^2}{7y} \cdot \frac{21y^2}{-2x}$

4) $\frac{-15x^3}{4y} \cdot \frac{2x^4}{3y^2}$

5) $\frac{x^2}{5} \cdot \frac{26}{x^3} \cdot \frac{-x^5}{52}$

6) $\frac{x^2}{y^3} \cdot \frac{-2x^5}{y^2} \cdot \frac{y^5}{-2x^7}$

7) $\frac{-195x^4y^2}{7x^2z} \cdot \frac{-42xz^2}{y^3}$

8) $\frac{x+2}{5(x-2)} \cdot \frac{x-1}{6}$

9) $\frac{x-1}{y^2} \cdot \frac{x+1}{y}$

10) $\frac{3x+3y}{4} \cdot \frac{8x-8y}{3}$

11) $(x^2-25y^2) \cdot \frac{x+5y}{x-5y}$

12) $\frac{36}{3-x} \cdot \frac{x-3}{63}$

13) $\frac{6x^2}{x^2-y^2} \cdot \frac{x-y}{2xy}$

14) $\frac{x+xy}{y-2xy+x^2y} \cdot \frac{x^2-2x+1}{x^2}$

15) $\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1} \cdot \frac{x^2-1}{x+1}$

16) $\frac{9x^2-9x-54}{x^2+2x-3} \cdot \frac{x^2-1}{3x-9}$

17) $\frac{x^2-25}{x^3+3x^2+3x+1} \cdot \frac{17x^2-17x-34}{6-6x} \cdot \frac{x^2-1}{x^2+3x-10} \cdot \frac{x^2+2x+1}{51x-255}$

18) $\frac{xy}{4a-4b} \cdot \frac{a^3-b^3}{2xy+4y} \cdot \frac{4x^2-16}{a^2+ab+b^2}$

19) $(1-x^2) \cdot \left(1-\frac{x-2}{x-1}\right)$

20) $\left(\frac{x-1}{x+2}-\frac{x-3}{x-1}\right)\left(\frac{x+1}{x-1}-\frac{x-1}{x+3}\right)$

21) $\left(\frac{4}{x-y}+\frac{2}{x+y}\right) \cdot \frac{x^2-y^2}{3x+y}$

22) $\frac{x^4-y^4}{x^2+xy+y^2} \cdot \frac{x^4+x^2y^2+y^4}{x^3+y^3} \cdot \frac{x+y}{x^2y+y^3}$

23) $\left(\frac{x-y}{a-b}\right)^5 \cdot \left(\frac{b-a}{y-x}\right)^4$

24) $\left(\frac{x-y}{a+b}\right)^{2n} \cdot \left(\frac{a+b}{y-x}\right)^{2n+1}$

Exercice B.27.
Effectuer les divisions suivantes

1) $\dfrac{-1}{2x} : \dfrac{3}{8x}$

2) $\dfrac{x^2}{27} : \dfrac{-x}{15}$

3) $13 : \dfrac{26}{x}$

4) $\dfrac{2x^2}{5y^3} : \dfrac{6xz}{y}$

5) $\dfrac{7x+14y}{9} : \dfrac{-7}{3}$

6) $\dfrac{2x}{y^2-xy} : \dfrac{x}{x-y}$

7) $\dfrac{273x^2-39x}{x^2-xy} : \dfrac{39}{x-y}$

8) $\dfrac{x^2+6x+8}{14} : \dfrac{x^2+3x-4}{42}$

9) $\dfrac{x^2-y^2}{x} : \dfrac{x-y}{x^3+x^2y}$

10) $\dfrac{125-x^3}{125+x^3} : \dfrac{x-5}{x+5}$

11) $\dfrac{x^3+y^3}{x^3-y^3} : \dfrac{x+y}{x-y}$

12) $\dfrac{x^4-1}{y^3-y^2} : \dfrac{x^3+x^2+x+1}{y^2+2y-3}$

13) $\dfrac{(x-y)^2-z^2}{(x+y)^2-z^2} : \dfrac{x-y-z}{x+y-z}$

14) $\dfrac{x^2-y^2+2yz-z^2}{x^2-y^2-2yz-z^2} : \dfrac{x-y+z}{x-y-z}$

15) $\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{y^2}\right) : \left(\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{x}\right)$

16) $\left(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{2}{x^3}-\dfrac{3}{x^4}\right) : \left(\dfrac{1}{x^3}-\dfrac{1}{x}\right)$

17) $\left(\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{4}{x^2}\right) : \left(\dfrac{2}{x}+\dfrac{x}{2}\right)$

18) $\left(\dfrac{x^2}{y^2}+\dfrac{y}{x}\right) : \left(\dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}\right)$

19) $\left(\dfrac{16}{x^2}-1\right) : \left(-\dfrac{x}{4}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{x}\right)$

20) $(x^2-5x+6) : \left(\dfrac{9}{x^2}-1\right)$

21) $\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8x}\right) : \left(\dfrac{x^3}{2}-\dfrac{1}{16}\right)$

22) $\left(x^2-2x+4-\dfrac{x^3+7}{x+2}\right) : \dfrac{1}{x+2}$

23) $\left(x^2-xy+y^2-\dfrac{y^3}{x+y}\right) : \dfrac{y^3}{x^2-y^2}$

Exercice B.28.
Simplifier les fractions composées suivantes

1) $\dfrac{\frac{5}{8}}{15}$

2) $\dfrac{5}{\frac{8}{15}}$

3) $\dfrac{\frac{4}{7}}{\frac{8}{21}}$

4) $\dfrac{\frac{3}{16}+\frac{7}{4}}{5}$

5) $\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{3}{5}}{1-\frac{2}{5}}$

6) $\dfrac{1-\frac{2}{5}+\frac{1}{4}}{3-\frac{3}{4}+\frac{1}{10}}$

7) $\dfrac{1}{3+\frac{1}{2+\frac{1}{5}}}$

8) $\dfrac{\frac{1}{24}-\frac{1}{6}}{\frac{5}{12}-\frac{3}{\frac{1}{24}-\frac{11}{12}}}$

9) $2+\dfrac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{3+\frac{1}{4}}}}$

10) $\dfrac{\frac{x}{2}+\frac{1}{3}}{\frac{x}{3}-\frac{1}{2}}$

11) $\dfrac{x-\frac{x}{y}}{x+\frac{x}{y}}$

12) $\dfrac{1-\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}}$

13) $\dfrac{\frac{2}{x-3}-\frac{1}{x+3}}{\frac{2}{x+3}-\frac{4}{x-3}}$

14) $\dfrac{\frac{x}{x-y}+\frac{x}{x+y}}{1+\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}}$

15) $\dfrac{\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}}$

16) $\dfrac{\frac{x}{2x-y}+\frac{y}{x+2y}}{\frac{x}{2x-y}-\frac{y}{x+2y}}$

17) $\dfrac{\frac{x}{x+y}+\frac{y}{x-y}+\frac{2xy}{x^2-y^2}}{\frac{1}{(x-y)^2}+\frac{1}{(x+y)^2}}$ 18) $\dfrac{1}{x-\frac{x^2-1}{x-\frac{1}{x-1}}}$

19) $\dfrac{x-y}{x^2-xy-\frac{(x-y)^2}{1-\frac{x}{y}}}$ 20) $3-\dfrac{1}{2-\frac{1}{1-\frac{1+2x}{1-2x}}}$

21) $\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{-5}\left(\dfrac{1}{1-x}\right)^{3}\left(\dfrac{1}{1+x}\right)^{-4}$ 22) $\dfrac{\frac{x+2}{4}+\frac{x+2}{x-3}}{\frac{x-1}{3}+\frac{x-1}{x-2}}\cdot\dfrac{\frac{x+3}{3}-\frac{x+3}{x-2}}{\frac{x-5}{12}+\frac{x-5}{4(x-1)}}$

Exercice B.29.
Soit les deux fonctions rationnelles f et g définies respectivement par

$$f(x)=\frac{x}{2-x} \qquad \text{et} \qquad g(x)=\frac{x+1}{x-1}.$$

Calculer $(f\circ g)(x)$, $(g\circ f)(x)$, $(f\circ f)(x)$ et $(g\circ g)(x)$.

Exercice B.30.
On considère un ensemble E d'applications d'une partie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, muni de la composition des applications. Démontrer dans chaque cas que la structure $(E,\circ)$ est un groupe. Est-il abélien ?

1. $E=\{f_0,f_1,f_2,f_3\}$ avec
$$f_0(x)=x,\quad f_1(x)=\frac{1}{x},\quad f_2(x)=-x,\quad f_3(x)=-\frac{1}{x}.$$
2. $E=\{f_0,f_1,f_2,f_3,f_4,f_5\}$ avec
$$f_0(x)=x,\quad f_1(x)=\frac{1}{x},\quad f_2(x)=1-x,\quad f_3(x)=\frac{1}{1-x},$$
$$f_4(x)=\frac{x-1}{x},\quad f_5(x)=\frac{x}{x-1}.$$
3. $E=\{f_0,f_1,f_2,f_3,f_4,f_5,f_6,f_7\}$ avec
$$f_0(x)=x,\quad f_1(x)=\frac{1}{x},\quad f_2(x)=-x,\quad f_3(x)=-\frac{1}{x},$$
$$f_4(x)=\frac{x+1}{1-x},\quad f_5(x)=\frac{x-1}{x+1},\quad f_6(x)=\frac{x+1}{x-1},$$
$$f_7(x)=\frac{1-x}{x+1}.$$

B.0.5 Factorisation de polynômes

Exercice B.31.
Décomposer les polynômes suivants en un produit de facteurs à l'aide de mises en évidence

1) $3x+6y+12$ 2) $ax+2ay-az$
3) $25x^3y^2-10x^2y$ 4) $18x^4y^3z^2-6x^2y^2z^2$
5) $a(x+y)+b(x+y)$ 6) $a(x+y)-(x+y)$
7) $(x-y)+a(x-y)$ 8) $a(x+y)+b(x+y)+c(x+y)$
9) $a(x+y)-x-y$ 10) $x-xy+5-5y$
11) $ax+ay+bx+by$ 12) $ax+by-bx-ay$
13) $(x-1)(y+3)-(1-x)$ 14) $(x+y)^2+(x+y)(x-y)$
15) $(x+y-z)(x+2y+3z)-(z-x-y)(x-y-3z)$
16) $1+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6$ 17) $x^n+x^{2n}y$
18) $2x^ny^{2n}+x^{2n}y^n$ 19) $x^{4n}y^2-x^{3n}y$
20) $x^{3n}y^2-4x^{5n}y^5+x^{2n+1}y^3$

Exercice B.32.
Décomposer les polynômes suivants en un produit de facteurs à l'aide des identités remarquables

1) $x^2+10x+25$ 2) x^2-6x+9
3) $x^2+4xy+4y^2$ 4) $1-4x+4x^2$
5) $x^2-x+\frac{1}{4}$ 6) $4x^2+2x+\frac{1}{4}$

Exercice B.33.
Mettre en évidence les facteurs communs
1) $10ac^2+15a^2c$ 5) $(a-b)+x(a-b)$
2) $12x^2y^2-18xy^3+24x^3y$ 6) $-44ax^n+286a^2x^{n+1}-66a^3x^{n+2}$
3) $12a^2x^3-30a^3x^2+18ax^4$ 7) $x^{m+n}y^m-x^{2n}y^{m+n}-x^ny^{2m}$
4) $a(x+y)+b(x+y)$ 8) $7x^{m+3}y^{n-2}+14x^my^{n+1}+21x^{m-3}y^{n+4}$

Exercice B.34.
Décomposer en facteurs par la méthode des identités
1) a^2-9 2) b^2-a^{2m} 3) x^3y-xy^3
4) a^2-16b^2 5) a^4-9b^2 6) a^2-25x^2
7) $32a^2-2b^2$ 8) $a^2x^2-b^2x^2$ 9) $4x^2-16a^2$
10) $a^2b^2c^2-m^2$ 11) $50x^4-2y^2$ 12) $256x^2-64a^4$
13) $a^2x^2-81x^2$ 14) $16x^2y^2-121y^4$ 15) $x^4y^2-x^2y^4$
16) $3a^3x-3ax^3$ 17) $150a^6b^2-24a^2b^2$ 18) $37a^5x-333a^3x$
19) x^4-81 20) $81x^4-625a^4$ 21) $32x^4-2a^4$
22) $3ax^4-3ay^4$ 23) $3x^5-48xy^8$ 24) $x^{11}y^4-x^5y^{10}$
25) $m^3\pm n^3$ 26) $6xy^3\pm 6x$ 27) $32x^5\pm 243y^5$
28) $125x^3\pm 1$ 29) $192x^6y^6-2187z^6$ 30) a^7b-ab^7
31) $x^{10}y-xy^{10}$ 32) $a^{5m}-9a^{3m}y^{2n}$ 33) $32x^5-243$
34) $343x^3-512b^6$ 35) $64x^6-1$ 36) $729a^6-64$
37) $(a-b)^2-c^2$ 38) $(a+b)^2-(x-y)^2$
39) $(5a+2b)^2-(2b-5a)^2$ 40) $(x+a)^2-(3x-2a)^2$
41) $(4x-a)^2-(4a-x)^2$ 42) $(a+b+c)^2-(a-2b-c)^2$
43) $(x+1)^2-(x-1)^2$ 44) $(a+b)^3+(a-b)^3$

Exercice B.35.
Décomposer en facteurs par la méthode des groupements
1) $a^2-2ab+b^2-1$ 2) $a^2-y^2-2xy-x^2$
3) $a^2-b^2+2bc-c^2$ 4) x^2-2x-y^2+1
5) x^2-4y^2+4y-1 6) $cy+y+c+1$
7) $4x^2+2x-9y^2-3y$ 8) c^2+d-d^2-c
9) $b^2y-b^2+a^2y-a^2$ 10) $5a^3+a^2-20a-4$
11) a^4-2a^3+a-2 12) $b^2y-b^2-a^2y+a^2$
13) ax^2-x^2-4a+4 14) $8y^4-8y^3+y-1$
15) x^3+4x-5 16) x^3+6x+7
17) a^4+5a^2+4 18) a^5-2a^2+1
19) $a^4+b^4+a^2b^2$ 20) $4x^4+y^4+3x^2y^2$
21) $a^2-b^2+x^2-y^2-2(ax-by)$ 22) $a^2-b^2-c^2+d^2-2(ad-bc)$
23) $2a^3-2a^2b-a^2+ab+2ab^2-b^2$ 24) $x^8-4x^6-2x^5+8x^3+x^2-4$

Exercice B.36.
Décomposer les trinômes suivants
1) $x^2-8x+12$ 8) $x^2+5x-14$ 15) $4x^2+x-5$
2) $x^2-14x+13$ 9) $x^2+20x+19$ 16) $11x^2+28x-15$
3) $x^2-22x+85$ 10) $x^2-4x-12$ 17) $6x^4+5x^2+1$
4) x^2-4x-5 11) $2x^2+9x+7$ 18) $21x^4-8x^2-5$
5) $x^2+10x+16$ 12) $2x^2-2x-24$ 19) $45x^2-39xy-6y^2$
6) $x^2-115x+1500$ 13) $6x^2+15x+6$ 20) $12x^3+34xy+10y^2$
7) $x^2-4x-32$ 14) $27x^2-75x+48$ 21) $2x^4+x^2y^2-3y^4$.

Chapitre III.4. Equations et inéquations

Cinquième partie

Bibliographie

Bibliographie

[Car66] Lewis Carrol. *La logique sans peine.* Hermann, 1966.

[DNR01] René David, Karim Nour, and Christophe Raffali. *Introduction à la logique : Théorie de la démonstration.* Dunod, 2001.

[Hal87] Paul R. Halmos. *Naive Set Theory.* Springer, 1987.

[Kel61] John L. Kelley. *General Topology.* Springer, 1961.

[Lan01] Edmund Landau. *Foundations of Analysis : The arithmetic of whole, rational, irrational and complex numbers.* AMS Cheslea publishing, 2001.

[PP90] M.-A. Pichard and J.-C. Pont. *Algèbre I et II.* Département de l'instruction publique du canton du Valais, 1990.

[Riv89] François Rivenc. *Introduction à la logique.* Petite Bibliothèque Payot, P14, 1989.

[Sch86] N. J. Schons. *Élements d'algèbre.* éditions La Procure, 1986.

[Sch91] Laurent Schwartz. *Analyse I : Théorie des ensembles et topologie.* Hermann, 1991.

[Sup72] Patrick Suppes. *Axiomatic Set Theory.* Dover, 1972.

[Tar69] Alfred Tarski. *Introduction à la logique.* Gauthier-Villars, 1969.

Une grande partie des exercices de cet ouvrage proviennent des livres *algèbre I* et *algèbre II* de J.-C. Pont et M.-A. Pichard[PP90] ainsi que le livre de N.-J. Schons, *Élments d'algèbre*, (1986), des éditions La Procure[Sch86].

Sixième partie

Index

Index