Analyse

Guglielmo Pasa

Notes prises durant le cours du

Pr. O. Burlet
section de Mathématique
Université de Lausanne
(1992-1993)

Table des matières

1 Applications différentiables **1**
1.1 Espaces métriques 1
1.2 Connexité 2
1.3 Différentiabilité 2
1.4 Dérivée d'ordre supérieur 2
1.5 Sous-variétés dans $\mathbb{R}^n$ 2
1.6 Partition de l'unité 2

2 Intégration **3**
2.1 Intégration dans $\mathbb{R}^n$ 3
2.2 Formes différentielles dans un ouvert de $\mathbb{R}^n$ 5
2.3 Différentiation extérieure 7
2.4 Fonctionalité des constructions précédentes 7
2.5 Globalisation de la notion de forme différentielle 7
2.6 Intégration p-dimensionnelle dans $\mathbb{R}^n$ 7

3 Fonctions analytiques d'une variable complexe **8**
3.1 Fonctions holomorphes 8
3.1.1 Rappel 8
3.1.2 Fonctions holomorphes 9
3.2 Théorie de Cauchy 13
3.2.1 Le logarithme 16
3.3 Série entières 16
3.4 Fonctions méromorphes 16

4 Équations différentielles **17**

Chapitre 1

Applications différentiables

1.1 Espaces métriques

Definition 1

Soit X un ensemble. On appelle *distance* ou *métrique* dans X toute application $d : X \times X \to \mathbb{R}$ telle que :

1) $d(x, y) \geqslant 0$ et $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,
2) $d(x, y) = d(y, x)$,
3) $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$ $\forall x, y, z \in X$ (inégalité du triangle.)

En voici quelques exemples.

Exemple 1

Soit :

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ 1 & \text{si } x \neq y \end{cases}$$

d est bien une métrique.

Exemple 2

Soit $X = \mathbb{R}^n$, et $d(x, y) = \sup\limits_i |x_i - y_i|$, où $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.

Soit $a \in X$, l'ensemble $E = \{x \in X \mid d(x, a) = r\} = S(a, r)$, est la sphère de rayon r centrée en a.

— dans 1) on a :

$$S(a, r) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } 0 < r < 1 \\ X - \{a\} & \text{si } r = 1 \\ \emptyset & \text{si } r > 1 \end{cases}$$

— dans 2) on a :

$$S(O,r) = \{x \mid \sup_i |x_i| = r\}$$

Exemple 3

$X = \mathbb{R}^n$, $d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}$

Exemple 4

$X = \mathbb{R}^n$,$d(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$.

En effet : $\qquad |x_i - y_i| \leqslant |x_i - z_i| + |z_i - y_i|,$

donc : $\quad d(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \leqslant d(x,z) + d(z,y).$

Remarque 1

$\mathbb{R}^n$ avec la métrique 3) est l'espace euclidien, avec la métrique 2) c'est l'espace "sup".

Soit $\mathcal{C}_0([a,b])$, l'ensemble des fonctions continues dans l'intervalle $[a,b]$. Les applications suivantes définissent des métriques :

1.2 Connexité

1.3 Différentiabilité

1.4 Dérivée d'ordre supérieur

1.5 Sous-variétés dans $\mathbb{R}^n$

1.6 Partition de l'unité

Chapitre 2

Intégration

2.1 Intégration dans $\mathbb{R}^n$

Definition 1

Une *2-forme* différentielle dans un ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^n$ est une application

$$\begin{array}{rrcl} \omega : & \mathcal{U} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ & (x; \xi_1, \xi_2) & \mapsto & \omega(x; \xi_1, \xi_2), \end{array}$$

différentiable, dépendant linéairement en chacune des variables ξ_i, et telle que $\omega(x; \xi_1, \xi_2) = -\omega(x; \xi_2, \xi_1)$.

Exemple 1

$\omega(x; \xi_1, \xi_2) = \det(\xi_1, \xi_2)$ est une *2-forme* dans $\mathbb{R}^2$.

Exemple 2

Soit $\mathcal{X} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un champ de vecteurs différentiable. Alors $\omega(x; \xi_1, \xi_2) =< \mathcal{X}(x); \xi_1 \wedge \xi_2) >$ est une *2-forme*.

Exemple 3

Si $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ est une paramétrisation locale d'une sous-variété de dimension 2,on définit alors :

$$\int_f \omega := \iint_{\mathcal{U}} \omega(f(u, v); f_{,u}(u, v), f_{,v}(u, v))\, du\, dv,$$

où : $f_{,u} = \frac{\partial}{\partial u} f$ et : $f_{,v} = \frac{\partial}{\partial v} f$. Avec cette définition on a :

$$\int_f \omega = \int_{f \circ h} \omega,$$

où : $h : \mathcal{V} \to \mathcal{U}$ est un difféomorphisme à jacobien positif.

2.2 Formes différentielles dans un ouvert de $\mathbb{R}^n$

Definition 2

Soit $\mathcal{U} \subset \mathcal{R}^n$ ouvert, une *p-forme différentielle* dans $\mathcal{U}$ est application différentiable :

$$\begin{aligned} \alpha : \quad \mathcal{U} \times \mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n \quad &\to \mathbb{R} \\ (x; \xi_1, \ldots, \xi_p) \quad &\mapsto \alpha(x; \xi_1, \ldots, \xi_p), \end{aligned}$$

telle que $\alpha(x; \xi_1, \ldots, \xi_p)$ dépend linéairement de chaque variable ξ_i séparément.

α est *symétrique* si $\alpha(x; \xi_{\sigma(1)}, \ldots, \xi_{\sigma(p)}) = \alpha(x; \xi_1, \ldots, \xi_p)$ pour toute permutation σ de $\{1, \ldots, p\}$.

α est *antisymétrique* si $\alpha(x; \xi_{\sigma(1)}, \ldots, \xi_{\sigma(p)}) = \operatorname{sign}(\sigma)\alpha(x; \xi_1, \ldots, \xi_p)$.

Remarque 1

Une *0-forme* est une fonction différentiable dans $\mathcal{U}$.

Notation 1

$\mathcal{T}^p(\mathcal{U})$, $\mathcal{A}^p(\mathcal{U})$ et $\mathcal{S}^p(\mathcal{U})$ désignent respectivement l'ensemble des p-formes différentielles dans $\mathcal{U}$, des p-formes antisymétriques et des p-formes symétriques dans $\mathcal{U}$.

Proposition 2.1

$\mathcal{T}^p(\mathcal{U})$, $\mathcal{A}^p(\mathcal{U})$ et $\mathcal{S}^p(\mathcal{U})$ sont des espaces vectoriels réels fermés pour la multiplication par les fonctions différentiables.

Preuve. Si $\alpha, \beta \in \mathcal{T}^p(\mathcal{U})$ et $\lambda, \mu \in \mathcal{T}^0(\mathcal{U})$ $(\equiv \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}))$:

$$(\lambda\alpha + \mu\beta)(x; \xi_1, \ldots, \xi_p) = \lambda(x)\alpha(x; \xi_1, \ldots, \xi_p) + \mu(x)\beta(x; \xi_1, \ldots, \xi_p)$$

etc....

Clair. □

Exemple 4

Soit $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert.

$\underline{p = 0 :}$ Une 0-forme dans $\mathcal{U}$ est une fonction différentiable dans $\mathcal{U}$. Clairement $\mathcal{T}^0(\mathcal{U}) = \mathcal{A}^0(\mathcal{U}) = \mathcal{S}^0(\mathcal{U}) = \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U})$.

Remarque 2 (Convention sommatoire d'Einstein)

Si une quantité dépend de plusieurs indices, on convient de sommer sur les indices qui apparaissent deux fois, une fois en haut et une fois en bas.

$\underline{p = 1:}$ a) Une 1-forme est une application

$$\begin{aligned} \omega: \ \mathcal{U} \times \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ (x;\xi) &\mapsto \omega(x;\xi). \end{aligned}$$

Si $\xi = \sum_{i=1}^n \xi^i e_i$, ce que l'on notera : $\xi^i e_i$ (où e_i est le i^{e} vecteur de base canonique), alors :

$$\omega(x;\xi^i e_i) = \xi^i \omega(x;e_i).$$

b) Si $f \in \mathcal{T}^0(\mathcal{U})$, on définit $\mathrm{d}f \in \mathcal{T}^1(\mathcal{U})$ par :

$$\mathrm{d}f(x;\xi) = \mathcal{D}f(x)(\xi).$$

En particulier, si $x^i : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ désigne la fonction qui, à x, fait correspondre sa i^{e} coordonée, alors :

$$\mathrm{d}x^i(x;\xi) = \mathcal{D}x^i(x)(\xi) = x^i(\xi) = \xi^i.$$

Ainsi, pour toute 1-forme ω, nous avons :

$$\omega(x;\xi) = \xi^i \omega(x;e_i) = \omega(x;e_i)\,\mathrm{d}x^i(\xi).$$

En définissant : $a_i(x) = \omega(x;e_i)$, $a_i \in \mathcal{T}^0(\mathcal{U})$ on a :

$$\omega = a_i\,\mathrm{d}x^i.$$

(D'où la dénomination de forme différentielle.)

c) Si $\mathcal{X} : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ est un champ de vecteur dans $\mathcal{U}$, on lui associe la 1-forme

$$\hat{\mathcal{X}}(x;\xi) =< \xi, \mathcal{X}(x) >$$

(où $< \cdot,\cdot >$ est le produit scalaire euclidien).

Réciproquement, à chaque 1-forme ω dans $\mathcal{U}$ correspond un champ de vecteur

$$\hat{\omega}(x) = \omega(x;e_i)e_i.$$

Par exemple, si $f \in \mathcal{T}^0(\mathcal{U})$: $\hat{\mathrm{d}f} = \mathrm{grad} f$.

En effet : $\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x^i}\mathrm{d}x^i$ et : $\frac{\partial f}{\partial x^i}(x) = \mathrm{d}f(x;e_i)$.

Remarquons encore que : $\hat{\hat{\omega}} = \omega$ et que : $\hat{\hat{\mathcal{X}}} = \mathcal{X}$.

$\underline{p = 2:}$

Definition 3

On appelle *métrique de riemannienne* (ou *de Riemann*) une 2-forme symétrique et définie positive dans $\mathcal{U}$.

Remarque 3

ω est définie positive si $\omega(x; \xi, \xi) > 0$ pour tout $x \in \mathcal{U}$ et pour tout $\xi \neq 0$.

2.3 Différentiation extérieure

2.4 Fonctionalité des constructions précédentes

2.5 Globalisation de la notion de forme différentielle

2.6 Intégration p-dimensionnelle dans $\mathbb{R}^n$

Chapitre 3

Fonctions analytiques d'une variable complexe

3.1 Fonctions holomorphes

3.1.1 Rappel

On considère $\mathbb{C}$ comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel avec la multiplication :

$$(x, y)(x', y') = (xx' - yy', xy' + x'y).$$

Pour cette multiplication $\mathbb{C}$ est un corps avec l'élément neutre $1 = (1, 0)$ et l'inverse de $(x, y) \neq (0, 0)$ est $\frac{1}{x^2+y^2}(x, -y)$.

On introduit les notations :

a) $1 = (1, 0)$

b) $i = (0, 1)$.

Alors $(x, y) = x \cdot 1 + y \cdot i$ et $i^2 = (-1, 0) = -1$.

Le *conjugué* de $z = x + yi$ est $\bar{z} = x - yi$, et on a :

$$z\bar{z} = (x^2 + y^2, 0) = x^2 + y^2 = |z|^2.$$

$|z| = \sqrt{z\bar{z}}$ est le module de z.

Si $\theta \in [0, 2\pi[$ est l'argument de $z \neq 0$, i.e. tel que :

$$z = |z|(\cos\theta + i \sin\theta) = |z|\text{cis}\theta,$$

on note $\arg z = \theta$

Si $z_1 = |z_1|(\cos(\theta_1) + i \sin(\theta_1))$ et $z_2 = |z_2|(\cos(\theta_2) + i \sin(\theta_2))$ alors on obtient :

$$z_1 z_2 = |z_1||z_2|(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2))$$

et : $\arg(z_1 z_2) = (\arg z_1 + \arg z_2) \mod 2k\pi$.

En fait, la multiplication par un nombre complexe a de module $|a|$ et d'argument $\arg a = \theta$ est la similitude de $\mathbb{R}^2 (\equiv \mathbb{C})$ composée de l'homothétie de rapport $|a|$ et de centre $O = (0, 0)$ et de la rotation d'angle θ autour de O.

Propriété 3.1

$z \mapsto \bar{z}$ est un automorphisme du corps $\mathbb{C}$, i.e. :

$$\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$$
$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2.$$

□

3.1.2 Fonctions holomorphes

Proposition 3.2

Soit $f : U \to \mathbb{C}$, avec $z_0 \in U$ et $U \subset \mathbb{C}$ ouvert, une application, alors les propriétés suivantes sont équivallentes :

i) f est *différentiable* en z_0, comme application de U dans $\mathbb{R}^2$ et sa dérivée est $\mathbb{C}$-linéaire.

ii) $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$ est différentiable en $z_0 = (x_0, y_0)$ et ses composantes u et v vérifient les équations de *Cauchy-Riemann* :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

iii) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$ existe.

Preuve. <u>i)⇒ii)</u> On a :

$$\mathcal{D}f(z_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(z_0) & \frac{\partial u}{\partial y}(z_0) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(z_0) & \frac{\partial v}{\partial y}(z_0) \end{pmatrix}$$

et avec $1 = e_1$:

$$\mathcal{D}f(z_0)(1) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(z_0) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(z_0) \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{D}f(z_0)(i) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial y}(z_0) \\ \frac{\partial v}{\partial y}(z_0) \end{pmatrix}.$$

Par $\mathbb{C}$-linéarité :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial y}(z_0) \\ \frac{\partial v}{\partial y}(z_0) \end{pmatrix} = \mathcal{D}f(z_0)(i) = i\mathcal{D}f(z_0)(1) = i \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(z_0) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(z_0) \end{pmatrix}.$$

D'où il suit que :

$$\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y} = i\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)$$
$$\Rightarrow \left(\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} ; \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}\right).$$

<u>ii)⇒i)</u> On a :

$$\mathcal{D}f(z_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(z_0) & \frac{\partial u}{\partial y}(z_0) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(z_0) & \frac{\partial v}{\partial y}(z_0) \end{pmatrix}.$$

Les équations de Cauchy-Riemann (CR) impliquent :

$$\mathcal{D}f(z_0)(i) = i\mathcal{D}f(z_0)(1) \Rightarrow \mathcal{D}f(z_0)(iw) = i\mathcal{D}f(z_0)(w).$$

Posons $a = a_1 + ia_2 \in \mathbb{C}$ et $w \in \mathbb{C}$, on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}f(z_0)(aw) &= \mathcal{D}f(z_0)(a_1 w) + \mathcal{D}f(z_0)(ia_2 w) \\ &= a_1\mathcal{D}f(z_0)(w) + ia_2\mathcal{D}f(z_0)(w) \\ &= a\mathcal{D}f(z_0)(w), \end{aligned}$$

d'où la $\mathbb{C}$-linéarité.

i)⇒iii) Remarquons que si $\mathcal{D}f(z_0)$ est $\mathbb{C}$-linéaire, $c\mathcal{D}f(z_0)$ est entièrement caractérisée par $\mathcal{D}f(z_0)(1) = f'(z_0)$. En effet :

$$\mathcal{D}f(z_0)(x+iy) = xf'(z_0) + iyf'(z_0) = (x+iy)f'(z_0).$$

On a alors :

$$f(z_0+h) - f(z_0) = \mathcal{D}f(z_0)(h) + r_f(z_0, z_0+h),$$

d'où :

$$\begin{aligned} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} &= \tfrac{h}{h}\mathcal{D}f(z_0)(1) + \tfrac{r_f}{h} \\ &= f'(z_0) + \underbrace{\frac{r_f(z_0, z_0+h)}{h}}_{\xrightarrow[h\to 0]{} 0} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ \neq}} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} = f'(z_0).$$

iii)⇒i) Soit

$$f'(z_0) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ \neq}} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}.$$

Posons $r_f(z_0, z_0+h) = f(z_0+h) - f(z_0) - f'(z_0)h$, alors on a :

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ \neq}} \frac{r_f(z_0, z_0+h)}{h} = 0,$$

par définition de la limite. Donc r_f est d'ordre 1 et l'application $h \mapsto f'(z_0)h$ est $\mathbb{C}$-linéaire.

□

Definition 1

f est *holomorphe* en $z_0 \in U$ si elle vérifie l'une des conditions de la proposition ci-dessus. Elle est holomorphe en U si elle l'est en tout point de U.

Exemple 1

Les fonctions rationnelles $f(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$ où P, Q sont des polynômes, avec $Q \neq 0$, sont holomorphes en dehors des zéros de Q.

Exemple 2 (L'exponentielle)

Définissons $z \mapsto e^z$ par :

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y),$$

où $x, y \in \mathbb{R}$ sont définis par $z = x + iy$. Cette fonction est holomorphe, car elle est différentiable partout, on a

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial(e^x \cos y)}{\partial x} = e^x \cos y = \frac{\partial(e^x \sin y)}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y}$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

donc $f(z) = e^z$ est holomorphe dans $\mathbb{C}$, et $\mathrm{im} f = f(\mathbb{C}) = \mathbb{C} - \{0\}$. Le module de f ne s'annule jamais : $|f(z)| = e^x \neq 0$

Si $|a| \in \mathbb{C} - \{0\}$, on a $a = |a|(\cos\theta + i \sin\theta)$ et on a encore $|a| = e^{\ln|a|}$.

Si

$$z = \ln|a| + i \arg a$$

alors

$$e^z = |a|(\cos\theta + i\sin\theta) = a.$$

On a aussi

$$\mathcal{D}f(z_0)(1) = f'(z_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{x_0} \cos y_o \\ e^{x_0} \sin y_0 \end{pmatrix} = e^{z_0},$$

ce qui implique

$$f'(z_0) = f(z_0) \quad (\neq 0).$$

On a :

$$\det\left(\mathcal{D}f(z_0)\right) = \det\begin{pmatrix} u_{,x}(z_0) & u_{,y}(z_0) \\ v_{,x}(z_0) & v_{,y}(z_0) \end{pmatrix}$$
$$= \left(u_{,x}v_{,y} - u_{,y}v_{,x}\right)(z_0) = (u_{,x})^2 + (v_{,x})^2$$
$$= |f'(z_0)|^2 > 0,$$

(où nous avons utilisé la notation $f_{,x} = \frac{\partial f}{\partial x}$.) Ainsi f est localement un difféomorphisme. On peut voir de plus que les difféomorphismes définis par des fonctions holomorphes conservent l'orientation (car leur jacobien est positif.)

Finalement nous constatons que f est périodique de période $2i\pi$

$$f(z + 2ik\pi) = f(x + i(y + 2k\pi)) = f(z).$$

Exemple 3

La fonction $f(z) = \frac{1}{z}$ est holomorphe dans $\mathbb{C} - \{0\}$.

On peut écrire $f(z) = \dfrac{1}{z}\dfrac{\bar{z}}{\bar{z}} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2}$.

C'est l'inversion par rapport au cercle unité centré à l'origine $w \mapsto w'$, $w \neq 0$, et w' est sur la demi-droite issue de l'origine et passant par w et tel que $|w||w'| = 1$.

Definition 2

Un difféomorphisme $h : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$, $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ ouverts dans $\mathbb{C}$, est *conforme* si la dérivée $\mathcal{D}h(z_0)$ préserve les angles $\forall z_0 \in \mathcal{U}$.

Préserver les angles signifie que :

$$\frac{< \xi, \eta >}{|\xi||\eta|} = \frac{< \mathcal{D}h(z_0)(\xi), \mathcal{D}h(z_0)(\eta) >}{|\mathcal{D}h(z_0)(\xi)||\mathcal{D}h(z_0)(\eta)|},$$

$\forall \xi, \eta \in \mathbb{R}^2 - \{0\}$.

Les applications conformes sont donc les difféomorphismes h tels que $\mathcal{D}h(z_0)$ est une similitude pour tout $z_0 \in \mathcal{U}$, i. e. une composée d'homothétie et d'une ransformation orthogonale.

Propriété 3.3

$f : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ est holomorphe avec $f' \neq 0$ partout dans $\mathcal{U}$ si et seulement si f est un difféomorphisme conforme qui préserve l'orientation. $\square$

Propriété 3.4

Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe $\mathcal{C}^2$, alors les parties réelles et imaginaires de f sont des fonctions harmoniques (i. e. $\Delta(\Im f) = \Delta(\Re f) = 0$).

Réciproquement, si u est une fonction harmonique dans $\mathcal{U}$, et si $\mathcal{U}$ est contractile, il existe v harmonique dans $\mathcal{U}$ telle que $f(z) = u(z) + iv(z)$ soit une fonction holomorphe.

Preuve. Posons

$$f(z) = u(z) + iv(z) \qquad \text{avec } u, v \in \mathcal{C}^2.$$

On a

$$u_{,x} = v_{,y} \Rightarrow u_{,xx} = -v_{,xy}$$

et

$$u_{,y} = -v_{,x} \Rightarrow u_{,yy} = -v_{,yx},$$

et en additionnant membre à membre on obtient :

$$\Delta u = u_{,xx} + u_{,yy} = 0.$$

Réciproquement soit u une fonction harmonique, cherchons v telle que

$$v_{,y} = u_{,x}$$
$$v_{,x} = -u_{,y}.$$

Pour cela il faut que $dv = u_{,x}dy - u_{,y}dx$ soit une forme différentielle fermée. Ce qui se vérifie aisément puisque

$$d(u_{,x}dy - u_{,y}dx) = \Delta u dx \cup dy = 0.$$

On définit alors : $f(z) = u(z) + iv(z)$ qui est alors holomorphe. $\square$

3.2 Théorie de Cauchy

Remarque 1

Au lieu de considérer des formes différentielles à valeur réelle, on peut aussi bien considérer des formes différentielles à coefficients complexes. Une telle p-forme différentielle dans un ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^n$ sera une expression de la forme :

$$\sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n} a_{i_1,\ldots,i_p}(\mathbf{u}) du^{i_1} \wedge \cdots \wedge du^{i_p},$$

où $a_{i_1,\ldots,i_p} : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ est différentiable. $du^{i_1} \wedge \cdots \wedge du^{i_p}$ forme une base des p-formes à valeurs complexes, comme module sur les fonctions différentiables dans $\mathcal{U}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Exemple 4

Si $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}$ toute 1-forme s'écrit de manière unique

$$a(z)dx + b(z)dy$$

où a, b sont des fonctions à valeurs complexes. Dans ce cas on peut aussi prendre comme base de $\mathcal{A}^1(\mathcal{U}; \mathbb{C})$ les formes différentielles :

$$dz = dx + idy \qquad dx = \frac{dz + d\bar{z}}{2}$$
$$d\bar{z} = dx - idy \qquad dy = \frac{dz - id\bar{z}}{2i}.$$

Propriété 3.5

$f : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ est holomorphe si et seulement si $f(z)dz$ est fermée.

Preuve. Si $f = u + iv$, alors

$$f(z)dz = (u + iv)(dx + idy) = (u + iv)dx + (-v + iu)dy,$$

d'où

$$\begin{aligned} d\left(f(z)dz\right) &= \left[(u_{,y} + iv_{,y}) + (-v_{,x} + iu_{,x})\right] dx \wedge dy \\ &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u_{,y} = v_{,x} \\ v_{,y} = -u_{,x} \end{cases} \end{aligned}$$

Ce sont les équations de Cauchy-Riemman. □

Théorème 3.6 (de Cauchy)

Soit $f : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe (qui est $\mathcal{C}^2$) et $\mathcal{O}$ un ouvert borné avec $\overline{\mathcal{O}} \subset \mathcal{U}$ et une partie singulière de $\partial\mathcal{O}$ finie. Alors

$$\int_{\partial\mathcal{O}} f(z)\, dz = 0$$

Preuve. Par le théorème de Stokes on a :

$$\int_{\partial\mathcal{O}} f(z)\, dz = \int_{\mathcal{O}} d\left(f(z)dz\right) = \int_{\mathcal{O}} 0 = 0.$$

□

Propriété 3.7 (Formule de Cauchy)

Soit $\mathcal{O}$ un ouvert borné de $\mathbb{C}$ avec un nombre fini de points singuliers dans son bord, f une fonction holomorphe au voisinage de $\overline{\mathcal{O}}$, alors pour tout $z \in \mathcal{O}$ on a :

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathcal{O}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)}\, d\zeta.$$

Preuve. Observons que $g(\zeta) = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ est holomorphe dans $\mathcal{O} - \{z\}$ et, en fait, quel que soit $r > 0$ assez petit $\mathcal{O}' = \mathcal{O} - B(z, r)$ est un ouvert borné, avec un nombre fini de points singuliers sur le bord et $g(\zeta)$ est holomorphe dans un voisinage de $\mathcal{O}'$.

On peut donc appliquer le théorème de Cauchy et en déduire que :

$$\int_{\partial\mathcal{O}'} g(\zeta)\, d\zeta = 0$$

(le bord étant muni de l'orientation induite par celle de $\mathcal{O}$:

$$\partial\mathcal{O}' = \partial\mathcal{O} \cup (-\partial B(z, r)),$$

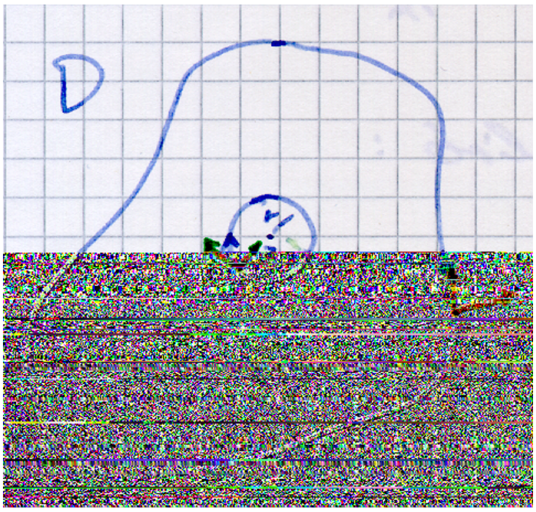

FIGURE 3.1 – Définition de l'orientation des bords.

et l'orientation du bord du trou est opposée à celle de la boule.)

On a donc

$$\int_{\partial\mathcal{O}'} g(\zeta)\,d\zeta = \int_{\partial\mathcal{O}} g(\zeta)\,d\zeta - \int_{\partial B(z,r)} g(\zeta)\,d\zeta = 0.$$

Ainsi

$$\int_{\partial B(z,r)} g(\zeta)\,d\zeta = \int_{\partial\mathcal{O}} g(\zeta)\,d\zeta$$

pour tout $r > 0$ assez petit. Calculons $\int_{\partial B(z,r)} g(\zeta)\,d\zeta$. On paramétrise $\partial B(z,r)$ par $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ par :

$$\gamma(t) = z + re^{2\pi it}$$

(de sorte que le cercle est orienté positivement.) On a alors

$$\begin{aligned}\gamma^* g(\zeta)\,d\zeta &= g(z+re^{2\pi it})\,d(z+re^{2\pi it})\\ &= g(z+re^{2\pi it})r\,2\pi ite^{2\pi it}\,dt\end{aligned}$$

Ainsi

$$\int_{\partial B(z,r)} g(\zeta)\,d\zeta = \int_0^1 2\pi irte^{2\pi it} g(z+re^{2\pi it})\,dt.$$

Mais on a

$$g(z+re^{2\pi it}) = \frac{f(z+re^{2\pi it})}{re^{2\pi it}},$$

donc

$$\int_{\partial B(z,r)} g(\zeta)\,d\zeta = 2\pi i \int_0^1 f(z+re^{2\pi it})\,dt$$

$\square$

Corollaire 3.8

Avec les notations précédentes, si f est holomorphe C^1, alors f est indéfiniment dérivable au sens complexe et

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\partial \mathcal{O}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} \, d\zeta \quad \forall z \in \mathcal{O}.$$

Preuve. □

Théorème 3.9 (de Morera (réciproque du théorème de Cauchy)**)**

Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ continue et supposons que pour toute région triangulaire $\Delta \subset \mathcal{U}$:

$$\int_{\partial \Delta} f(z) \, dz = 0.$$

Alors f est holomorphe dans $\mathcal{U}$.

Preuve. □

Corollaire 3.10

3.2.1 Le logarithme

3.3 Série entières

3.4 Fonctions méromorphes

Chapitre 4

Équations différentielles