

Théorie des Groupes

Guglielmo Pasa
selon les notes du livre
Group Theory in Physics[2][3][1]
de
J. F. Cornwell

10 décembre 2015

L’auteur du document ne répond pas d’un usage illicite de ce document qui est distribué uniquement dans l’espoir qu’il soit utile à quelqu’un.

Le présent cours se veut autant exempt d’erreur que possible, mais, malgré tout le soin que j’y apporte, des erreurs y sont sûrement encore présentes. Si vous en trouvez, veuillez me les indiquer à l’adresse e-mail ci-dessous.

Toute contribution peut être faite directement à l’auteur à l’adresse

guglielmo.pasa@bluewin.ch.

Toute aide financière peut être faite en envoyant votre part au moyen d’un bulletin de versement à :

Pasa Guglielmo
Rte des Cases 17A
CH-1890 **St-Maurice**.

Dans ce dernier cas veuillez noter une adresse e-mail ou postale où il me sera possible de vous communiquer de nouvelles versions de ce document.

Ce document a été écrit en $\text{\LaTeX}$ en utilisant les options de $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}\text{-}\text{\LaTeX}$.

Table des matières

1	Concepts de Base	2
1.1	Le concept de groupe	2
1.2	Le groupe de l'équation de Schrödinger	3
1.3	Le rôle des matrices	6
2	La structure de Groupe	7
2.1	Considérations élémentaires	7
2.2	Les Classes	7
2.3	Sous-groupes invariants	9
2.4	Co-ensembles	9
2.5	Groupes facteurs	10
2.6	Homomorphismes et isomorphismes de groupes	11
2.7	Produits directs et semi-directs	13
3	Les groupes de Lie	16
3.1	Groupes de Lie linéaires	16
3.2	Les composantes connexes d'un groupe de Lie	17
3.3	Groupes de Lie compacts et non-compacts	18
3.4	Intégration invariante	18
3.5	Homomorphisme du groupe $SU(2)$ sur $SO(3)$	20
3.6	Homomorphisme du groupe $SL(2, \mathbb{C})$ sur le groupe de Lorentz orthochrone propre $L_+^\uparrow$	20
4	Représentations des Groupes - Concepts de base	22
4.1	Définitions	22
4.2	Représentations équivalentes	23
4.3	Représentations unitaires	24
4.4	Représentations réductibles et irréductibles	25
4.5	Lemmes de Schur et théorème d'orthogonalité	27
4.6	Caractères	29
4.7	Méthodes pour trouver les représentations irréductibles des groupes important en physique	34
4.7.1	Groupes finis	34
4.7.2	Groupes de Lie	35
5	Représentations des Groupes - Développements	36
5.1	Projecteurs	36
5.2	Représentations en produit direct	40
5.3	Le théorème de Wigner-Eckart pour les groupes de changements de coordonnées dans $\mathbb{R}^3$	40
5.4	Généralisation du théorème de Wigner-Eckart	41

5.5	Représentations de groupes produits directs	41
5.6	Représentations irréductibles de groupes abéliens finis	41
5.7	Représentations induites	41
5.8	Réalité des représentations	41
6	Théorie des Groupes dans les calculs de Mécanique Quantique	42
6.1	La solution de l'équation de Schrödinger	42
6.2	Probabilités de transition et règles de sélection	42
6.3	Théorie de perturbation indépendante du temps	42
6.4	Généralisation aux particules de spin $\frac{1}{2}$	42
6.5	Symétrie d'inversion du temps	42
7	Le rôle des algèbres de Lie	43
7.1	La fonction exponentielle	43
7.2	Sous-groupes à un paramètre	44
7.3	Algèbres de Lie	45
7.4	Algèbres de Lie réelles pour groupes de Lie généraux	46
7.4.1	Existence d'une algèbre de Lie réelle $\mathcal{L}$ pour tout groupe de Lie $\mathcal{G}$	46
7.4.2	Relation entre l'algèbre de Lie réelle $\mathcal{L}$ et les sous-groupes à un paramètre de $\mathcal{G}$	46
7.5	Fonctions de poids pour intégrales invariantes	46
8	Relations entre les groupes de Lie et les algèbres de Lie	47
8.1	Sous-algèbres d'une algèbre de Lie	47
8.2	Homomorphismes et isomorphismes d'algèbres de Lie	48
8.3	Représentation des algèbres de Lie	49
8.4	Représentation adjointe des algèbres de Lie et des groupes de Lie	49
8.5	Somme directe d'algèbres de Lie	49
8.6	Groupes de recouvrement universel	49
9	Structure des algèbres de Lie semi-simples	50
9.1	Forme de Killing et critère de Cartan	50
9.2	Complexification	50
9.3	Sous-algèbre de Cartan et racines des algèbres de Lie complexes semi-simples	50
10	Groupe des rotations dans $\mathbb{R}^3$	51
10.1	Révisions de quelques propriétés	51
10.2	Les structures de classe de $SU(2)$ et $SO(3)$	51
10.3	Représentations des algèbres de Lie $su(2)$ et $so(3)$	51
10.4	Représentations des groupes de Lie $SU(2)$, $SO(3)$ et $O(3)$	51

Chapitre 1

Concepts de Base

1.1 Le concept de groupe

Definition 1 (Groupes)

Un ensemble $\mathcal{G}$ est appelé un *groupes* si les quatres axiomes suivants sont satisfaits :

- a) Il existe une opération qui à toute paire $g, g' \in \mathcal{G}$ associe un autre élément $g'' \in \mathcal{G}$. On note : $g'' = gg'$.
- b) Pour tout $g, g', g'' \in \mathcal{G}$, on a : $(gg')g'' = g(g'g'')$.
- c) Il existe $e \in \mathcal{G}$ tel que : $ge = eg = g$.
- d) Pour tout $g \in \mathcal{G}$ il existe $g^{-1} \in \mathcal{G}$ tel que : $gg^{-1} = g^{-1}g = e$.

Si en outre, pour tout $g_1, g_2 \in \mathcal{G}$, $g_1g_2 = g_2g_1$ alors le groupe est dit *abélien*.

Definition 2 (ordre d'un groupe)

Soit $\mathcal{G}$ un groupe, on appelle *ordre* de $\mathcal{G}$ le nombre d'éléments de $\mathcal{G}$. Si l'ordre d'un groupe est fini on dit que le groupe est *fini*.

Exemple 1 (Le groupe ponctuel cristallographique D_4)

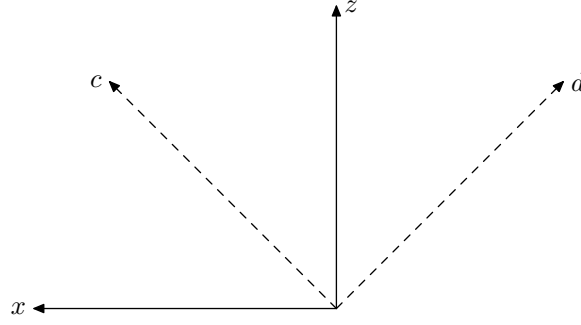
Un groupe de rotations qui laisse inchangé un réseau cristallin est nommé *un groupe ponctuel cristallographique*, car un point (l'origine) est laissé inchangé par l'action du groupe. Il n'y a que 32 groupes ponctuels, qui sont tous finis. Les seuls angles de rotations possibles sont $\frac{2\pi}{n}$ où $n = 2, 3, 4, 6$. Selon la notation de *Scönfliess* on convient de noter C_{nj} une rotation de $\frac{2\pi}{n}$ autour de l'axe Oj . L'identité est désignée par E et la matrice de rotation associée est $R(E) = 1$. Les rotations impropres peuvent s'écrire IC_{nj} ou I désigne la matrice d'inversion $I = \text{diag}(-1, -1, -1)$.

Considérons, par exemple le groupe ponctuel D_4 composé des huit rotations

- E : l'identité,
- C_{2x}, C_{2y}, C_{2z} : les rotations propres d'angle π autour de Ox, Oy et Oz respectivement,
- C_{4y}, C_{4y}^{-1} : les rotations propres d'angle $\frac{\pi}{2}$ autour de Oy dans le sens positif et dans le sens négatif,
- C_{2c}, C_{2d} : les rotations propres d'angle π autour de Oc et Od respectivement.

les axes sont indiqués dans la figure ci-dessous où est représenté le plan Oxz (l'axe Oy sort du plan

de la page).



Définition des axes Oc et Od dans le plan Oxz .

Les matrices de ces opérations sont données par :

$$\begin{aligned}
 R(E) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R(C_{2x}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad R(C_{2y}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \\
 R(C_{2z}) &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R(C_{4y}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad R(C_{4y}^{-1}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
 R(C_{2c}) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad R(C_{2d}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.1}
 \end{aligned}$$

La table de multiplication du groupe est donnée ci-dessous

	E	C_{2x}	C_{2y}	C_{2z}	C_{4y}	C_{4y}^{-1}	C_{2c}	C_{2d}
E	E	C_{2x}	C_{2y}	C_{2z}	C_{4y}	C_{4y}^{-1}	C_{2c}	C_{2d}
C_{2x}	C_{2x}	E	C_{2z}	C_{2y}	C_{2d}	C_{2c}	C_{4y}^{-1}	C_{4y}
C_{2y}	C_{2y}	C_{2z}	E	C_{2x}	C_{4y}^{-1}	C_{4y}	C_{2d}	C_{2c}
C_{2z}	C_{2z}	C_{2y}	C_{2x}	E	C_{2d}	C_{2c}	C_{4y}	C_{4y}^{-1}
C_{4y}	C_{4y}	C_{2c}	C_{4y}^{-1}	C_{2d}	C_{2y}	E	C_{2z}	C_{2x}
C_{4y}^{-1}	C_{4y}^{-1}	C_{2d}	C_{4y}	C_{2c}	E	C_{2y}	C_{2x}	C_{2z}
C_{2c}	C_{2c}	C_{4y}	C_{2d}	C_{4y}^{-1}	C_{2x}	C_{2z}	E	C_{2y}
C_{2d}	C_{2d}	C_{4y}^{-1}	C_{2c}	C_{4y}	C_{2z}	C_{2x}	C_{2y}	E

Table de multiplication du groupe D_4

Par la suite nous reviendrons encore sur ce groupe pour illustrer les nouveaux concepts introduits.

1.2 Le groupe de l'équation de Schrödinger

Considérons des transformations g de coordonnées incluant les rotations et les translations. Nous nommons $\mathbf{R}(g)$ la matrice de la rotation dans $\mathbb{R}^3$ de g et $\mathbf{t}(g)$ la translation dans $\mathbb{R}^3$ de g . Ainsi le vecteur $\mathbf{r}$ est transformé dans le vecteur

$$\mathbf{r}' = \mathbf{R}(g)\mathbf{r} + \mathbf{t}(g).$$

par g , que l'on notera aussi : $\mathbf{r}' = \{\mathbf{R}(g), \mathbf{t}(g)\}\mathbf{r}$. Il est aisé de vérifier que les transformations de coordonnées de cette forme constituent un groupe. Les transformations avec $\mathbf{t}(g) = \mathbf{0}$ sont appelées des *rotations pures* et

celles avec $\mathbf{R}(g) = \mathbf{1}$ des *translations pures*.

Théorème 1.1

L'ensemble des transformations de coordonnées qui laissent invariants l'hamiltonien forme un groupe dénommé le *groupe de l'équation de Schrödinger* ou encore le *groupe d'invariance de l'opérateur hamiltonien*.

Dans l'espace de hilbert des fonctions d'ondes qui décrivent l'état d'un système on peut définir l'opérateur $P(g)$ de la transformation g sur les fonctions d'onde $(P(g)\psi)(\mathbf{r})$. Cet opérateur représente le changement de coordonnées dans l'espace des fonctions d'ondes. Si $\psi'(\mathbf{r}')$ et $\psi(\mathbf{r})$ représente le même état au même endroit dans les systèmes de coordonnées (O', x', y', z') et (O, x, y, z) respectivement on demandera, dans le cas des champs scalaires :

$$\psi'(\mathbf{r}') = \psi(\mathbf{r}).$$

Que l'on peut encore écrire

$$\psi'(\mathbf{r}') = \psi(\{\mathbf{R}(g), \mathbf{t}(g)\}^{-1}\mathbf{r}')$$

En remplaçant $\mathbf{r}'$ par $\mathbf{r}$ et en prenant en compte que $\psi' = P(g)\psi$ on obtient

$$(P(g)\psi)(\mathbf{r}) = \psi(\{\mathbf{R}(g), \mathbf{t}(g)\}^{-1}\mathbf{r}).$$

Ces opérateurs de transformation scalaires ont une très grande importance dans l'application de la théorie des groupes à la mécanique quantique. Clairement ces opérateurs sont linéaires

$$P(g)[a\phi(\mathbf{r}) + b\psi(\mathbf{r})] = aP(g)\phi(\mathbf{r}) + bP(g)\psi(\mathbf{r})$$

pour toutes fonctions ϕ, ψ et tous nombres complexes a, b . En outre $P(g_1) = P(g_2)$ seulement si $g_1 = g_2$. Les théorèmes suivants donnent d'autres propriétés des opérateurs $P(g)$.

Théorème 1.2

Soit g une transformation de coordonnées. Tout opérateur $P(g)$ est *unitaire* dans l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})$ muni du produit (ϕ, ψ) défini par :

$$(\phi, \psi) = \int_{\mathbb{R}^3} \phi^*(\vec{r})\psi(\vec{r}) d^3\vec{r},$$

i.e. : $(P(g)\phi, P(g)\psi) = (\phi, \psi)$.

Théorème 1.3

Pour toute transformation $g_1, g_2 \in \mathcal{G} : P(g_1g_2) = P(g_1)P(g_2)$.

Théorème 1.4

L'ensemble des opérateurs $P(g)$, qui correspondent aux transformations de coordonnées g du groupe de Schrödinger, forment un groupe isomorphe au groupe de Schrödinger.

Théorème 1.5

Pour toute transformation g du groupe de Schrödinger on a :

$$P(g)H(\vec{r}) = H(\vec{r})P(g).$$

1.3 Le rôle des matrices

Definition 3 (Représentation d'un groupe)

Si tout élément g d'un groupe $\mathcal{G}$ peut être associé à une matrice $d \times d$ non-singulière $\Gamma(g)$ d'un groupe de matrices muni de la multiplication matricielle, et si cette association est telle que :

$$\Gamma(g_1 g_2) = \Gamma(g_1) \Gamma(g_2), \quad \forall g_1, g_2 \in \mathcal{G},$$

alors cet ensemble de matrices constitue une *représentation* de $\mathcal{G}$ de dimension d .

Nous verrons au chapitre 4 que tout groupe possède un nombre infini de représentations différentes, mais qui peuvent être dérivées d'un nombre plus restreint de représentations de base, les *représentations irréductibles*. Un groupe fini ne possède qu'un nombre fini de représentations irréductibles distinctes.

Les représentations du groupe de Schrödinger sont particulièrement importantes. Leur lien intime avec les valeurs propres de l'équation de Schrödinger indépendante du temps et fourni par la notion introduite dans la prochaine définition.

Definition 4 (Fonctions de base d'un groupe $\mathcal{G}$)

Un ensemble de d fonctions $\psi_1(\vec{r}), \dots, \psi_d(\vec{r})$ forme une base pour une représentation Γ d'un groupe $\mathcal{G}$ si, pour toute transformation $g \in \mathcal{G}$:

$$P(g)\psi_n(\vec{r}) = \sum_{m=1}^d \Gamma(g)_{mn} \psi_m(\vec{r}), \quad n = 1, 2, \dots, d.$$

On dit que la fonction $\psi_n(\mathbf{r})$ se transforme comme la n^{e} ligne de la représentation Γ .

L'ordre inhabituel des indices de lignes et de colonnes dans la définition assure la consistance de la définition pour tout produit $g_1 g_2$ d'éléments de $\mathcal{G}$.

Théorème 1.6

Les fonctions propres d'une valeur propre dégénérée d fois, de l'équation de Schrödinger $H\psi = \epsilon\psi$, forment une base pour une représentation du groupe $\mathcal{G}$ de l'équation de Schrödinger de dimension d .

Ce théorème implique que chaque valeur propre de l'énergie peut être caractérisée par une représentation du groupe de Schrödinger. Nous verrons au chapitre 6 que la classification des états électroniques d'un atome en états s , p , etc. est un cas particulier de cette description. Plus précisément, tout état s est une fonction de base d'une représentation particulière du groupe des rotations dans $\mathbb{R}^3$, les fonctions propres de l'état p sont les fonctions de base d'une autre représentation de ce groupe et etc. .

Chapitre 2

La structure de Groupe

2.1 Considérations élémentaires

Definition 1 (Sous-Groupe)

On appelle *sous-groupe* $\mathcal{S}$ d'un groupe $\mathcal{G}$ un sous-ensemble de $\mathcal{G}$ qui, muni de la même loi de composition que $\mathcal{G}$, est lui-même un groupe.

$\mathcal{G}$ peut être vu comme un sous-groupe de $\mathcal{G}$ lui-même. Les autres sous-groupes de $\mathcal{G}$ sont dits *sous-groupes propres* de $\mathcal{G}$. Un autre sous-groupe 'trivial' de $\mathcal{G}$ est l'ensemble $\{e\}$ constitué de l'élément neutre seul. Nous verrons plus tard que si s et n sont les ordres de $\mathcal{S}$ et $\mathcal{G}$ respectivement, alors $\frac{n}{s}$ doit être entier.

Théorème 2.1

Si $\mathcal{S}$ est un sous-ensemble d'un groupe $\mathcal{G}$ tel que $s's^{-1} \in \mathcal{S}$ quels que soient $s, s' \in \mathcal{S}$, alors $\mathcal{S}$ est un sous-groupe de $\mathcal{G}$.

Exemple 1 (Sous-groupes du groupe ponctuel D_4)

Le groupe D_4 possède les sous-groupes suivants

- $s = 1$ (i. e. $\frac{n}{s} = 8$) : $\{E\}$,
- $s = 2$ (i. e. $\frac{n}{s} = 4$) : $\{E, C_{2\#}\}$, où $\# = x, y, z, c, d$,
- $s = 4$ (i. e. $\frac{n}{s} = 2$) : $\{E, C_{2x}, C_{2y}, C_{2z}\}, \{E, C_{2y}, C_{4y}, C_{4y}^{-1}\}, \{E, C_{2y}, C_{2c}, C_{2d}\}$,
- $s = 8$ (i. e. $\frac{n}{s} = 1$) : D_4 .

Théorème 2.2 (théorème de réarrangement)

Pour tout élément g' fixé d'un groupe $\mathcal{G}$, les ensembles $\{g'g | g \in \mathcal{G}\}$ et $\{gg' | g \in \mathcal{G}\}$ contiennent une et une seule fois tous les éléments de $\mathcal{G}$.

2.2 Les Classes

Definition 2 (Eléments conjugués)

Un élément g' d'un groupe $\mathcal{G}$ est dit *conjugué* à un autre élément g de $\mathcal{G}$ si il existe un élément x de $\mathcal{G}$ tel que : $g' = xgx^{-1}$.

Definition 3 (Classes)

Une *classe*, où *classe de conjugaison*, d'un groupe $\mathcal{G}$ est un ensemble d'éléments de $\mathcal{G}$ mutuellement conjugués.

On construit les différentes classes d'un groupe en cherchant tout les éléments conjugués d'un élément donné, et on répète l'opération jusqu'à ce que tous les éléments sont épuisés.

Exemple 2 (Classes du groupe cristalllographique D_4 .)

Pour le groupe D_4 , la procédure appliquée à C_{2x} donne :

$$XC_{2x}X^{-1} = C_{2x} \quad \text{pour} \quad X = E, C_{2x}, C_{2y}, C_{2z},$$

et

$$XC_{2x}X^{-1} = C_{2z} \quad \text{pour} \quad X = C_{4y}, C_{4y}^{-1}, C_{2c}, C_{2d}.$$

Ainsi $\{C_{2x}, C_{2z}\}$ forme une classe de D_4 . En réitérant la procédure nous trouvons les autres classes $\{E\}$, $\{C_{2y}\}$, $\{C_{4y}, C_{4y}^{-1}\}$ et $\{C_{2c}, C_{2d}\}$.

Les propriétés des classes sont résumées dans les trois théorèmes suivants.

Proposition 2.3

- a) Chaque élément d'un groupe $\mathcal{G}$ est membre d'une classe de $\mathcal{G}$.
- b) Un élément de $\mathcal{G}$ ne peut pas faire partie de plus d'une classe de $\mathcal{G}$.
- c) L'élément neutre, e , forme toujours une classe à lui seul.

Théorème 2.4

Si $\mathcal{G}$ est un groupe abélien, alors chaque élément de $\mathcal{G}$ constitue une classe à lui seul.

Théorème 2.5

Si $\mathcal{G}$ est le groupe des rotations pures, aucune classe de $\mathcal{G}$ ne contient à la fois des rotations propres et impropres. De plus dans chaque classe les rotations sont du même angle.

Évidemment la réciproque du dernier théorème n'est pas nécessairement vraie. Des rotations du même angle ne sont pas nécessairement dans la même classe. Dans le cas du groupe D_4 cela est illustré par C_{2x} et C_{2y} , par exemple, qui sont dans deux classes distinctes tout en étant des rotations d'angle π .

2.3 Sous-groupes invariants

Definition 4 (Sous-groupes invariants)

Un sous-groupe $\mathcal{S}$ d'un groupe $\mathcal{G}$ est dit *invariant* si :

$$xsx^{-1} \in \mathcal{S},$$

pour chaque $s \in \mathcal{S}$ et pour tout $x \in \mathcal{G}$.

Les sous-groupes invariants sont aussi appelés *sous-groupes normaux* ou encore *diviseurs normaux*.

Comme on peut le voir à partir des définitions il y a une étroite liaison entre les classes et les sous-groupes invariants.

Théorème 2.6

Un sous-groupe $\mathcal{S}$ d'un groupe $\mathcal{G}$, est un sous-groupe invariant si et seulement si $\mathcal{S}$ est constitué uniquement de classes entières de $\mathcal{G}$.

Exemple 3

Pour le groupe D_4 il suit de la liste des sous-groupes et des classes des sections précédentes que les sous-groupes invariants sont $\{E\}$, $\{E, C_{2y}\}$, $\{E, C_{2x}, C_{2y}, C_{2z}\}$, $\{E, C_{2y}, C_{4y}, C_{4y}^{-1}\}$, $\{E, C_{2y}, C_{2c}, C_{2d}\}$ et D_4 lui-même.

Pour tout groupe $\mathcal{G}$ les sous-groupes triviaux $\{E\}$ et $\mathcal{G}$ sont des sous-groupes invariants de $\mathcal{G}$.

2.4 Co-ensembles

Definition 5 (Co-ensembles)

Soit $\mathcal{S}$ un sous-groupe d'un groupe $\mathcal{G}$. Alors pour tout $g \in \mathcal{G}$ fixé l'ensemble des éléments sg où s parcourt tout $\mathcal{S}$ est appelé un *co-ensemble à droite* de $\mathcal{S}$ relativement à g et est désigné par $\mathcal{S}g$.

De même l'ensemble des éléments de la forme gs est appelé un *co-ensemble à gauche* de $\mathcal{S}$ et est désigné par $g\mathcal{S}$.

En particulier si $\mathcal{S}$ est un sous-groupe d'ordre fini n contenant les éléments $s_1, \dots, s_n$, alors $\mathcal{S}g$ est l'ensemble à n éléments $s_1g, \dots, s_ng$.

En général le co-ensemble à droite $\mathcal{S}g$ et le co-ensemble à gauche $g\mathcal{S}$ de $\mathcal{S}$ relativement à g sont différents.

Exemple 4 (Quelques co-ensembles du groupe ponctuel D_4)

Soit $\mathcal{S} = \{E, C_{2x}\}$. Alors de la table 1 on obtient les co-ensembles à droite

$$\begin{aligned} \mathcal{S}E &= \mathcal{S}C_{2x} = \{E, C_{2x}\}, \\ \mathcal{S}C_{2y} &= \mathcal{S}C_{2z} = \{C_{2y}, C_{2z}\}, \\ \mathcal{S}C_{4y} &= \mathcal{S}C_{2d} = \{C_{4y}, C_{2d}\}, \\ \mathcal{S}C_{4y}^{-1} &= \mathcal{S}C_{2c} = \{C_{4y}^{-1}, C_{2c}\}, \end{aligned}$$

et les co-ensembles à gauche

$$\begin{aligned} E\mathcal{S} &= C_{2x}\mathcal{S} = \{E, C_{2x}\}, \\ C_{2y}\mathcal{S} &= C_{2z}\mathcal{S} = \{C_{2y}, C_{2z}\}, \\ C_{4y}\mathcal{S} &= C_{2c}\mathcal{S} = \{C_{4y}, C_{2c}\}, \\ C_{4y}^{-1}\mathcal{S} &= C_{2d}\mathcal{S} = \{C_{4y}^{-1}, C_{2d}\}. \end{aligned}$$

Notons que $C_{4y}^{-1}\mathcal{S} \neq \mathcal{S}C_{4y}^{-1}$ et $C_{4y}\mathcal{S} \neq \mathcal{S}C_{4y}$.

Théorème 2.7

- a) Si $g \in \mathcal{S}$, alors $\mathcal{S}g = \mathcal{S}$.
- b) Si $g \notin \mathcal{S}$, alors $\mathcal{S}g$ n'est pas un sous-groupe de $\mathcal{G}$.
- c) Tout élément de $\mathcal{G}$ appartient à un co-ensemble à droite.
- d) Deux éléments sg et $s'g$ de $\mathcal{S}g$ sont différents si $s \neq s'$. En particulier si $\mathcal{S}$ est fini et d'ordre n , $\mathcal{S}g$ contient n éléments différents.
- e) Deux co-ensembles à droite sont soit identiques, soit totalement disjoints.
- f) Si $g' \in \mathcal{S}g$, alors $\mathcal{S}g' = \mathcal{S}g$.
- g) Si $\mathcal{G}$ est un groupe fini d'ordre g et $\mathcal{S}$ d'ordre s , alors le nombre de co-ensembles à droite différents de $\mathcal{S}$ est g/s .

Théorème 2.8

Les co-ensembles à droite et à gauche d'un sous-groupe $\mathcal{S}$ d'un groupe $\mathcal{G}$ sont identiques (i.e. $\mathcal{S}g = g\mathcal{S}, \forall g \in \mathcal{G}$) si et seulement si $\mathcal{S}$ est un sous-groupe invariant de $\mathcal{G}$.

2.5 Groupes facteurs

Définition 6 (Produits de co-ensembles à droite)

Soit $\mathcal{S}$ un sous-groupe invariant, on définit alors le produit des deux co-ensembles $\mathcal{S}g_1$ et $\mathcal{S}g_2$ par :

$$\mathcal{S}g_1\mathcal{S}g_2 = \mathcal{S}(g_1g_2). \quad (2.1)$$

Preuve de consistance de la définition. Nous allons montrer que l'équation (2.1) fournit une définition sensée dans le sens que si nous représentons $\mathcal{S}g_1$ et $\mathcal{S}g_2$ d'une autre manière $\mathcal{S}g'_1$ et $\mathcal{S}g'_2$ le résultat reste le même.

Supposons que $g'_1 \in \mathcal{S}g_1$ et $g'_2 \in \mathcal{S}g_2$, montrons que $\mathcal{S}(g'_1g'_2) = \mathcal{S}(g_1g_2)$.

Comme $g'_1 \in \mathcal{S}g_1$ et $g'_2 \in \mathcal{S}g_2$, il existe $S, S' \in \mathcal{S}$ tels que $g'_1 = Sg_1$ et $g'_2 = S'g_2$. Alors $g'_1g'_2 = Sg_1S'g_2$. Or $g_1S' \in g_1\mathcal{S}$, et comme $\mathcal{S}$ est un sous-groupe invariant, on a $g_1S' \in \mathcal{S}g_1$. Par conséquent, il existe un $S'' \in \mathcal{S}$ tel que $g_1S' = S''g_1$. On obtient ainsi $g'_1g'_2 = (SS'')(g_1g_2)$, et donc $g'_1g'_2 \in \mathcal{S}(g_1g_2)$ et par la propriété *f*) du théorème 2.7, on a $\mathcal{S}(g'_1g'_2) = \mathcal{S}(g_1g_2)$. $\square$

Théorème 2.9 (Groupes facteurs)

L'ensemble des co-ensembles d'un sous-groupe invariant $\mathcal{S}$ d'un groupe $\mathcal{G}$, muni de la multiplication définie ci-dessus, forme un groupe appelé le *groupe facteur de $\mathcal{S}$* et est noté $\frac{\mathcal{G}}{\mathcal{S}}$.

	SE	SC_{2x}	SC_{4y}	SC_{2c}
SE	SE	SC_{2x}	SC_{4y}	SC_{2c}
SC_{2x}	SC_{2x}	SE	SC_{2c}	SC_{4y}
SC_{4y}	SC_{4y}	SC_{2c}	SE	SC_{2x}
SC_{2c}	SC_{2c}	SC_{4y}	SC_{2x}	SE

TABLE 2.1 – Table de multiplication du groupe facteur $\frac{D_4}{\mathcal{S}}$ où $\mathcal{S} = \{E, C_{2y}\}$.

Exemple 5 (Un groupe facteur du groupe ponctuel D_4)

Prenons le groupe D_4 et le sous-groupe invariant $\mathcal{S} = \{E, C_{2y}\}$. $\frac{D_4}{\mathcal{S}}$ est un groupe d'ordre 4 avec les éléments

$$\begin{aligned} SE &= SC_{2y} = \{E, C_{2y}\}, & SC_{2x} &= SC_{2z} = \{C_{2x}, C_{2z}\}, \\ SC_{4y} &= SC_{4y}^{-1} = \{C_{4y}, C_{4y}^{-1}\}, & SC_{2c} &= SC_{2d} = \{C_{2c}, C_{2d}\}, \end{aligned}$$

dont la table de multiplication est donné dans la table 2.1.

2.6 Homomorphismes et isomorphismes de groupes

Définition 7 (Homomorphismes)

On dit qu'une application ϕ d'un groupe $\mathcal{G}$ sur un groupe $\mathcal{G}'$ est un *homomorphisme* si elle conserve la loi de groupe, i.e. si, pour tout $g, g' \in \mathcal{G}$ on a :

$$\phi(g)\phi(g') = \phi(gg').$$

La multiplication du membre de gauche est celle de $\mathcal{G}'$ et du membre de droite celle de $\mathcal{G}$. On ne notera pas différemment ces deux multiplications, puisque le contexte sera généralement suffisamment clair.

Si l'application ϕ est bijective, alors nous dirons que c'est un *isomorphisme* du groupe $\mathcal{G}$ sur le groupe $\mathcal{G}'$.

Definition 8 (Représentation d'un groupe $\mathcal{G}$)

S'il existe un homomorphisme d'un groupe $\mathcal{G}$ sur un groupe multiplicatif de matrices $\Gamma d \times d$ non-singulières, nous dirons que le groupe de matrices constitue une *représentation* de $\mathcal{G}$ de dimension d .

Il n'y a aucune condition de binunivocité de l'homomorphisme, mais si cet homomorphisme est bijectif (i.e. si c'est un isomorphisme) alors nous dirons que la représentation est *fidèle*.

Si ϕ est un isomorphisme de $\mathcal{G}$ vers $\mathcal{G}'$, on peut alors considérer l'application ϕ^{-1} , réciproque de ϕ , qui est bien définie partout.

Bien que deux groupes isomorphes peuvent différer par la nature de leurs éléments, ils ont la même structure de sous-groupes, co-ensembles, classes, etc., et surtout ils ont nécessairement des représentations identiques.

Nous donnons ci-après quelques propriétés des homomorphismes.

Definition 9 (Noyau d'un homomorphisme)

Soit ϕ un homomorphisme d'un groupe $\mathcal{G}$ sur le groupe $\mathcal{G}'$. Alors, l'ensemble $\mathcal{K}$ des éléments $g \in \mathcal{G}$ tels que $\phi(g) = e'$, l'élément neutre de $\mathcal{G}'$, est appelé le *noyau* de ϕ et est noté $\text{Ker } \phi$.

Théorème 2.10

Soit ϕ un homomorphisme d'un groupe $\mathcal{G}$ sur le groupe $\mathcal{G}'$, et soit $\mathcal{K} = \text{Ker } \phi$. Alors :

- a) $\mathcal{K}$ est un sous-groupe invariant de $\mathcal{G}$.
- b) Chaque élément du co-ensemble droit $\mathcal{K}g$ a pour image le même élément $\phi(g)$ de $\mathcal{G}'$.
- c) L'application θ , définie par

$$\theta(\mathcal{K}g) = \phi(g),$$

est un isomorphisme du groupe facteur $\mathcal{G}/\mathcal{K}$ sur $\mathcal{G}'$.

Une des conséquences de ce théorème est que chaque élément de $\mathcal{G}'$ est l'image du même nombre d'éléments de $\mathcal{G}$ (et, en particulier, du même nombre d'éléments de $\mathcal{G}$ qui ont comme image e' , i. e. le nombre d'éléments du noyau $\text{ker } \phi$). Ceci implique que ϕ est un isomorphisme si et seulement si $\mathcal{K} = \text{ker } \phi$ ne contient que l'élément neutre $e \in \mathcal{G}$.

Dans le cas particulier où $\mathcal{G}' = \mathcal{G}$, et ϕ est un isomorphisme, on dit que ϕ est un *automorphisme*.

Pour tout $x \in \mathcal{G}$ l'application ϕ_x de $\mathcal{G}$ sur lui-même définie par

$$\phi_x(g) = xgx^{-1},$$

est un automorphisme, car elle est clairement bijective et

$$\phi_x(g_1)\phi_x(g_2) = (xg_1x^{-1})(xg_2x^{-1}) = xg_1g_2x^{-1} = \phi_x(g_1g_2),$$

pour tout $g_1, g_2 \in \mathcal{G}$. Une telle application est appelée un *automorphisme interne* et tout automorphisme qui n'a pas cette forme un *automorphisme externe*.

Exemple 6 (Automorphisme externe de $SU(n)$ pour $n \geq 3$)

Il est évident que l'application

$$\phi(\mathbf{u}) = \mathbf{u}^*$$

pour tout $\mathbf{u} \in SU(n)$ est un automorphisme de $SU(n)$. Ce n'est pas un automorphisme interne, car $\mathbf{u}$ et $\mathbf{u}^*$ fournissent deux représentations de $SU(n)$ non équivalentes pour $n \geq 3$.

Beaucoup de groupes ne possèdent pas d'automorphismes externes. Si $\mathcal{S}$ est un sous-groupe de $\mathcal{G}$, alors un automorphisme associe $\mathcal{S}$ à un sous-groupe qui lui est isomorphe $\mathcal{S}'$. Dans ce cas les sous-groupes $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ sont dits *conjugués*, mais il est possible d'avoir des sous-groupes isomorphes qui ne sont pas conjugués.

2.7 Produits directs et semi-directs

Soient $\mathcal{G}_1$ et $\mathcal{G}_2$ deux groupes et soient e_1 et e_2 leur élément identité. Considérons l'ensemble des paires (g_1, g_2) où $g_1 \in \mathcal{G}_1$ et $g_2 \in \mathcal{G}_2$ et définissons le produit de deux paires par :

$$(g_1, g_2)(g'_1, g'_2) = (g_1 g'_1, g_2 g'_2),$$

pour tout $g_1, g'_1 \in \mathcal{G}_1$ et tout $g_2, g'_2 \in \mathcal{G}_2$.

Théorème 2.11

L'ensemble des paires (g_1, g_2) défini ci-dessus muni de la multiplication ci-dessus forme un groupe. Ce groupe est dénommé *produit direct* de $\mathcal{G}_1$ avec $\mathcal{G}_2$ et est noté $\mathcal{G}_1 \otimes \mathcal{G}_2$.

Preuve. □

Théorème 2.12

- a) $\mathcal{G}_1 \otimes \mathcal{G}_2$ contient un sous-groupe, formé des éléments (g_1, e_2) , qui est isomorphe à $\mathcal{G}_1$. L'isomorphisme étant défini par $\phi((g_1, e_2)) = g_1$.
- b) $\mathcal{G}_1 \otimes \mathcal{G}_2$ contient un sous-groupe, formé des éléments (e_1, g_2) , qui est isomorphe à $\mathcal{G}_2$. L'isomorphisme étant défini par $\phi((e_1, g_2)) = g_2$.
- c) Les éléments de ces deux sous-groupes commutent entre eux, i.e. :

$$(g_1, e_2)(e_1, g_2) = (e_1, g_2)(g_1, e_2) = (g_1, g_2).$$

- d) Ces deux sous-groupes n'ont qu'un élément en commun, l'identité (e_1, e_2) .
- e) Tout élément de $\mathcal{G}_1 \otimes \mathcal{G}_2$ est le produit d'un élément du premier sous-groupe avec un élément du second.

Définition 10

Un groupe $\mathcal{G}'$ est dit un *groupe produit direct* s'il est isomorphe à un groupe $\mathcal{G}_1 \otimes \mathcal{G}_2$ construit comme ci-dessus.

Théorème 2.13

Si un groupe $\mathcal{G}$ possède deux sous-groupes $\mathcal{G}_1$ et $\mathcal{G}_2$ tels que

- a) les éléments de $\mathcal{G}_1$ commutent avec ceux de $\mathcal{G}_2$,
 - b) $\mathcal{G}_1$ et $\mathcal{G}_2$ n'ont que l'identité en commun et que
 - c) tout élément de $\mathcal{G}$ peut être écrit comme le produit d'un élément de $\mathcal{G}_1$ avec un élément de $\mathcal{G}_2$,
- alors $\mathcal{G}$ est un groupe produit direct isomorphe à $\mathcal{G}_1 \otimes \mathcal{G}_2$.

Exemple 7 (Le groupe $O(3)$ comme produit direct)

Le groupe $O(3)$ est isomorphe à $SO(3) \otimes \mathcal{G}_2$ où $\mathcal{G}_2$ est le groupe matriciel d'ordre 2 composé des matrices $\mathbf{1}$ et $-\mathbf{1}$, on vérifiera sans peine que les propriétés du théorème précédent sont satisfaites.

Comme $O(3)$ est isomorphe au groupe de toutes les rotations en dimension 3 et $SO(3)$ est isomorphe au sous-groupe des rotations propres, nous voyons donc que le groupe de toutes les rotations est le produit direct du groupe des rotations propres avec le groupe $\{E, I\}$ composé de l'identité E et de l'inversion I .

Un cas particulier, qui apparaît souvent en Physique des particules élémentaires est celui où $\mathcal{G}_1$ et $\mathcal{G}_2$ sont tous deux isomorphes au même groupe $\mathcal{G}$. $\mathcal{G} \otimes \mathcal{G}$ contient un *sous-groupe diagonal* composé des paires (g, g) (pour tout $g \in \mathcal{G}$), qui est isomorphe à $\mathcal{G}$. Ce sous-groupe diagonal n'est le conjugué d'aucun des éléments (g, e) et (e, g) mentionné auparavant.

Il convient de noter que la condition a) du théorème précédent peut être remplacé par une condition a') qui lui est équivalente

a') $\mathcal{G}_1$ et $\mathcal{G}_2$ sont des sous-groupes invariants de $\mathcal{G}$.

La notion de groupe produit semi-direct est une généralisation de celle de groupe produit direct, obtenue en conservant les conditions b) et c) du dernier théorème, mais en affaiblissant la contrainte a') pour que seul $\mathcal{G}_1$ doive être invariant, $\mathcal{G}_2$ restant un sous-groupe, mais ne devant plus être invariant.

Définition 11

Un groupe $\mathcal{G}$ est dit *groupe produit semi-direct* s'il possède deux sous-groupes $\mathcal{G}_1$ et $\mathcal{G}_2$ tels que :

- a) $\mathcal{G}_1$ est un sous-groupe invariant de $\mathcal{G}$,
- b) $\mathcal{G}_1$ et $\mathcal{G}_2$ n'ont que l'identité en commun, et
- c) tout élément de $\mathcal{G}$ peut être écrit comme produit d'un élément de $\mathcal{G}_1$ avec un élément de $\mathcal{G}_2$.

On peut alors dire que $\mathcal{G}$ est isomorphe à $\mathcal{G}_1 \otimes \mathcal{G}_2$.

Comme dans le cas du groupe produit direct, la condition b) implique que la décomposition c) est toujours unique.

Exemple 8 (Le groupe D_4 comme produit semi-direct.)

Soit $\mathcal{G} = D_4$, $\mathcal{G}_1 = \{E, C_{2y}, C_{4y}, C_{4y}^{-1}\}$ et $\mathcal{G}_2 = \{E, C_{2x}\}$. Alors les conditions pour les groupes produits semi-droits sont vérifiées pour D_4 . En effet, $\mathcal{G}_1$ est un sous-groupe invariant de D_4 et $\mathcal{G}_1$ et $\mathcal{G}_2$ n'ont en commun que l'identité E et finalement tout élément est représenté par le composé d'un

élément de l'un avec un élément de l'autre ensemble :

$$\begin{aligned} E &= EE, & C_{2y} &= C_{2y}E, & C_{4y} &= C_{4y}E, & C_{4y}^{-1} &= C_{4y}^1 E \\ C_{2x} &= EC_{2x}, & C_{2z} &= C_{2y}C_{2x}, & C_{2c} &= C_{4y}C_{2x}, & C_{2d} &= C_{4y}^{-1}C_{2x}. \end{aligned}$$

Exemple 9 (Le groupe euclidien comme produit semi-direct.)

Le groupe euclidien $\mathcal{G}$ de $\mathbb{R}^3$ composé de tous les changement de coordonnées linéaires g . Soit $\mathcal{G}_1$ le groupe de toutes les translations pures et $\mathcal{G}_2$ celui de toutes les rotations pures.

Pour tout $g_1 \in \mathcal{G}_1$ on a alors :

$$\{\mathbf{R}(g)|\mathbf{t}(g)\}\{\mathbf{1}|\mathbf{t}(g_1)\}\{\mathbf{R}(g)|\mathbf{t}(g)\}^{-1} = \{\mathbf{1}|\mathbf{R}(g)\mathbf{t}(g_1)\},$$

de sorte que $\mathcal{G}_1$ est un sous-groupe invariant de $\mathcal{G}$. De plus :

$$\{\mathbf{R}(g)|\mathbf{t}(g)\} = \{\mathbf{1}|\mathbf{t}(g)\}\{\mathbf{R}(g)|\mathbf{0}\},$$

et donc la condition c) est aussi satisfaite, tandis que b) est évidente. Ainsi $\mathcal{G}$ est isomorphe à $\mathcal{G}_1 \mathbb{S} \mathcal{G}_2$.

Exemple 10 (Le groupe de Poincaré)

Le groupe de Poincaré $\mathcal{P}$ est défini comme étant le groupe de toutes les transformations de coordonnées p dans l'espace-temps de Minkowski de la forme :

$$\mathbf{r}' = \Lambda(p)\mathbf{r} + \mathbf{t}(p)$$

où $\mathbf{r} = (x, y, z, ct)$ et $\mathbf{r}' = (x', y', z', ct')$ et c est la vitesse de la lumière dans le vide et les matrices 4×4 Λ vérifient :

$$\Lambda(p)^t g \Lambda(p) = g \quad \Lambda_\rho^\mu \Lambda_\sigma^\nu g_{\mu\nu} = g_{\rho\sigma},$$

avec $g = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ et $\mathbf{t}(p)$.

Lors de telles transformations, on a :

$$c^2 t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2,$$

et inversement, toute transformation linéaire qui vérifie cette propriété doit être de la forme ci-dessus.

Par analogie avec le cas précédent nous pouvons représenter une transformation de Poincaré p par $\{\Lambda(p)|\mathbf{t}(p)\}$. Si $\mathcal{P}_1$ est le groupe de toutes les translations d'espace-temps (i. e. toutes les transformations $\{\mathbf{1}|\mathbf{t}(p)\}$) et $\mathcal{P}_2$ le groupe de Lorentz homogène (celui des $\{\Lambda(p)|\mathbf{0}\}$), alors $\mathcal{P}$ est isomorphe à $\mathcal{P}_1 \mathbb{S} \mathcal{P}_2$.

Chapitre 3

Les groupes de Lie

3.1 Groupes de Lie linéaires

Definition 1

Un groupe $\mathcal{G}$ est dit un *groupe de Lie linéaire* si :

- a) $\mathcal{G}$ possède au moins une représentation fidèle Γ de dimension finie m . Ce qui permet de définir la métrique Euclidienne d :

$$d(g, g') = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m |\Gamma(g)_{ij} - \Gamma(g')_{ij}|^2}.$$

- b) Il existe $\delta > 0$ tel que tout $g \in \mathcal{G}$ contenu dans boule ouverte centrée sur l'élément neutre et de rayon δ , $S(e, \delta)$, peut être paramétré par $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}$, l'identité possédant les coordonnées $x_1, \dots, x_m = 0$. Chaque $g \in \mathcal{G}$ ne doit alors posséder qu'un seul set de coordonnées.
- c) Il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ tel que :

$$\sum_{j=1}^m x_j^2 < \eta^2, \quad (3.1)$$

correspond un $g \in S(e, \delta)$.

- d) Chaque élément de matrice de Γ est une fonction analytique de x pour tout $x \in \mathbb{R}^m$ satisfaisant (3.1).

L'analyticité des éléments de matrices signifie que les éléments de matrices Γ_{ij} doivent pouvoir s'exprimer comme un développement en série de puissance de x pour tout x satisfaisant la condition (3.1). Ceci implique en particulier que les dérivées de ces éléments de matrices existent en tout point x vérifiant cette condition, et en particulier le point $O = (0, \dots, 0)$.

Définissons les matrices $m \times m$ $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ par :

$$(\mathbf{a}_k)_{ij} = \left(\frac{\partial \Gamma_{ij}}{\partial x_k} \right)_{x_1, \dots, x_n=0}.$$

Toutes ces conditions impliquent le théorème suivant :

Théorème 3.1

Les matrices $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ définies ci-dessus forment une base pour un espace vectoriel réel de dimension n .

Preuve.

□

Il convient de noter que le fait que les matrices $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ génèrent un espace vectoriel réel n'implique nullement que les éléments de matrices soit réels. Nous montrerons par la suite qu'en fait ces matrices génèrent une *algèbre de Lie réelle*, observation sur laquelle repose une grande partie de ce qui suivra. Pour la suite du chapitre nous nous contenterons d'étudier l'aspect de *théorie de groupes* des groupes de Lie.

3.2 Les composantes connexes d'un groupe de Lie

Definition 2

L'ensemble maximal d'éléments g de $\mathcal{G}$ obtenu en faisant varier continûment un ou plusieurs éléments de matrices $\Gamma_{ij}(g)$ d'une représentation fidèle de dimension finie Γ forme une *composante connexe* de $\mathcal{G}$.

Théorème 3.2

La composante connexe d'un groupe de Lie $\mathcal{G}$ qui contient l'élément identité e est un sous-groupe invariant de $\mathcal{G}$. Cette composante est souvent dénommée *le sous-groupe connexe* de $\mathcal{G}$.

Preuve.

□

Corollaire 3.3

Toute composante connexe d'un groupe de Lie $\mathcal{G}$ est un co-ensemble à droite du sous-groupe connexe.

Preuve.

□

Definition 3

Un groupe de Lie est dit *connexe* s'il ne possède qu'une composante connexe.

On peut paramétrer la totalité d'un groupe de Lie connexe avec n nombres réels $y_1, \dots, y_n$ d'une partie connexe de $\mathbb{R}^n$, de telle sorte que les éléments de matrices Γ_{ij} soient des fonctions continues des paramètres. Ces fonctions ne sont pas nécessairement analytiques ni bijectives, et ne satisfont donc pas forcément la définition du groupe de Lie. Ainsi, comme les variables $x_1, \dots, x_n$ (utilisées dans la définition du groupe de Lie) et les variables $y_1, \dots, y_n$ définies ci-dessus servent des buts différents, elles ne sont généralement pas interchangeables.

3.3 Groupes de Lie compacts et non-compacts

Théorème 3.4 (de Heine-Borel)

Un sous-ensemble de points d'un espace euclidien réel ou complexe de dimension finie est *compact* si et seulement si il est fermé et borné.

Caractérisation 1 (Groupe de Lie compact de dimension n).

Un groupe de Lie de dimension n qui a un nombre fini de composantes connexes est *compact* si les paramètres sont définis sur des intervalles fermés et finis : $a_j \leq y_j \leq b_j$, pour $j = 1, \dots, n$.

3.4 Intégration invariante

En associant un nombre complexe $f(g)$ à tout élément g d'un groupe $\mathcal{G}$ on définit une fonction complexe sur $\mathcal{G}$. Un exemple est donné par l'ensemble des éléments de matrice d'une représentation Γ de $\mathcal{G}$.

Dans le cas des groupes finis, on rencontre fréquemment des sommes du type $\sum_{g \in \mathcal{G}} f(g)$, surtout dans la théorie des représentations. Le théorème de réarrangement en page 7 affirme que l'ensemble $\{g'g | g \in \mathcal{G}\}$ possède exactement les mêmes éléments que $\mathcal{G}$, quel que soit $g' \in \mathcal{G}$. Ainsi on a :

$$\sum_{g \in \mathcal{G}} f(g'g) = \sum_{g \in \mathcal{G}} f(g),$$

et la somme est dite *invariante à gauche*. De même :

$$\sum_{g \in \mathcal{G}} f(gg') = \sum_{g \in \mathcal{G}} f(g),$$

de telle sorte que la somme est dite *invariante à droite*. En particulier, si $f(g) = 1$ pour tout $g \in \mathcal{G}$ on a $\sum_{g \in \mathcal{G}} f(g) = n$, l'ordre de $\mathcal{G}$.

Pour ce qui concerne les groupes de Lie, on généralise la somme par une intégrale sur les paramètres du groupes. Les problèmes liés à l'invariance à gauche et à droite de ces intégrales devient maintenant un problème de théorie de la mesure. En utilisant cette théorie, Haar [4] a montré que pour une très grande classe de groupes topologiques, incluant les groupes de Lie, il existe toujours une intégrale invariante à droite et une intégrale invariante à gauche.

Soient

$$\int_{\mathcal{G}} f(g) d_l g = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} dy_1 \dots \int_{\alpha_n}^{\beta_n} dy_n f(g(y_1, \dots, y_n)) \sigma_l(y_1, \dots, y_n)$$

et

$$\int_{\mathcal{G}} f(g) d_r g = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} dy_1 \dots \int_{\alpha_n}^{\beta_n} dy_n f(g(y_1, \dots, y_n)) \sigma_r(y_1, \dots, y_n)$$

les intégrales invariantes d'un groupe de Lie $\mathcal{G}$, telles que

$$\int_{\mathcal{G}} f(g'g) d_l g = \int_{\mathcal{G}} f(g) d_l g$$

et

$$\int_{\mathcal{G}} f(gg') d_r g = \int_{\mathcal{G}} f(g) d_r g$$

pour tout $g' \in \mathcal{G}$ et pour toute fonction f pour laquelle ces intégrales sont bien définies. σ_l et σ_r sont les mesures invariantes à gauche et à droite respectivement, elles sont uniques à un facteur près. Les intégrales invariantes sont dites finies si

$$\int_{\mathcal{G}} d_l g = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} dy_1 \dots \int_{\alpha_n}^{\beta_n} dy_n \sigma_l(y_1, \dots, y_n)$$

et

$$\int_{\mathcal{G}} d_r g = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} dy_1 \dots \int_{\alpha_n}^{\beta_n} dy_n \sigma_r(y_1, \dots, y_n)$$

sont finies. Si le facteur peut être choisi de sorte à rendre σ_l et σ_r égaux, et donc que les intégrales soient invariante à gauche et à droite, alors $\mathcal{G}$ est dit *unimodulaire*, et on peut alors écrire

$$d_l g = d_r g = dg$$

et

$$\sigma_l(y_1, \dots, y_n) = \sigma_r(y_1, \dots, y_n) = \sigma(y_1, \dots, y_n).$$

Si $\mathcal{G}$ a plus d'une composante connexe, alors les intégrales peuvent être étendue trivialement en sommant sur toutes les composantes.

La distinction entre groupes de Lie compacts et non-compacts prend tout son sens dans le deux théorèmes suivants. Ils montrent que les groupes de Lie compacts possèdent la plupart des propriétés des groupes finis, la somme étant simplement remplacée par l'intégrale, tandis que pour les groupes de Lie non-compacts la situation est totalement différente.

Théorème 3.5

Si $\mathcal{G}$ est un groupe de Lie compact, alors $\mathcal{G}$ est unimodulaire et l'intégrale invariante

$$\int_{\mathcal{G}} dg = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} dy_1 \dots \int_{\alpha_n}^{\beta_n} dy_n f(g) \sigma(y_1, \dots, y_n)$$

existe et est finie pour tout fonction continue f . σ peut alors être choisie de telle façon que

$$\int_{\mathcal{G}} dg = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} dy_1 \dots \int_{\alpha_n}^{\beta_n} dy_n \sigma(y_1, \dots, y_n) = 1.$$

Théorème 3.6

Si $\mathcal{G}$ est un groupe de Lie non-compact, alors les intégrales invariantes à gauche et à droite sont toutes deux infinies.

L'unimodularité de $\mathcal{G}$ dans le cas de groupes non-compacts est partiellement résolue par le théorème suivant.

Théorème 3.7

Si $\mathcal{G}$ est abélien ou semi-simple, alors $\mathcal{G}$ est unimodulaire.

La définition d'un groupe de Lie semi-simple est donnée en page 50

Les autres groupes de Lie non-compacts doivent être étudiés au cas par cas. On peut montrer que le groupe Euclidien de $\mathbb{R}^3$ est unimodulaire.

3.5 Homomorphisme du groupe $SU(2)$ sur $SO(3)$

Toute la théorie du spin de l'électron et des autres particules élémentaires en mécanique quantique non-relativiste est basée sur le théorème suivant.

Théorème 3.8

Il existe un homomorphisme '2 sur 1' du groupe $SU(2)$ sur le groupe $SO(3)$. Si l'image de $\mathbf{u} \in SU(2)$ est $R(\mathbf{u}) \in SO(3)$, alors $R(\mathbf{u}) = R(-\mathbf{u})$ et l'homomorphisme peut être choisi tel que

$$R(\mathbf{u})_{ij} = \frac{1}{2} \text{tr} (\sigma_i \mathbf{u} \sigma_j \mathbf{u}^{-1}) \quad i, j = 1, 2, 3,$$

où

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

sont les matrices de Pauli.

Preuve.

□

3.6 Homomorphisme du groupe $SL(2, \mathbb{C})$ sur le groupe de Lorentz orthochrone propre $L_+^\uparrow$

Les considérations de la section précédente se généralisent sans autre au cas relativiste. L'analogue du groupe des rotations dans $\mathbb{R}^3$ est le groupe des transformations de Lorentz homogènes $\Lambda(g)$ dans l'espace-temps de Minkowski. Ce dernier contient le sous-groupe des transformations de Lorentz homogènes *propres*, L_+ pour lesquelles $\det \Lambda(g) = 1$. Contrairement au cas des rotations ce sous-groupe n'est pas connexe. Sa composante connexe est le sous-groupe de L_+ pour lequel $\Lambda_{00}(g) > 0$. Ce sous-groupe est appelé le *groupe de Lorentz homogène orthochrone propre* et est désigné par $L_+^\uparrow$.

Dans les notations du chapitre 7 le groupe des matrices 4×4 réelles Λ qui satisfont $\Lambda^t \mathbf{g} \Lambda = \mathbf{g}$, où $\mathbf{g}$ est la métrique de Minkowski $\mathbf{g} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$, est noté $O(1, 3)$. Le sous-groupe pour lequel $\det \Lambda = 1$ est noté $SO(1, 3)$. La composante connexe de ce dernier est quelquefois noté $SO_0(1, 3)$. Ainsi le groupe de Lorentz (ou groupe de Poincaré homogène), le groupe de Lorentz propre L_+ et le groupe de Lorentz orthochrone propre $L_+^\uparrow$ sont isomorphes à $O(1, 3)$, $SO(1, 3)$ et $SO_0(1, 3)$ respectivement.

Définissons $SL(2, \mathbb{C})$ comme étant le groupe multiplicatif de toutes les matrices $\mathbf{a}$ (réelles ou complexes) telles que $\det \mathbf{a} = 1$. Il est maintenant possible de généraliser le théorème précédent.

Théorème 3.9

Il existe un homomorphisme '2 sur 1' du groupe $SL(2, \mathbb{C})$ sur le groupe de Lorentz orthochrone propre $L_+^\uparrow$ (ou, de manière équivalente, sur $SO_0(1, 3)$). Si l'image de $\mathbf{a} \in SL(2, \mathbb{C})$ est $\Lambda(\mathbf{a}) \in L_+^\uparrow$ (ou $SO_0(1, 3)$), alors $\Lambda(\mathbf{a}) = \Lambda(-\mathbf{a})$ et l'homomorphisme peut être défini par

$$\Lambda(\mathbf{a})_{ij} = \frac{1}{2} \text{tr} (\sigma_i \mathbf{a} \sigma_j \mathbf{a}^\dagger) \quad i, j = 0, 1, 2, 3,$$

où σ_i ($i = 1, 2, 3$) sont les matrices de Pauli et $\sigma_0 = \mathbf{1}_2$.

Preuve.

□

Remarquons alors que si $\mathbf{u} \in SU(2)$ (i. e. $\mathbf{u} \in SL(2, \mathbb{C})$ et $\mathbf{u}^\dagger = \mathbf{u}^{-1}$) alors on trouve

$$\Lambda(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} R(\mathbf{u}) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix}.$$

Chapitre 4

Représentations des Groupes - Concepts de base

4.1 Définitions

Definition 1

S'il existe un homomorphisme de groupe d'un groupe $\mathcal{G}$ sur un groupe de matrices $d \times d$ régulières Γ , avec la multiplication matricielle pour l'opération de groupe, alors le groupe de matrices forme une *représentation* de dimension d du groupe $\mathcal{G}$

Il est clair que $\Gamma(e) = 1$. Tous groupe possède une représentation *unité* dans laquelle tous les éléments du groupe sont envoyé sur la matrice unité. Une représentation est dite fidèle si elle est biunivoque. Dans le cas d'un groupe de Lie, l'homomorphisme doit être *continu*. Si, de plus, le groupe est *connexe* alors les éléments de matrice doivent être des fonctions continues des paramètres du groupe.

Exemple 1 (Représentations du groupe D_4)

Nous pouvons mentionner quelques représentations du groupe ponctuel D_4 .

- i) Les matrices définies en (1) forment une représentation de dimension 3 fidèle de D_4 .
- ii) Une représentation fidèle de dimension 2 de D_4 est donnée par les matrices suivantes :

$$\begin{aligned} M_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & M_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, & M_3 &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ M_4 &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & M_5 &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, & M_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \\ M_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, & M_8 &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{4.1}$$

- iii) Une représentation non-triviale, mais pas fidèle, de dimension 1 est donnée par :

$$\begin{aligned} \Gamma(E) &= \Gamma(C_{2y}) = \Gamma(C_{2x}) = \Gamma(C_{2z}) = 1 \\ \Gamma(C_{4y}) &= \Gamma(C_{4y}^{-1}) = \Gamma(C_{2c}) = \Gamma(C_{2d}) = -1 \end{aligned}$$

iv) Enfin il y a la représentation identité pour laquelle $\Gamma(g) = 1$ pour tout $g \in D_4$.

Dans le cas de groupes de Lie il est nécessaire de demander en outre que l'homomorphisme doit être *continu*. Pour un groupe de Lie connexe cela implique que les éléments de matrice de la représentation doivent être des fonctions continues des paramètres.

Pour les groupes de transformation de coordonnées dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ il est pratique d'utiliser les opérateurs $P(g)$ et les fonctions de base $\psi_n(\mathbf{r})$ qui furent défini dans les sections 1.2 et 1.3. Il est utile de généraliser ces concepts pour tous les groupes $\mathcal{G}$. Dans ce but, considérons une représentation Γ de dimension d de $\mathcal{G}$ et soit $\psi_1, \dots, \psi_d$ une base d'un espace abstrait complexe de dimension d , nommé le *support* V . Pour chaque élément $g \in \mathcal{G}$ définissons les opérateurs $\Phi(g)$ qui agissent sur la base par

$$\Phi(g)\psi_n = \sum_{m=1}^d \Gamma(g)_{mn}\psi_m, \quad n = 1, \dots, d. \quad (4.2)$$

avec la propriété que

$$\Phi(g) \left(\sum_{j=1}^d b_j \psi_j \right) = \sum_{j=1}^d b_j (\Phi(g)\psi_j),$$

pour tous nombres complexes $b_1, \dots, b_d$. Un tel opérateur est un opérateur linéaire. L'équation (4.2) implique l'égalité opératorielle

$$\Phi(g_1 g_2) = \Phi(g_1) \Phi(g_2), \quad (4.3)$$

pour tout $g_1, g_2 \in \mathcal{G}$, de sorte que les opérateurs forment un groupe homomorphe à $\mathcal{G}$. Les opérateurs $\Phi(g)$ et l'espace V forment une structure parfois désignée par *module*. Il n'y a aucune garantie pour que pour une représentation donnée les opérateurs soient unitaires. Donc en général

$$(\Phi(g)\psi, \Phi(g)\phi) \neq (\psi, \phi).$$

Enfin si la base est orthonormée, alors l'équation (4.2) implique

$$\Gamma_{mn}(g) = (\psi_m, \Phi(g)\psi_n),$$

pour tout $g \in \mathcal{G}$.

4.2 Représentations équivalentes

Théorème 4.1

Soit Γ une représentation de dimension d d'un groupe $\mathcal{G}$ et soit S une matrice $d \times d$ régulière. Définissons pour tout $g \in \mathcal{G}$ la matrice $d \times d$ $\Gamma'(g)$ par :

$$\Gamma'(g) = S^{-1} \Gamma(g) S. \quad (4.4)$$

Alors cet ensemble de matrices forme également une représentation de $\mathcal{G}$, qui est dite *équivalente* à Γ , et la transformation (4.4) est dite une *similitude*.

Preuve.

□

Théorème 4.2

Soit Γ une représentation d'un groupe $\mathcal{G}$ de changement de coordonnées de $\mathbb{R}^3$ et soient $\psi_1, \dots, \psi_d$ un ensemble de fonctions de base de Γ et soit encore S une matrice $d \times d$ régulière. Alors l'ensemble des d fonctions linéairement indépendantes $\psi'_1, \dots, \psi'_d$ définie par :

$$\psi'_n = \sum_{m=1}^d S_{mn} \psi_m, \quad n = 1, 2, \dots, d,$$

forme une base de fonctions pour la représentation équivalente $\Gamma'(g) = S^{-1}\Gamma(g)S$.

Preuve.

□

4.3 Représentations unitaires

Définition 2

Une représentation *unitaire* d'un groupe $\mathcal{G}$ est une représentation Γ telle que les matrices $\Gamma(g)$ sont unitaires pour tout $g \in \mathcal{G}$.

Théorème 4.3

Si $\mathcal{G}$ est un groupe *fini* ou un groupe de Lie *compact* alors toutes les représentations de $\mathcal{G}$ sont équivalentes à une représentation unitaire.

Preuve.

□

Théorème 4.4

Si $\mathcal{G}$ est un groupe de Lie *simple non-compact* alors il ne possède pas de représentation unitaire de dimension finie en dehors de la représentation triviale pour laquelle $\Gamma(g) = \mathbf{1}$ pour tout $g \in \mathcal{G}$.

Un groupe de Lie non-compact qui n'est pas simple peut posséder à la fois des représentations unitaires et des représentations qui ne sont pas équivalentes à des représentations unitaires.

Théorème 4.5

Si $\mathcal{G}$ est un groupe de transformations de coordonnées de $\mathbb{R}^3$ et si la représentation Γ de $\mathcal{G}$ possède un ensemble de fonctions de base, alors Γ est unitaire si l'ensemble des fonctions de bases est orthonormal.

Preuve.

□

À partir d'un ensemble de fonctions de bases $\psi_1(\mathbf{r}), \dots, \psi_d(\mathbf{r})$ d'une représentation non-unitaire Γ , on peut toujours construire un ensemble de fonctions de base orthonormé $\psi'_1(\mathbf{r}), \dots, \psi'_d(\mathbf{r})$ par le procédé d'orthonormalisation de Graham-Schmidt. Comme les $\psi'_j(\mathbf{r})$ sont des combinaisons linéaires des $\psi_k(\mathbf{r})$, l'ensemble prime

doit être un ensemble de fonctions de bases pour une représentation unitaire Γ' qui est équivalente à Γ . En effet, en définissant la matrice (S_{mn}) par $\psi'_n(\mathbf{r}) = \sum_{m=1}^d S_{mn} \psi_m(\mathbf{r})$, la matrice S est la matrice qui induit la similitude de Γ sur Γ' .

Cet argument n'implique pas que toutes les représentations de tout groupe de changements de coordonnées est équivalent à une représentation unitaire, car il existe des groupes de transformation de coordonnées dans $\mathbb{R}^3$ qui ont au moins quelques représentations qui n'ont pas de fonctions de bases.

Pour tout groupe abstrait $\mathcal{G}$ il existe une généralisation du dernier théorème. Si on utilise une base ortho-normée dans la construction des opérateurs $\Phi(g)$ des équations (4.2) et (4.3), il suit, par une argumentation semblable à celle de la preuve ci-dessus, que pour tout $g \in \mathcal{G}$, $\Phi(g)$ est un opérateur unitaire si et seulement si $\Gamma(g)$ est une matrice unitaire.

Dans la plupart des cas d'intérêt en physique toutes les représentations peuvent être choisies unitaires. Le théorème suivant illustre le rôle important des matrices unitaires dans les similitudes.

Théorème 4.6

Si Γ et Γ' sont deux représentations équivalentes d'un groupe $\mathcal{G}$ reliées par une similitude ($\Gamma' = S^{-1}\Gamma S$) et si Γ est unitaire et S est une matrice unitaire, alors Γ' est aussi une représentation unitaire de $\mathcal{G}$.

Réciproquement si Γ et Γ' sont deux représentations unitaires de $\mathcal{G}$ alors la matrice de similitude peut toujours être choisie unitaire.

Preuve. La première proposition est presque triviale, mais la seconde plutôt longue. □

4.4 Représentations réductibles et irréductibles

Definition 3

Une représentation d'un groupe $\mathcal{G}$ est dite *réductible* si l'espace supportant la représentation possède des sous-espaces invariants sous l'action du groupe de la représentation.

Supposons que la représentation Γ de dimension d d'un groupe $\mathcal{G}$ peut être partitionnée sous la forme :

$$\Gamma(g) = \begin{pmatrix} \Gamma_{11}(g) & \Gamma_{12}(g) \\ 0 & \Gamma_{22}(g) \end{pmatrix}, \quad (4.5)$$

dans la base $\psi_1, \dots, \psi_d$ pour tout $g \in \mathcal{G}$. Il est clair que les matrices de cette forme conservent cette forme par multiplication matricielle. De plus, les sous-espaces générés par $\psi_1, \dots, \psi_{s_1}$ et $\psi_{s_1+1}, \dots, \psi_d$, où s_1 est la dimension de Γ_{11} (et $d - s_1$ celle de Γ_{22}) sont invariants sous $\Gamma(g)$.

Definition 4

Une représentation Γ d'un groupe $\mathcal{G}$ est dite *irréductible* si elle n'est pas réductible.

Cette définition implique qu'une représentation irréductible ne peut pas être transformée, par une similitude, dans la forme (4.5). Par conséquent l'espace V qui porte une représentation irréductible ne possède pas de sous-espaces invariants de dimension inférieure. Dès la section suivante nous développerons des tests d'irréductibilité.

Pour ce qui est des représentations Γ réductibles de (4.5) nous pouvons nous demander si Γ_{11} et Γ_{22} sont à leur tour réductibles ou pas. Si Γ_{11} est aussi réductible, par une similitude, il est possible de la mettre sous

la forme (4.5) avec des sous-matrices de dimension inférieures. Il en va évidemment de même pour Γ_{22} . Nous pouvons continuer cette procédure jusqu'à ce que toutes les représentations qui interviennent soient irréductibles. Ainsi toute représentation réductible Γ peut être mise, à l'aide d'une similitude bien choisie, sous la forme

$$\Gamma'(g) = \begin{pmatrix} \Gamma'_{11}(g) & \Gamma'_{12}(g) & \cdots & \Gamma'_{1r}(g) \\ 0 & \Gamma'_{22}(g) & \cdots & \Gamma'_{2r}(g) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \Gamma'_{rr}(g) \end{pmatrix},$$

où toutes les matrices $\Gamma'_{ii}(g)$ sont des représentations irréductibles. Il est maintenant évident que *les représentations irréductibles sont les blocs de base à partir desquels toutes les représentations réductibles peuvent être construites*.

Une dernière question que l'on peut se poser est de savoir si les matrices $\Gamma'_{jk}(g)$ ($k > j$), au-dessus de la diagonale, peuvent être annulées par une autre similitude, ne laissant plus que des matrices non nulles dans la diagonale. Si c'est possible, alors Γ est une représentation équivalente à une représentation de la forme

$$\Gamma''(g) = \begin{pmatrix} \Gamma''_{11}(g) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \Gamma''_{22}(g) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \Gamma''_{rr}(g) \end{pmatrix}, \quad (4.6)$$

où tous les $\Gamma''_{ii}(g)$ sont des représentations irréductibles de $\mathcal{G}$.

Definition 5

Une représentation Γ d'un groupe $\mathcal{G}$ est dite *complètement réductible* si les matrices de la représentation peuvent être mises sous la forme diagonale par bloc, où chaque bloc est formé par une représentation irréductible de $\mathcal{G}$.

Une telle représentation est parfois dite *décomposable*.

Théorème 4.7

Si $\mathcal{G}$ est un groupe fini ou un groupe de Lie compact, alors toute représentation réductible de $\mathcal{G}$ est complètement réductible. Il en va de même pour toute représentation réductible d'un groupe de Lie non-compact, connexe et semi-simple et pour toute représentation unitaire réductible de tout autre groupe. $\square$

Supposons que $\phi_1, \dots, \phi_d$ forment une base pour l'espace qui porte la représentation complètement réductible Γ'' (4.6) et que d_i est la dimension de la représentation irréductible Γ''_{ii} , donc $\sum_{i=1}^r d_i = d$.

Il suit alors de l'équation (4.2) et (4.6) que $\phi_1, \dots, \phi_{d_1}$ forme une base pour l'espace qui porte la représentation irréductible Γ''_{11} , $\phi_{d_1+1}, \dots, \phi_{d_1+d_2}$ pour l'espace qui porte la RI Γ''_{22} etc. . L'espace qui porte la représentation Γ'' est alors la somme directe des espaces qui portent les représentations irréductibles $\Gamma''_{11}, \Gamma''_{22}, \dots, \Gamma''_{rr}$. Nous dirons alors que la représentation complètement réductible Γ'' est la somme directe des représentations irréductibles $\Gamma''_{11}, \Gamma''_{22}, \dots, \Gamma''_{rr}$ et nous écrirons :

$$\Gamma'' = \Gamma''_{11} \oplus \Gamma''_{22} \oplus \cdots \oplus \Gamma''_{rr}$$

De manière semblable, l'équivalence d'une représentation Γ avec une somme directe de représentations irréductibles $\Gamma''_{11}, \Gamma''_{22}, \dots, \Gamma''_{rr}$ peut s'écrire :

$$\Gamma \approx \Gamma''_{11} \oplus \Gamma''_{22} \oplus \cdots \oplus \Gamma''_{rr}$$

Dans le cas où Γ est équivalent à une représentation unitaire, toutes les représentations irréductibles de la somme directe sont également unitaires.

Le théorème montre que toutes les représentations d'intérêt en physique sont soit complètement irréductibles, soit irréductibles, mais en général, il existe des groupes avec des représentations réductibles qui ne sont pas complètement réductibles.

Exemple 2 (Le groupe multiplicatif des réels positifs)

Ce groupe abélien n'est pas compact et un élément typique de ce groupe est donné par e^{y_1} , avec $-\infty \leq y_1 \leq \infty$. Ce groupe possède la représentation de dimension 2 fidèle

$$\Gamma(e^{y_1}) = \begin{pmatrix} 1 & y_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Supposons qu'elle est complètement réductible. Il existe alors une matrice 2×2 S telle que

$$\Gamma'(e^{y_1}) = S^{-1} \begin{pmatrix} 1 & y_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} S = \begin{pmatrix} \alpha(y_1) & 0 \\ 0 & \beta(y_1) \end{pmatrix}.$$

L'invariance du déterminant et de la trace lors des similitudes nous permet d'affirmer que $\alpha(y_1)\beta(y_1) = 1$ et $\alpha(y_1) + \beta(y_1) = 2$, ce qui implique $\alpha(y_1) = \beta(y_1) = 1$. Ainsi $\Gamma'(e^{y_1}) = \mathbf{1}$ ce qui implique que $\Gamma(e^{y_1}) = \mathbf{1}$ ce qui est faux. Donc Γ n'est pas complètement réductible.

4.5 Lemmes de Schur et théorème d'orthogonalité

Le (ou les deux) théorème(s) suivant sont connus sous le nom de *Lemme de Schur*.

Théorème 4.8

Soient Γ et Γ' deux représentations irréductibles d'un groupe $\mathcal{G}$ de dimension d et d' respectivement et supposons qu'il existe une matrice $d \times d'$ $\mathbf{A}$ telle que :

$$\Gamma(g)\mathbf{A} = \mathbf{A}\Gamma'(g),$$

pour tout $g \in \mathcal{G}$. Alors soit $\mathbf{A} = 0$, soit $d = d'$ et $\det \mathbf{A} \neq 0$.

Preuve.

□

Théorème 4.9

Si Γ est une représentation irréductible d'un groupe $\mathcal{G}$ et si $\mathbf{B}$ est une matrice $d \times d$ telle que $\Gamma(g)\mathbf{B} = \mathbf{B}\Gamma(g)$ pour tout $g \in \mathcal{G}$ alors $\mathbf{B}$ est un multiple de la matrice unité.

Preuve. Soit $\mathbf{A} = \mathbf{B} - \beta \mathbf{1}$ où le nombre complexe β est solution de l'équation $\det \mathbf{A} = 0$. Alors on a $\Gamma(g)\mathbf{A} = \mathbf{A}\Gamma(g)$ pour tout $g \in \mathcal{G}$. Ainsi par le théorème précédent on doit avoir $\mathbf{A} = 0$, ce qui signifie $\mathbf{B} = \beta \mathbf{1}$. □

Les corollaires suivant montrent la trivialité des représentations irréductibles des groupes abéliens.

Théorème 4.10

Toute représentation irréductible d'un groupe abélien est de dimension 1.

Preuve. Soit Γ une représentation irréductible d'un groupe abélien $\mathcal{G}$.

Comme $\Gamma(g)\Gamma(g') = \Gamma(g')\Gamma(g)$ pour tout $g, g' \in \mathcal{G}$, il découle du théorème précédent que $\Gamma(g') = \gamma(g')\mathbf{1}$, où $\gamma(g')$ est un nombre ne dépendant que de g' . Clairement une telle représentation n'est irréductible que si elle est de dimension 1. $\square$

Le théorème suivant s'applique aussi bien aux groupes finis qu'aux groupes de Lie compacts. C'est le théorème d'orthogonalité pour les représentations matricielles.

Théorème 4.11

Soient Γ^p et Γ^q deux représentations unitaires irréductibles d'un groupe fini $\mathcal{G}$ qui ne sont pas équivalentes si $p \neq q$ (mais qui sont identiques si $p = q$). Alors :

$$\frac{1}{n} \sum_{g \in \mathcal{G}} \Gamma^p(g)_{ij}^* \Gamma^q(g)_{kl} = \frac{1}{d_p} \delta_{pq} \delta_{ik} \delta_{jl},$$

où n est l'ordre de $\mathcal{G}$ et d_p la dimension de Γ^p .

Dans le cas d'un groupe de Lie compact on a :

$$\int_{\mathcal{G}} \Gamma^p(g)_{ij}^* \Gamma^q(g)_{kl} dg = \frac{1}{d_p} \delta_{pq} \delta_{ik} \delta_{jl}.$$

Preuve. $\square$

C'est dans les applications de ce théorème que résident les principaux avantages de travailler avec des représentations unitaires. Par exemple, une conséquence immédiate de ce théorème est le théorème suivant :

Théorème 4.12

Si $\phi_1^p(\mathbf{r}), \phi_2^p(\mathbf{r}), \dots$ et $\psi_1^q(\mathbf{r}), \psi_2^q(\mathbf{r}), \dots$ sont des fonctions de bases pour les représentations irréductibles Γ^p et Γ^q d'un groupe de changement de coordonnées $\mathcal{G}$ respectivement qui est soit un groupe fini soit un groupe de Lie compact, et Γ^p et Γ^q non équivalentes si $p \neq q$ (mais identiques si $p = q$), alors

$$(\phi_m^p, \psi_n^q) = 0,$$

à moins que $p = q$ et $m = n$, auquel cas (ϕ_m^p, ψ_m^p) est une constante indépendante de m .

Preuve. $\square$

Une conséquence immédiate de ce théorème est que

$$(\psi_m^p, \psi_n^p) = \delta_{mn} (\psi_1^p, \psi_1^p)$$

pour tout $m, n = 1, 2, \dots, d_p$. Ainsi si $\psi_1^p(\mathbf{r})$ est normé, alors toutes les autres fonctions le seront également. Ainsi il sera admis dans la suite que tout ensemble de fonctions de base d'une représentation irréductible unitaire forme un ensemble orthonormé, i.e. :

$$(\psi_m^p, \psi_n^p) = \delta_{mn},$$

pour tout $m, n = 1, 2, \dots, d_p$. Il convient de noter qu'en multipliant toutes les fonctions de base d'un ensemble orthonormé par une phase globale, on obtient encore un ensemble orthonormé. Donc le choix d'une telle phase n'est qu'une question de convention.

4.6 Caractères

Bien que des représentations équivalentes ont essentiellement le même contenu, leur forme explicite contient un beaucoup d'arbitraire. La définition suivante introduit une grandeur qui est la même pour toutes les représentations équivalentes. Pour les groupes finis et les groupes de Lie compacts, cette définition détermine une représentation de manière unique à une équivalence près.

Definition 6

Soit Γ une représentation de dimension d d'un groupe $\mathcal{G}$. On appelle *caractère* de l'élément g du groupe dans la représentation Γ le nombre

$$\chi(g) = \text{tr } \Gamma(g).$$

L'ensemble de tous les caractères d'une représentation est appelé le *système de caractère* de la représentation

Comme $\Gamma(e) = \mathbf{1}_p$ pour l'identité e de $\mathcal{G}$ on a $\chi(e) = d$.

Théorème 4.13

Une condition nécessaire pour que deux représentations d'un groupe soient équivalentes est qu'elles doivent posséder le même système de caractère.

Preuve. □

Une autre conséquence de l'invariance de la trace sous les transformations de similitude est énoncée dans le théorème suivant.

Théorème 4.14

Dans une représentation donnée d'un groupe $\mathcal{G}$ tous les éléments de la même classe ont le même caractère.

Preuve. □

Le théorème suivant donne un théorème d'orthogonalité.

Théorème 4.15

Soient $\chi^p(g)$ et $\chi^q(g)$ les caractères de deux représentations irréductibles d'un groupe fini d'ordre n , qui sont supposées non-équivalentes si $p \neq q$. Alors

$$\frac{1}{n} \sum_{g \in \mathcal{G}} \chi^p(g)^* \chi^q(g) = \delta_{pq}.$$

De même pour un groupe de Lie compact :

$$\int_{\mathcal{G}} \chi^p(g)^* \chi^q(g) dg = \delta_{pq}.$$

Il est maintenant aisé de démontrer la réciproque du théorème 4.13.

Théorème 4.16

Si $\mathcal{G}$ est un groupe fini ou un groupe de Lie compact, alors une condition suffisante pour que deux représentations soient équivalentes est donnée par l'égalité de leur système de caractère.

Preuve. □

Les caractères donnent une caractérisation complète (à une équivalence près) des représentations irréductibles qui apparaissent dans les représentations réductibles. Cette connaissance peut s'avérer très utile. Le théorème suivant en donne les détails.

Théorème 4.17

Le nombre de fois n_p qu'une représentation irréductible Γ^p (ou une représentation qui lui est équivalente) apparaît dans une représentation réductible Γ est donnée, pour un groupe fini $\mathcal{G}$, par

$$n_p = \frac{1}{n} \sum_{g \in \mathcal{G}} \chi(g) \chi^p(g)^*,$$

où $\chi^p(g)$ et $\chi(g)$ sont les caractères de Γ^p et γ respectivement et n est l'ordre de $\mathcal{G}$.

Pour un groupe de Lie compact on a

$$n_p = \int_{\mathcal{G}} \chi(g) \chi^p(g)^* dg.$$

Preuve. □

On peut, de manière semblable, donner un critère pour l'irréductibilité d'une représentation.

Théorème 4.18

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une représentation Γ d'un groupe fini $\mathcal{G}$ soit irréductible est que

$$\frac{1}{n} \sum_{g \in \mathcal{G}} |\chi(g)|^2 = 1,$$

où n et χ sont définis comme dans les théorèmes précédents.

Dans le cas d'un groupe de Lie compact on a

$$\int_{\mathcal{G}} |\chi(g)|^2 dg = 1.$$

Ce critère fournit un test très simple pour l'irréductibilité des représentations d'un groupe, surtout s'il est fini.

Les caractères permettent encore de déterminer le nombre de représentations irréductibles non-équivalentes d'un groupe fini $\mathcal{G}$ ainsi que des renseignements sur leur dimension. Nous aurons besoin des notions de *représentations régulières de $\mathcal{G}$* et de *classe de multiplication*.

Definition 7 (Représentation régulière)

Soit $\mathcal{G}$ un groupe fini d'ordre n et définissons, pour tout $g \in \mathcal{G}$ une matrice $n \times n$ $\Gamma^{reg}(g_s)$ par

$$\Gamma^{reg}(g_s)_{kl} = \begin{cases} 1, & \text{si } g_s g_l = g_k, \\ 0, & \text{si } g_s g_l \neq g_k. \end{cases}$$

Ce qui implique :

$$g_s g_l = \sum_{k=1}^n \Gamma^{reg}(g_s)_{kl} g_k,$$

pour tout $s, l = 1, \dots, n$. Cet ensemble de matrices forme une représentation de dimension n de $\mathcal{G}$ dite la *représentation régulière de $\mathcal{G}$* . De plus comme $g_s g_l = g_l$ si et seulement si $g_s = e$ on a

$$\Gamma^{reg}(g_s)_{ll} = \begin{cases} 1, & \text{si } g_s = e \\ 0, & \text{si } g_s \neq e, \end{cases}$$

de sorte que le caractère est donné par

$$\chi^{reg}(g_s) = \begin{cases} n, & \text{si } g_s = e \\ 0, & \text{si } g_s \neq e. \end{cases}$$

Definition 8 (Multiplication de classes)

Si nous convenons de considérer comme égaux deux ensembles dont chaque élément de l'un se répète autant de fois dans l'un que dans l'autre ensemble, alors nous pouvons clairement écrire

$$XCX^{-1} = \mathcal{C}$$

où $c\mathcal{C}$ est une classe de $\mathcal{G}$, $X \in \mathcal{G}$ et XCX^{-1} est défini comme étant l'ensemble des éléments de la forme XgX^{-1} avec $g \in \mathcal{C}$. Inversement si $XCX^{-1} = \mathcal{C}$ pour tout $X \in \mathcal{G}$, alors $\mathcal{C}$ est constitué entièrement de classes complètes.

Le produit $\mathcal{C}_i \mathcal{C}_j$ de deux classes $\mathcal{C}_i$ et $\mathcal{C}_j$ est défini comme étant l'ensemble des éléments de $\mathcal{G}$ de la forme $g_i g_j$ avec $g_i \in \mathcal{C}_i$. Donc si $\mathcal{C}_i$ et $\mathcal{C}_j$ ont n_i et n_j éléments respectivement, alors $\mathcal{C}_i \mathcal{C}_j$ contient $n_i n_j$ éléments, dont quelques-uns peuvent être égaux.

Comme $\mathcal{C}_i \mathcal{C}_j = XC_i \mathcal{C}_j X^{-1}$ pour tout $X \in \mathcal{G}$, il suit que $\mathcal{C}_i \mathcal{C}_j$ est entièrement constitué de classes entières. Ainsi on peut écrire, dans le cas d'un groupe fini

$$\mathcal{C}_i \mathcal{C}_j = \sum_k c_{ijk} \mathcal{C}_k,$$

où c_{ijk} est un nombre entier non-négatif qui indique le nombre de fois que la classe $\mathcal{C}_k$ apparaît dans le produit $\mathcal{C}_i \mathcal{C}_j$.

Les coefficients c_{ijk} ont les quatre propriétés suivantes

- a) $c_{ijk} = c_{jik}$, c'est une conséquence de l'égalité $C_i C_j = C_j C_i$, qui se montre comme suit. Si gg' est un élément de $C_i C_j$, avec $g \in C_i$ et $g' \in C_j$, on a $gg' = (gg'g^{-1})g$ or $gg'g^{-1} \in C_j$ donc $gg' \in C_j C_i$. On en tire que $C_i C_j \subset C_j C_i$. On déduit de même que $C_j C_i \subset C_i C_j$ d'où l'égalité des ensembles.
- b) Si $C_1 = \{E\}$, alors $c_{1jk} = c_{j1k} = \delta_{jk}$.
- c) À chaque classe C_i il correspond une classe $C_{i'}$ qui contient les éléments inverses des éléments de C_i . C_i et $C_{i'}$ contiennent le même nombre d'éléments n_i et peuvent parfois être égaux. Ainsi il est clair que $C_i C_j$ contient C_1 n_i fois si $j = i'$ et aucune fois si $j \neq i'$, de sorte que $c_{ij1} = n_i \delta_{ji'}$.
- d) Si Γ^p est une représentation irréductible de dimension d_p de $\mathcal{G}$, alors

$$n_i n_j \chi^p(C_i) \chi^p(C_j) = d_p \sum_k c_{ijk} n_k \chi^p(C_k).$$

Ce résultat est parfois utilisé dans la construction des tables de caractères, et se démontre comme suit. Soit

$$C_i = \sum_{g \in C_i} \Gamma^p(g), \quad (4.7)$$

de sorte que

$$C_i C_j = \sum_k c_{ijk} C_k.$$

Comme $XgX^{-1} \in C_i$ pour tout $g \in C_i$ et $X \in \mathcal{G}$, alors $\Gamma^p(X)C_i = C_i \Gamma^p(X)$, donc par le second Lemme de Schur $C_i = \gamma_i \mathbf{1}$. Ceci implique que

$$\gamma_i \gamma_j = \sum_k c_{ijk} \gamma_k \quad (4.8)$$

et $\text{tr } C_i = \gamma_i d_p$. Mais, selon (4.7) $\text{tr } C_i = n_i \chi^p(C_i)$, de sorte que $\gamma_i = \frac{n_i}{d_p} \chi(C_i)$. Dans (4.8) on obtient le résultat cherché.

Théorème 4.19

Pour un groupe fini $\mathcal{G}$, la somme des carrés des dimensions des représentations irréductibles non-équivalentes est égale à l'ordre de $\mathcal{G}$.

Théorème 4.20

Pour un groupe fini $\mathcal{G}$, le nombre de représentations irréductibles non-équivalentes est égal au nombre de classes de $\mathcal{G}$.

Ces deux théorèmes ensembles peuvent souvent être suffisants pour déterminer de manière unique les dimensions des représentations irréductibles.

Exemple 3

Dimensions des représentations irréductibles inéquivalentes du groupe cristallographique D_4 .

Ce groupe est d'ordre 8 et contient 5 classes. Il possède donc 5 représentations irréductibles inéquivalentes. Si leur dimension est d_j on a $\sum_{j=1}^5 d_j^2 = 8$. Ceci implique que l'on a $d_1 = d_2 = d_3 = d_4 = 1$ et $d_5 = 2$. Cette solution est unique à une permutation des indices près.

Le second théorème d'orthogonalité pour les caractères est utilisé dans la preuve du théorème précédent.

Théorème 4.21

Si $\chi^p(\mathcal{C}_j)$ est le caractère de la classe $\mathcal{C}_j$ d'un groupe fini $\mathcal{G}$ pour la représentation irréductible Γ^p de $\mathcal{G}$, alors

$$\sum_p \chi^p(\mathcal{C}_j)^* \chi^p(\mathcal{C}_k) N_j = n \delta_{jk},$$

où la somme porte sur toutes les représentations irréductibles non-équivalentes de $\mathcal{G}$, n est l'ordre de $\mathcal{G}$ et N_j est le nombre d'éléments dans la classe $\mathcal{C}_j$.

Le système de caractère des représentations irréductibles d'un groupe fini est judicieusement affiché sous la forme d'une *table de caractère*. Les classes du groupe sont placées au sommet de la table et les représentations irréductibles inéquivalentes sur le bord gauche. Il suit du théorème 4.20 que cette table est toujours carrée.

Pour les groupes d'ordre petit il est particulièrement aisé de remplir cette table avec l'aide des théorèmes ci-dessus, sans même obtenir des formes explicites des matrices des représentations. Le cas d'autres groupes sera considéré dans la section suivante.

Exemple 4 (Table de caractère du groupe ponctuel D_4)

Les classes de D_4 sont $\mathcal{C}_1 = \{E\}$, $\mathcal{C}_2 = \{C_{2x}, C_{2z}\}$, $\mathcal{C}_3 = \{C_{2y}\}$, $\mathcal{C}_4 = \{C_{4y}, C_{4y}^{-1}\}$ et $\mathcal{C}_5 = \{C_{2c}, C_{2d}\}$.

Considérons, en premier, les quatre représentations de dimension 1 $\Gamma^1, \Gamma^2, \Gamma^3$ et Γ^4 . Comme $C_{2x}^2 = C_{2c}^2 = E$, alors $\chi^p(C_{2x})^2 = \chi^p(C_{2c})^2 = 1$, pour $p = 1, 2, 3, 4$. De plus, de la table 1, $C_{4y} = C_{2c}C_{2x}$, de sorte que $\chi^p(\mathcal{C}_4) = \chi^p(\mathcal{C}_2)\chi(\mathcal{C}_5)$. Enfin $C_{2y} = C_{4y}^2$, donc $\chi^p(C_{2y}) = 1$ pour $p = 1, 2, 3, 4$. Ainsi les quatre représentations de dimension 1 peuvent être choisies de façon que $\chi^1(\mathcal{C}_2) = 1, \chi^1(\mathcal{C}_5) = 1; \chi^2(\mathcal{C}_2) = 1, \chi^2(\mathcal{C}_5) = -1; \chi^3(\mathcal{C}_2) = -1, \chi^3(\mathcal{C}_5) = -1; \chi^4(\mathcal{C}_2) = -1, \chi^4(\mathcal{C}_5) = 1$.

Par le premier théorème d'orthogonalité pour les caractères la représentation de dimension 2, Γ^5 , doit satisfaire les conditions

$$\begin{cases} \chi^5(\mathcal{C}_1) + 2\chi^5(\mathcal{C}_2) + \chi^5(\mathcal{C}_3) + 2\chi^5(\mathcal{C}_4) + 2\chi^5(\mathcal{C}_5) = 0, \\ \chi^5(\mathcal{C}_1) + 2\chi^5(\mathcal{C}_2) + \chi^5(\mathcal{C}_3) - 2\chi^5(\mathcal{C}_4) - 2\chi^5(\mathcal{C}_5) = 0, \\ \chi^5(\mathcal{C}_1) - 2\chi^5(\mathcal{C}_2) + \chi^5(\mathcal{C}_3) + 2\chi^5(\mathcal{C}_4) - 2\chi^5(\mathcal{C}_5) = 0, \\ \chi^5(\mathcal{C}_1) - 2\chi^5(\mathcal{C}_2) + \chi^5(\mathcal{C}_3) - 2\chi^5(\mathcal{C}_4) + 2\chi^5(\mathcal{C}_5) = 0. \end{cases}$$

En additionnant ces équations nous obtenons $\chi^5(\mathcal{C}_1) + \chi^5(\mathcal{C}_3) = 0$ et comme $\chi^5(\mathcal{C}_1) = \chi^5(E) = 2$, on a $\chi^5(\mathcal{C}_3) = -2$. De plus le théorème 4.18 nous dit que $\sum_{g \in \mathcal{G}} |\chi^5(g)|^2 = 8$, avec $|\chi^5(E)|^2 + |\chi^5(C_{2y})|^2 = 8$, on en déduit $\chi^5(\mathcal{C}_2) = \chi^5(\mathcal{C}_4) = \chi^5(\mathcal{C}_5) = 0$.

La table de caractère de D_4 est donnée dans la table 4. On peut comparer ces représentations irréductibles aux représentations rencontrées dans l'exemple 1. Γ^1 est évidemment la représentation identité iv), Γ^2 est la représentation de dimension 1 définie en iii), Γ^5 est la représentation de dimension 2 définie en ii), et la représentation de dimension 3 définie en i) est réductible, c'est la somme directe $\Gamma^3 \oplus \Gamma^5$.

	E	$C_{2x,2z}$	C_{2y}	C_{4y}, C_{4y}^{-1}	$C_{2c,2d}$
Γ^1	1	1	1	1	1
Γ^2	1	1	1	-1	-1
Γ^3	1	-1	1	1	-1
Γ^4	1	-1	1	-1	1
Γ^5	2	0	-2	0	0

Table de caractère du groupe ponctuel D_4

Bien qu'un bon nombre de résultats physique suivent immédiatement de la connaissance des caractères, il est souvent nécessaire de connaître la forme explicite des matrices de la représentation. Une méthode pour leur construction sera donnée dans le chapitre suivant.

L'équivalent des théorèmes 4.19 et 4.20 au cas des groupes de Lie compact est encore plus contraignant.

Théorème 4.22

Pour un groupe de Lie compact $\mathcal{G}$ le nombre de représentations irréductibles inéquivalentes est infini mais dénombrable.

Ce théorème implique que les représentations irréductibles d'un groupe de Lie compact peuvent être caractérisées par un paramètre qui ne prend que des valeurs entières.

4.7 Méthodes pour trouver les représentations irréductibles des groupes important en physique

Le moment est venu de jeter un oeil sur les méthodes, qui seront développées par la suite, pour construire les représentations irréductibles des groupes importants qui sont rencontrés en physique.

4.7.1 Groupes finis

Groupes abéliens finis

Nous verrons dans la section 5.6 qu'il existe des méthodes simples pour trouver toutes les représentations irréductibles de tous les groupes abéliens finis.

Groupes ponctuels cristallographiques

Ces groupes ponctuels sont relativement simples à obtenir. Parmi les 32 groupes ponctuels, un est l'identité, 15 autres sont abéliens, et un certain nombre des restants sont des produits directs de groupes ponctuels plus petits (donc leur représentations irréductibles sont des produits directs des représentations irréductibles de ces groupes plus petits.) Les méthodes illustrées dans l'exemple 4 peuvent s'appliquer simplement aux derniers groupes.

Groupes d'espace

4.7.2 Groupes de Lie

Groupe de Lie abéliens

Chaque groupe de Lie abélien est soit isomorphe à l'un des deux groupes suivants ou alors isomorphe à un ensemble de produits directs ne faisant intervenir que ces groupes (avec éventuellement des groupes abéliens finis).

$U(1)$

Le groupe multiplicatif des nombres réels

$SU(2)$, $SO(3)$ et $O(3)$

Groupe de Lorentz homogène

Autres groupes de Lie connexes semi-simples

Les groupes Euclidiens, de Poincaré et de Galilée

Chapitre 5

Représentations des Groupes - Développements

5.1 Projecteurs

Pour tout groupe fini de transformation de coordonnées dans $\mathbb{R}^3$ (en particulier pour tout groupe ponctuel ou groupe d'espace cristallographique) les fonctions de bases des représentations unitaires irréductibles sont aisément déterminées par des automatismes utilisant des *opérateurs de projection*. Avant de définir ces derniers énonçons le théorème suivant qui sera très utile.

Théorème 5.1

Toute fonctions $\phi(\mathbf{r})$ de L^2 peut être écrite comme une combinaison linéaire de fonctions de bases d'une représentation unitaire irréductible d'un groupe $\mathcal{G}$ de transformation de coordonnées dans $\mathbb{R}^3$:

$$\phi(\mathbf{r}) = \sum_p \sum_{j=1}^{d_p} a_j^p \phi_j^p(\mathbf{r}),$$

où $\phi_j^p(\mathbf{r})$ est une fonction de base normée qui se transforme comme la j^{e} ligne de la représentation unitaire irréductible Γ^p de dimension d_p de $\mathcal{G}$, les a_j^p sont des nombres complexes et la somme sur p porte sur toutes les représentations unitaire irréductibles inéquivalentes de $\mathcal{G}$.

Preuve.

□

L^2 est l'espace des fonctions de carré sommable. Les fonctions de base $\phi_j^p(\mathbf{r})$ et les coefficients a_j^p dépendent de $\phi(\mathbf{r})$ et certains a_j^p peuvent être nuls.

En général, les fonctions $\phi_j^p(\mathbf{r})$ ne forment pas une base pour L^2 . Ceci serait impossible dans le cas d'un groupe $\mathcal{G}$ fini, puisque L^2 est un espace de dimension infinie et qu'un tel groupe ne possède qu'un nombre fini de fonctions de base. Par contre il est possible d'appliquer le théorème à tous les membres d'une base de L^2 tour à tour. Le résultat sera alors une base de L^2 , dont les membres sont des fonctions de base de représentations irréductibles unitaires de $\mathcal{G}$.

Definition 1 (Projecteurs)

Soit Γ^p une représentation unitaire irréductible de dimension d_p d'un groupe fini de transformation de coordonnées $\mathcal{G}$ d'ordre n . On définit alors les *projecteurs* (ou *opérateurs de projection*) par

$$\mathcal{P}_{mn}^p = \frac{d_p}{n} \sum_{g \in \mathcal{G}} \Gamma^p(g)_{mn}^* P(g). \quad (5.1)$$

Si le groupe de changement de coordonnées forme un groupe de Lie compact on définit alors

$$\mathcal{P}_{mn}^p = d_p \int_{\mathcal{G}} \Gamma^p(g)_{mn}^* P(g) dg.$$

Théorème 5.2

Les projecteurs $\mathcal{P}_{mn}^p$ possèdent les propriétés suivantes

1. Pour toutes fonctions ϕ, ψ de L^2

$$(\mathcal{P}_{mn}^p \phi, \psi) = (\phi, \mathcal{P}_{nm}^p \psi),$$

et en particulier $(\mathcal{P}_{nn}^p \phi, \psi) = (\phi, \mathcal{P}_{nn}^p \psi)$, ce qui montre que $\mathcal{P}_{nn}^p$ est un opérateur auto-adjoint.

2. Pour tous projecteurs $\mathcal{P}_{mn}^p, \mathcal{P}_{jk}^q$

$$\mathcal{P}_{mn}^p \mathcal{P}_{jk}^q = \delta_{pq} \delta_{nj} \mathcal{P}_{mk}^q.$$

En particulier $(\mathcal{P}_{nn}^p)^2 = \mathcal{P}_{nn}^p$. Donc $\mathcal{P}_{nn}^p$ est un opérateur idempotent.

3. Si $\psi_1^q(\mathbf{r}), \dots$ sont des fonctions de bases qui se transforment comme les représentations irréductibles unitaires Γ^q de $\mathcal{G}$, alors

$$\mathcal{P}_{mn}^p \psi_j^q(\mathbf{r}) = \delta_{pq} \delta_{nj} \psi_m^p(\mathbf{r}).$$

4. Pour tout $\phi \in L^2$

$$\mathcal{P}_{nn}^p \phi(\mathbf{r}) = a_n^p \phi_n^p(\mathbf{r}),$$

où a_n^p et $\phi_n^p(\mathbf{r})$ sont les coefficients et les fonctions de base du développement de $\phi(\mathbf{r})$ qui correspondent à la n^{e} ligne de Γ^p .

Preuve.

□

Les propriétés 1 et 2 caractérisent tous les projecteurs. $\mathcal{P}_{nn}^p$ projette dans le sous-espace de L^2 des fonctions qui se transforment comme la n^{e} ligne de Γ^p .

Comme les opérateurs qui satisfont la relation 2 sont dit idempotent, la technique des projecteurs est aussi appelée la *méthode idempotente*. Pour un groupe fini, ce théorème fournit une méthode simple pour déterminer les fonctions de base (dans le cas des groupes de Lie compact, il convient d'utiliser d'autres méthodes, comme celles du chapitre 10, section 10.4).

Un ensemble de fonctions de base orthonormales qui se transforment comme les lignes de Γ^p peut être trouvé en choisissant d'abord une fonction $\phi(\mathbf{r})$ telle que $\mathcal{P}_{nn}^p \phi(\mathbf{r})$ n'est pas identiquement nulle pour des

valeurs arbitrairement choisies $n = 1, \dots, d_p$. En prenant $c_n^p = (\mathcal{P}_{nn}^p \phi, \mathcal{P}_{nn}^p \phi)^{\frac{1}{2}}$, les fonctions $\phi_n^p(\mathbf{r})$ définies par

$$\phi_n^p(\mathbf{r}) = \frac{1}{c_n^p} \mathcal{P}_{nn}^p \phi(\mathbf{r})$$

est normée et se transforme comme la n^{e} ligne de Γ^p . Les autres fonctions $\phi_m^p(\mathbf{r})$ ($m = 1, \dots, d_p$ et $m \neq n$) sont obtenues en agissant sur $\phi_n^p(\mathbf{r})$ avec l'opérateur $\mathcal{P}_{mn}^p$. Nous verrons dans le chapitre suivant que dans les problèmes physiques il ne sera généralement nécessaire de travailler qu'avec des fonctions de base qui appartiennent à une ligne arbitrairement choisie de chaque représentation irréductible(RI).

Exemple 1 (Construction des fonctions de base des RI du groupe D_4)

Posons $\phi(\mathbf{r}) = (x + z)e^{-r}$, où $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Pour toute rotation pure g

$$P(g)\phi(\mathbf{r}) = \phi(\mathbf{R}(g)^{-1}\mathbf{r}) = \phi(\tilde{\mathbf{R}}(g)\mathbf{r}),$$

où les matrices orthogonales $\mathbf{R}(g)$ pour D_4 sont données dans (1). Par exemple, pour $g = C_{4y}$

$$\tilde{\mathbf{R}}(C_{4y})\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ y \\ -x \end{pmatrix},$$

et $\phi(\tilde{\mathbf{R}}(g)\mathbf{r})$ est, par définition, la fonction obtenue en remplaçant x, y et z dans $\phi(\mathbf{r})$ par les composantes respectives de $\tilde{\mathbf{R}}(g)\mathbf{r}$. Dans notre cas $\phi(\mathbf{r}) = (x + z)e^{-r}$, donc

$$P(C_{4y})\phi(\mathbf{r}) = (z - x)e^{-r}.$$

On obtient de la même manière

$$\begin{aligned} P(E)\phi(\mathbf{r}) &= (x + y)e^{-r} \\ P(C_{2x})\phi(\mathbf{r}) &= (x - z)e^{-r} \\ P(C_{2y})\phi(\mathbf{r}) &= (-x - z)e^{-r} \\ P(C_{2z})\phi(\mathbf{r}) &= (-x + z)e^{-r} \\ P(C_{4y})\phi(\mathbf{r}) &= (-x + z)e^{-r} \\ P(C_{4y}^{-1})\phi(\mathbf{r}) &= (x - z)e^{-r} \\ P(C_{2c})\phi(\mathbf{r}) &= (x + z)e^{-r} \\ P(C_{2d})\phi(\mathbf{r}) &= (-x - z)e^{-r} \end{aligned}$$

Comme les matrices des représentations irréductibles $\Gamma^1, \Gamma^2, \Gamma^3$ et Γ^4 sont de dimension 1, elles sont entièrement données en termes des caractères de la table 4 par $\Gamma^j(g) = (\chi^j(g))$ pour tout $g \in D_4$ et $j = 1, 2, 3, 4$.

Comme mentionné dans 1 en page 22, les matrices des RI de dimension 2 de Γ^5 peuvent être

choisie :

$$\begin{aligned}\Gamma^5(E) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & \Gamma^5(C_{2x}) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, & \Gamma^5(C_{2y}) &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \\ \Gamma^5(C_{2z}) &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & \Gamma^5(C_{4y}) &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, & \Gamma^5(C_{4y}^{-1}) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \Gamma^5(C_{2c}) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, & \Gamma^5(C_{2d}) &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Ainsi de l'équation (5.1), $\mathcal{P}_{11}^p \phi(r) = 0$ pour $p = 1, 2, 3, 4$, tandis que $\mathcal{P}_{11}^5 \phi(r) = xe^{-r}$. Donc Axe^{-r} (où $A = 1/c_1^5 = (xe^{-r}, xe^{-r})^{-\frac{1}{2}}$) est une fonction de base normée qui se transforme comme la première rangée de Γ^5 , sa partenaire qui se transforme comme la seconde ligne de Γ^5 est $\mathcal{P}_{21}^5(Axe^{-r})$, qui est égale à Aze^{-r} .

On verra que comme $P(g)e^{-r} = e^{-r}$ pour tout $g \in \mathcal{G}$, le facteur e^{-r} ne joue aucun rôle dans la construction autre que d'assurer la normalisation des fonctions de base. Il en découle que si e^{-r} est remplacé par n'importe quelle fonction $F(r)$ telle que $(xF(r), xF(r))$ est fini, alors $A'xF(r)$ et $A'zF(r)$ (où $A' = (xF(r), xF(r))^{-\frac{1}{2}}$) sont des fonctions de base orthonormées de Γ^5 qui se transforment comme la première et la seconde ligne respectivement. Clairement il n'y a aucun risque de confusion en étant moins précis et en disant que " x et z se transforment comme la première et la seconde ligne de Γ^5 ." Ces genres d'énoncés sont très fréquents dans la littérature.

Une analyse semblable appliquée à $\phi(r) = (xy + yz)e^{-r}$ montre que $\mathcal{P}_{11}^p \phi(r) = 0$ pour $p = 1, 2, 3, 4$, mais $\mathcal{P}_{11}^5 \phi(r) = yze^{-r}$. Ainsi $Byze^{-r}$ (où $B = 1/c_1^5 = (yze^{-r}, yze^{-r})^{-\frac{1}{2}}$) est une fonction de base normée qui se transforme comme la première ligne de Γ^5 . Sa partenaire qui se transforme comme la seconde ligne de Γ^5 est $\mathcal{P}_{21}^5(Byze^{-r})$, qui égale à $-Bxye^{-r}$. Encore une fois, de façon moins précise, on peut dire que yz et $-xy$ se transforment comme la première et la seconde ligne de Γ^5 respectivement.

La procédure de construction des fonctions de base qui vient d'être décrite nécessite la connaissance des éléments de matrice de la représentation et non pas seulement celle du système de caractères qui est généralement l'information donnée dans la littérature. En dehors du cas trivial des représentations de dimension 1 (auquel cas les éléments de matrices correspondent aux caractères) il faut une analyse plus profonde. Nous présentons maintenant une méthode qui s'applique dans ces cas.

Definition 2 (Projecteur de caractère)

Soit Γ^p une représentation irréductible de dimension d_p d'un groupe fini $\mathcal{G}$ de transformation de coordonnées d'ordre n , et soit $\chi^p(g)$ le caractère de $g \in \mathcal{G}$ dans Γ^p . On définit alors le projecteur de caractère pour Γ^p par

$$\mathcal{P}^p = \frac{d_p}{n} \sum_{g \in \mathcal{G}} \chi^p(g)^* P(g).$$

Clairement $\mathcal{P}^p$ peut se construire directement à partir de la table de caractère et

$$\mathcal{P}^p = \sum_{i=1}^{d_p} \mathcal{P}_{nn}^p,$$

de sorte que $\mathcal{P}^p$ a la propriété d'extraire d'une fonction $\phi(\mathbf{r})$ la somme de toutes les parties qui se transforment comme les lignes de Γ^p . Ceci implique que si $\mathcal{P}^p \phi(\mathbf{r})$ n'est pas identiquement nulle, elle est une combinaison linéaire des fonctions de base de Γ^p (qui sont actuellement indéterminées.)

Exemple 2 (Éléments de matrice des RI Γ^5 de D_4)

Prenons $\phi(\mathbf{r}) = zF(r)$, où $F(r)$ est une quelconque fonction de r telle que $\phi(\mathbf{r})$ est normalisable.

5.2 Représentations en produit direct

Le *produit direct* $A \otimes B$ d'une matrice A $m \times m$ et d'une matrice B $n \times n$ est une matrice $nm \times nm$ où lignes et les colonnes de $A \otimes B$ sont indiquées chacune par des paires d'indices telles que :

$$(A \otimes B)_{js,kt} = A_{jk}B_{st},$$

($1 \leq j, k \leq m; 1 \leq s, t \leq n$.) Le théorème suivant montre que cette définition permet la construction d'une *représentation en produit direct*, qui, par le théorème de Wigner-Eckart, joue un rôle majeur dans les applications de la théorie des groupes en mécanique quantique. On les appelle parfois "représentation en produit de Kronecker" ou "représentation en produit tensoriel".

Théorème 5.3

Si Γ^p et Γ^q sont deux représentations irréductibles unitaires d'un groupe $\mathcal{G}$ de dimension d_p et d_q respectivement, alors l'ensemble de matrices défini par :

$$\Gamma(g) = \Gamma^p(g) \otimes \Gamma^q(g),$$

pour tout $g \in \mathcal{G}$ forme une représentation de $\mathcal{G}$ de dimension $d_p d_q$. Le caractère $\chi(g)$ de $g \in \mathcal{G}$ dans cette représentation est donné par :

$$\chi(g) = \chi^p(g)\chi^q(g).$$

Preuve.

□

5.3 Le théorème de Wigner-Eckart pour les groupes de changements de coordonnées dans $\mathbb{R}^3$

Théorème 5.4

Supposons que $\mathcal{G}$ est un groupe de changement de coordonnées qui possède les représentations irréductibles Γ^p et Γ^q de dimension d_p et d_q respectivement, et $\phi_j^p(\mathbf{r})$, $j = 1, \dots, d_p$, et $\psi_s^q(\mathbf{r})$, $s = 1, \dots, d_q$, des fonctions de base de Γ^p et Γ^q respectivement. Alors l'ensemble des $d_p d_q$ fonctions $\phi_j^p(\mathbf{r})\psi_s^q(\mathbf{r})$ (où $j = 1, \dots, d_p$ et $s = 1, \dots, d_q$) forme une base pour la représentation en produit direct $\Gamma^p \otimes \Gamma^q$, pourvu qu'elles soient linéairement indépendantes.

Définition 3

Soit $Q_1^q, \dots, Q_{d_q}^q$ des opérateurs linéaires qui agissent sur les fonctions de l'espace de Hilbert L^2 et qui satisfont les relations :

$$P(g)Q_j^q P(g)^{-1} = \sum_{k=1}^{d_q} \Gamma^q(g)_{kj} Q_k^q$$

pour chaque $j = 1, \dots, d_q$ et chaque $g \in \mathcal{G}$ un groupe de changement de coordonnées, où Γ^q est une représentation irréductible de $\mathcal{G}$ de dimension d_q . Alors $Q_1^q, \dots, Q_{d_q}^q$ sont un ensemble d'*tenseurs opératoriels irréductibles* de la représentation irréductible Γ^q de $\mathcal{G}$.

Théorème 5.5 (Théorème de Wigner-Eckart pour les changements de coordonnées de $\mathbb{R}^3$)

Soit $\mathcal{G}$ un groupe de changement de coordonnées qui est soit un groupe fini ou un groupe de Lie compact. Soient Γ^p, Γ^q et Γ^r des représentations irréductibles de $\mathcal{G}$ de dimension d_p, d_q et d_r respectivement et soit $\phi_j^p(\mathbf{r})$, $j = 1, \dots, d_p$ et $\psi_l^r(\mathbf{r})$, $l = 1, \dots, d_r$ des fonctions de base pour Γ^p et Γ^r respectivement. Finalement soit Q_k^q , $k = 1 \dots, d_q$, des tenseurs irréductibles de Γ^q . Alors :

$$(\psi_l^r, Q_k^q \phi_j^p) = \sum_{\alpha=1}^{n_{pq}^r} \left(\begin{matrix} p & q & r \\ k & j & l \end{matrix} \middle| \alpha \right)^* (r|Q^q|p)_\alpha$$

pour tout $j = 1, \dots, d_p$, $k = 1, \dots, d_q$ et $l = 1, \dots, d_r$, où $(r|Q^q|p)_\alpha$ forment l'ensemble des n_{pq}^r "éléments de matrice réduits" qui sont indépendants de j, k et l .

5.4 Généralisation du théorème de Wigner-Eckart

5.5 Représentations de groupes produits directs

5.6 Représentations irréductibles de groupes abéliens finis

5.7 Représentations induites

5.8 Réalité des représentations

Chapitre 6

Théorie des Groupes dans les calculs de Mécanique Quantique

6.1 La solution de l'équation de Schrödinger

6.2 Probabilités de transition et règles de sélection

6.3 Théorie de perturbation indépendante du temps

6.4 Généralisation aux particules de spin $\frac{1}{2}$

6.5 Symmétrie d'inversion du temps

Chapitre 7

Le rôle des algèbres de Lie

7.1 La fonction exponentielle

Definition 1

Soit $\mathbf{A}$ une matrice $m \times m$, on définit l'exponentielle de $\mathbf{A}$ par :

$$\exp \mathbf{A} = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^i}{i!}.$$

Théorème 7.1

La série de la définition ci-dessus converge pour toute matrice $\mathbf{A}$.

Théorème 7.2

a) Soit $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ deux matrices qui commutent, alors

$$\exp \mathbf{A} \exp \mathbf{B} = \exp (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \exp \mathbf{B} \exp \mathbf{A}.$$

b) Soit $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ deux matrices dont les éléments sont “suffisamment” petits, alors

$$\exp \mathbf{A} \exp \mathbf{B} = \exp \mathbf{C},$$

où :

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} + \frac{1}{2}[\mathbf{A}, \mathbf{B}] + \frac{1}{12}\{[\mathbf{A}, [\mathbf{A}, \mathbf{B}]] + [\mathbf{B}, [\mathbf{B}, \mathbf{A}]]\} + \dots.$$

La série ci-dessus contient des commutateurs d'ordre de plus en plus élevés, elle est connue sous le nom de “Formule de Campbell-Baker-Hausdorff”.

Proposition 7.3

La fonction exponentielle d'une matrice $m \times m$ jouit des propriétés suivantes :

- a) $(\exp \mathbf{A})^* = \exp(\mathbf{A}^*)$.
- b) La matrice transposée de $\exp \mathbf{A}$ est $\exp \tilde{\mathbf{A}}$.
- c) $(\exp \mathbf{A})^\dagger = \exp(\mathbf{A}^\dagger)$.
- d) Pour toute matrice $m \times m$ régulière $\mathbf{S}$

$$\exp(\mathbf{SAS}^{-1}) = \mathbf{S}(\exp \mathbf{A})\mathbf{S}^{-1}.$$

- e) Si $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ sont les valeurs propres de $\mathbf{A}$, alors $e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_m}$ sont les valeurs propres de $\exp \mathbf{A}$.
- f) $\det(\exp \mathbf{A}) = \exp(\text{tr} \mathbf{A})$.
- g) $\exp \mathbf{A}$ est toujours régulière et

$$(\exp \mathbf{A})^{-1} = \exp(-\mathbf{A}).$$

- h) L'application $\phi(\mathbf{A}) = \exp \mathbf{A}$ est une application biunivoque et continue d'un petit voisinage de la matrice $m \times m$ nulle, $\mathbf{0}$, sur un petit voisinage de la matrice unité $m \times m$, $\mathbf{1}$.

Preuve.

□

7.2 Sous-groupes à un paramètre

Définition 2

Un *sous-groupe à un paramètre* d'un groupe de Lie $\mathcal{G}$ est un sous-groupe de Lie de $\mathcal{G}$ composé d'éléments $g(t)$ qui dépendent d'une variable réelle t qui prend les valeurs $-\infty < t < \infty$ et tels que :

$$g(t)g(s) = g(t+s),$$

pour tout $-\infty < s, t < \infty$.

Clairement $g(t)g(s) = g(s)g(t)$ pour tout s, t , ainsi tout sous-groupe à un paramètre est abélien. De plus la définition implique que $g(0) = e$ (il suffit de poser $s = 0$). Il est évident qu'un sous-groupe à un paramètre est un groupe de Lie de dimension 1, ainsi dans le cas d'un groupe de matrices $\mathbf{A}$, $\frac{d\mathbf{A}}{dt}|_{t=0}$ existe et n'est pas identiquement nul.

Théorème 7.4

Tout sous-groupe à un paramètre d'un groupe de Lie de matrices, $\mathcal{G}$, $m \times m$ est formé par l'exponentiation de matrices $m \times m$. En particulier si $\mathbf{A}(t)$ forme un tel sous-groupe de $\mathcal{G}$ alors :

$$\mathbf{A}(t) = e^{\mathbf{a}t},$$

où $\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{A}}{dt}|_{t=0}$.

Preuve.

□

7.3 Algèbres de Lie

Definition 3 (Algèbre de Lie réelle)

Une *algèbre de Lie réelle* $\mathcal{L}$ de dimension $n \geq 1$ est un espace vectoriel réel de dimension n muni d'un *produit de Lie* ou *commutateur* $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ défini pour tout $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{L}$ et tel que :

1. $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] \in \mathcal{L}$ pour tout $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{L}$;
2. $[\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b}, \mathbf{c}] = \alpha [\mathbf{a}, \mathbf{c}] + \beta [\mathbf{b}, \mathbf{c}]$, pour tout $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathcal{L}$ et pour tous nombres réels α, β ;
3. $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = -[\mathbf{b}, \mathbf{a}]$ pour tout $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{L}$;
4. pour tout $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathcal{L}$ on a l'*identité de Jacobi* :

$$[\mathbf{a}[\mathbf{b}, \mathbf{c}]] + [\mathbf{b}, [\mathbf{c}, \mathbf{a}]] + [\mathbf{c}, [\mathbf{a}, \mathbf{b}]] = 0.$$

Dans le cas des matrices, le commutateur sera toujours défini par :

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \mathbf{ab} - \mathbf{ba},$$

et les conditions précédentes sont automatiquement vérifiées. De la même manière le commutateur d'une algèbre de Lie d'opérateurs linéaire sera toujours défini par :

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}]\phi = \mathbf{ab}\phi - \mathbf{ba}\phi,$$

pour toute paire d'opérateurs $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ et pour tout élément ϕ de l'espace vectoriel dans lequel ils agissent.

Supposons que $a_1, \dots, a_n$ est une base de l'espace vectoriel $\mathcal{L}$. Comme $[a_p, a_q] \in \mathcal{L}$ pour tout $p, q = 1, \dots, n$, il existe un ensemble de n^3 nombres c_{pq}^r , nommés les *constantes de structures* de $\mathcal{L}$ relativement à la base $a_1, \dots, a_n$ définies par :

$$[a_p, a_q] = \sum_{r=1}^n c_{pq}^r a_r, \quad p, q = 1, 2, \dots, n,$$

et la condition 3 de la définition 3 implique que $c_{pq}^r = -c_{qp}^r$, et la condition 4 implique que :

$$c_{pq}^r c_{sr}^t + c_{qs}^r c_{pr}^t + c_{sp}^r c_{qr}^t = 0$$

donc ces constantes ne sont pas indépendantes. Si $\mathbf{a} = \sum_{p=1}^n \alpha^p \mathbf{a}_p$ et $\mathbf{b} = \sum_{q=1}^n \beta^q \mathbf{a}_q$ sont deux éléments de $\mathcal{L}$ avec les α^p, β^q réels, alors

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \sum_{p,q,r=1}^n \alpha^p \beta^q c_{pq}^r \mathbf{a}_r.$$

Ainsi tous les commutateurs peuvent être calculés par la seule connaissance des constantes de structure.

Nous verrons au chapitre 10 que la détermination des fonctions de bases des représentations irréductibles du groupe des rotations propres dans $\mathbb{R}^3$ peut se réduire à la construction des fonctions propres simultanées des opérateurs de moment cinétique L_z et $L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$.

Definition 4

Une *algèbre de Lie complexe* de dimension n est un espace vectoriel complexe de dimension n muni d'un *produit de Lie* ou *commutateur* possédant les propriétés de la définition 3 avec cette fois α et β des nombres complexes.

Dans ce cas les constantes de structures c_{pq}^r peuvent être complexes, et les considérations ci-dessus s'étendent trivialement. En partant d'une algèbre de Lie réelle de dimension n il est possible de *complexifier* l'algèbre en prenant toutes les combinaisons linéaires réelles et complexes des éléments de cette algèbre. On obtient ainsi une algèbre de Lie complexe de dimension (complexe) n , avec les mêmes éléments de base..

Definition 5

Une algèbre de Lie $\mathcal{L}$ est dite *abélienne* si $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = 0$, pour tout $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{L}$.

Dans une algèbre de Lie abélienne (ou *commutative*) toutes les constantes de structure sont nulles.

7.4 Algèbres de Lie réelles pour groupes de Lie généraux

7.4.1 Existence d'une algèbre de Lie réelle $\mathcal{L}$ pour tout groupe de Lie $\mathcal{G}$

7.4.2 Relation entre l'algèbre de Lie réelle $\mathcal{L}$ et les sous-groupes à un paramètre de $\mathcal{G}$

7.5 Fonctions de poids pour intégrales invariantes

Chapitre 8

Relations entre les groupes de Lie et les algèbres de Lie

8.1 Sous-algèbres d'une algèbre de Lie

Definition 1

Une *sous-algèbre* $\mathcal{L}'$ d'une algèbre de Lie $\mathcal{L}$ est un sous-ensemble de $\mathcal{L}$ qui forme une algèbre de Lie avec le même commutateur et le même corps que $\mathcal{L}$.

Cette définition implique que $\mathcal{L}'$ est réelle si $\mathcal{L}$ est réelle et complexe si $\mathcal{L}$ est complexe. De plus $\mathcal{L}'$ est dite une sous-algèbre *propre* si au moins un élément de $\mathcal{L}$ n'est pas inclu dans $\mathcal{L}'$. Dans ce cas la dimension de $\mathcal{L}'$ est inférieure à celle de $\mathcal{L}$.

Definition 2

Une sous-algèbre $\mathcal{L}'$ d'une algèbre de Lie $\mathcal{L}$ est dite *invariante* si pour tout $\mathbf{a} \in \mathcal{L}'$ et pour tout $\mathbf{b} \in \mathcal{L}$ on a $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] \in \mathcal{L}'$.

On dit aussi d'une sous-algèbre invariante que c'est un *idéale*.

Théorème 8.1

Si $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}'$ sont des groupes de Lie, $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}'$ sont leur algèbre de Lie respective et si $\mathcal{G}'$ est un sous-groupe de $\mathcal{G}$, alors $\mathcal{L}'$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}$. De plus si $\mathcal{G}'$ est un sous-groupe invariant de $\mathcal{G}$, alors $\mathcal{L}'$ est une sous-algèbre invariante (un idéal) de $\mathcal{L}$. $\square$

Théorème 8.2

Soit $\mathcal{L}$ une algèbre de Lie *réelle* d'un groupe de Lie $\mathcal{G}$. Alors toute sous-algèbre de Lie de $\mathcal{L}$ est l'algèbre de Lie d'exactly un sous-groupe de Lie connexe de $\mathcal{G}$. $\square$

Si $\mathcal{L}'$ et $\mathcal{L}''$ sont deux sous-espaces d'une algèbre de Lie $\mathcal{L}$, on dénotera par $[\mathcal{L}', \mathcal{L}'']$ le sous-ensemble de $\mathcal{L}$ composé de toutes les combinaisons linéaires d'éléments de la forme $[\mathbf{a}', \mathbf{a}'']$ où $\mathbf{a}' \in \mathcal{L}'$ et $\mathbf{a}'' \in \mathcal{L}''$.

Théorème 8.3

Si $\mathcal{L}'$ et $\mathcal{L}''$ sont des idéaux de $\mathcal{L}$, alors $[\mathcal{L}', \mathcal{L}'']$ est aussi un idéal de $\mathcal{L}$ (ou bien c'est le sous-espace trivial constitué uniquement de l'élément $0 \in \mathcal{L}$). $\square$

8.2 Homomorphismes et isomorphismes d'algèbres de Lie

Ce qui suit s'applique également aux algèbres de Lie réelles ou complexes. Les concepts de cette sections sont, en essence, les mêmes que pour les groupes, nous allons définir des applications qui vont préserver la structure des algèbres.

Definition 3

Soit ψ une application d'une algèbre de Lie $\mathcal{L}$ sur une algèbre de Lie $\mathcal{L}'$ sur un même corps et telle que :

i) pour tout $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{L}$ et tout $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$

$$\psi(\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b}) = \alpha \psi(\mathbf{a}) + \beta \psi(\mathbf{b}),$$

ii) et pour tout $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{L}$

$$\psi([\mathbf{a}, \mathbf{b}]) = [\psi(\mathbf{a}), \psi(\mathbf{b})].$$

alors ψ est un *homomorphisme d'algèbre de Lie* de $\mathcal{L}$ sur $\mathcal{L}'$.

Definition 4

Un homomorphisme d'algèbre de Lie de $\mathcal{L}$ sur $\mathcal{L}'$ est dit un *isomorphisme d'algèbre de Lie* s'il est bijectif.

Dans le cas particulier où $\mathcal{L}'$ est identique à $\mathcal{L}$, un isomorphisme d'algèbre de Lie est dénommé un *automorphisme d'algèbre de Lie*. En définissant le produit de deux automorphismes par $(\phi\psi)(\mathbf{a}) = \phi(\psi(\mathbf{a}))$, quel que soit $\mathbf{a} \in \mathcal{L}$, l'ensemble de tous les automorphismes de $\mathcal{L}$ forme un groupe qui est désigné par $\mathcal{A}ut(\mathcal{L})$.

Théorème 8.4

Soit ψ un homomorphisme de l'algèbre de Lie $\mathcal{L}$ sur l'algèbre de Lie $\mathcal{L}'$, définis sur le même corps $\mathbb{K}$. Alors $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}'$ ont même dimension si et seulement si ψ est un isomorphisme.

Preuve.

$\square$

8.3 Représentation des algèbres de Lie

8.4 Représentation adjointe des algèbres de Lie et des groupes de Lie

8.5 Somme directe d'algèbres de Lie

8.6 Groupes de recouvrement universel

Chapitre 9

Structure des algèbres de Lie semi-simples

9.1 Forme de Killing et critère de Cartan

Les développements qui suivent s'appliquent aussi bien aux algèbres de Lie réelles que complexes (sauf mention explicite du contraire). La relation entre les algèbres de Lie réelles et complexes sera étudiée dans la section suivante, en particulier pour les cas simples et semi-simples.

Definition 1

Une algèbre de Lie est dite *simple* si elle n'est pas abélienne et ne possède pas de sous-algèbre de Lie invariante propre.

Definition 2

Une algèbre de Lie est dite *semi-simple* si elle ne possède pas de sous-algèbre invariante abélienne.

Les définitions impliquent que si $\mathcal{L}$ est simple, alors elle est forcément semi-simple. La réciproque n'est pas vraie. Si $\mathcal{L}$ est abélienne, elle n'est ni simple ni semi-simple. Et comme toute algèbre de Lie de dimension 1 est abélienne, les algèbres de Lie simples et semi-simple doivent avoir une dimension supérieure ou égale à 2.

9.2 Complexification

9.3 Sous-algèbre de Cartan et racines des algèbres de Lie complexes semi-simples

Chapitre 10

Groupe des rotations dans $\mathbb{R}^3$

10.1 Révisions de quelques propriétés

10.2 Les structures de classe de $SU(2)$ et $SO(3)$

10.3 Représentations des algèbres de Lie $su(2)$ et $so(3)$

10.4 Représentations des groupes de Lie $SU(2)$, $SO(3)$ et $O(3)$

Bibliographie

- [1] J.F. Cornwell, *Group theory in physics*, vol. 3, Academic Press, 1989.
- [2] ———, *Group theory in physics*, vol. 1, Academic Press, 1994.
- [3] ———, *Group theory in physics*, vol. 2, Academic Press, 1995.
- [4] A. Haar, Ann. Math. **34** (1933), 147–169.