Fluid Dynamics

G. Pasa

10 décembre 2015

Table des matières

Chapitre 1

Navier-Stokes

Dans un liquide de masse volumique ρ et de viscosité ν, l'équation d'évolution de la vitesse du fluide en chaque point de celui-ci est donnée par l'équation de *Navier-Stokes*

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{v}$$

où ∇p est la gradient de pression au point concerné. Le champ de vitesse $\mathbf{v}$ dépend du point considéré et du temps

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}; t)$$

et $\mathbf{r} = (x, y, z)^t$.

1.1 Cas stationnaire

Dans le cas stationnaire, on a

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{v} = 0$$

d'où

$$\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{v}.$$

Supposons $\mathbf{G} = \frac{1}{\rho}\nabla p$ constant. On obtient

$$\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\mathbf{G} + \nu \nabla^2 \mathbf{v}.$$

si, de plus $\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = 0$, autrement dit, v varie orthogonalement à v lui-même, on obtient

$$\mathbf{G} = \nu \nabla^2 \mathbf{v}.$$

1.1.1 Écoulement de Poiseuille

C'est un écoulement entre deux plans parallèles, orthogonaux à la direction z. La configuration présente une symétrie de translation dans les directions x et y, de sorte que

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_x = 0 \\ v_y \\ v_z = 0 \end{pmatrix}$$

où l'on a choisit Oy comme la direction de l'écoulement. Á cause de la symétrie du problème, on voit que v_y ne dépend que de z

$$v_y = v_y(z).$$

Enfin le vecteur gradient de pression est nul, sauf dans la direction y

$$\mathbf{G} = \frac{1}{\rho} \begin{pmatrix} 0 \\ \partial_y p \\ 0 \end{pmatrix}.$$

De plus l'écoulement est laminaire et $v \cdot \nabla v = 0$. On obtient alors

$$G = \nu v_y''$$

avec $v_y'' = \frac{\partial^2}{\partial z^2} v_y$. On obtient

$$v_y = \frac{1}{2} \frac{G}{\nu} z^2 + Cz + K$$

où C et K sont des constantes d'intégration, qu'il faudra fixer pour s'accorder aux conditions initiales.

Pour l'écoulement de Poiseuille la vitesse du fluide en contact avec les plans est nulle. Les conditions aux limites sont

$$v_y(0) = 0 \qquad v_y(D) = 0.$$

et le profil des vitesses est alors donné par

$$v_y(z) = \frac{G}{2\nu} z(z - D)$$

soit

$$\boxed{v_y(z) = \frac{\partial_y p}{2\rho\nu} z(z - D).}$$

1.1.2 Écoulement de Couette

L'écoulement de Couette est caractérisé par les conditions aux limites

$$v_y(0) = 0 \qquad v_y(D) = v_0,$$

dues au fait que le plan inférieur est immobile, tandis que le fluide est entrainé par le mouvement du plan supérieur à la vitesse v_0 dans la direction y et dans le sens positif ou négatif, selon le signe de v_0.

On a alors, de la première condition aux bords

$$K = 0$$

et de la deuxième

$$v_y(D) = v_0 = \frac{G}{2\nu}D^2 + CD$$

d'où

$$C = \frac{v_0}{D} - \frac{G}{2\nu}D$$

de sorte que

$$v_y(z) = \frac{G}{2\nu}z(z-D) + \frac{v_0}{D}z$$

soit

$$\boxed{v_y(z) = \frac{\partial_y p}{2\rho\nu}z(z-D) + \frac{v_0}{D}z}.$$

1.1.3 Écoulement dans un tube

L'écoulement dans un tube de rayon R est spécifié par la symétrie cylindrique du tube et les conditions aux bords du tube

$$\mathbf{v}(r = R, \theta, z; t) = 0$$

où z est l'abscisse le long du tube, r indique l'écart par rapport à la ligne centrale du tube et θ est la position azimutale par rapport à une direction orthogonale à l'axe du tube.

Si l'on prend en compte la symétrie cylindrique du problème à l'état stationaire, on pose que $v_\theta = 0$, $v_r = 0$ et $v_z = v_z(r)$. Ainsi seule la composante z du laplacien est non nulle s'écrit

$$\nabla^2 v_z = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}v_z\right).$$

L'équation de Navier-Stokes dans le cas stationaire devient

$$\frac{G}{\nu} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}v_z\right)$$

soit

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}v_z\right) = \frac{G}{\nu}r$$

et

$$r\frac{\partial}{\partial r}v_z = \frac{1}{2}\frac{G}{\nu}r^2 + C_1$$

d'où

$$\frac{\partial}{\partial r}v_z(r) = \frac{1}{2}\frac{G}{\nu}r + \frac{C_1}{r}.$$

Ainsi

$$v_z(r) = \frac{1}{4}\frac{G}{\nu}r^2 - \frac{C_1}{2r^2} + C_2.$$

Or, si $r \to 0$ le second terme diverge, à moins que $C_1 = 0$

$$v_z(r) = \frac{1}{4}\frac{G}{\nu}r^2 + C_2.$$

Enfin, si $r = R$ il faut que $v_z = 0$

$$0 = \frac{1}{4}\frac{G}{\nu}R^2 + C_2 \qquad C_2 = -\frac{1}{4}\frac{G}{\nu}R^2.$$

Finalement, le profil de vitesse à l'état stationaire, dans le tube est

$$v_z(r) = \frac{1}{4}\frac{G}{\nu}(r^2 - R^2)$$

soit

$$\boxed{v_z(r) = \frac{1}{4}\frac{\partial_z p}{\rho\nu}(r^2 - R^2).}$$

En posant $v_0 = -\frac{1}{4}\frac{\partial_z p}{\rho\nu}R^2$, on a

$$v_z(r) = v_0(1 - \frac{r^2}{R^2})$$

ce qui représente un profil de vitesse parabolique, qui décroît du centre vers les parois du tube, pour s'annuler sur les parois.