Quantum

Guglielmo Pasa

2 janvier 2020

Table des matières

Préface

Introduction

La première partie considère le modèle standard des particules élémentaires selon l'approche des champs classiques comme on la trouve présentée dans [Qui97].

Dans un deuxième temps, ces champs seront quantifiés [Ryd96][PS95][BD64, BD65][AH93].

Pour une initiation aux aspects pratique du calcul des amplitudes de transitions cf. [Gri87].

0.1 Conventions

On utilise la convention

$$g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(+1, -1, -1, -1).$$

0.1.1 Matrices de Pauli

Les matrices de Pauli sont déterminées par la relation de commutation

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\epsilon_{ijk}\sigma_k.$$

La représentation dans laquelle σ_3 est diagonale est

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

0.1.2 Matrices de Dirac

Les matrices de Dirac doivent vérifier les relations d'anti-commutation

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}.$$

de sorte que l'équation de Dirac soit compatible avec l'équation de Klein-Gordon.

Dans la *représentation standard*, les matrices de Dirac sont

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix},$$

et

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \gamma_5.$$

où ($1 = 1_{2\times 2}$ est la matrice unité de dimension 2).

Dans la représentation chirale des matrices de Dirac

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \gamma_5.$$

De plus

$$\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0, \qquad \text{et} \qquad (\gamma^5)^2 = 1$$

0.1.3 Calculs avec des spineurs

Rappelons encore que

$$\begin{aligned} \text{tr } (1_{4\times 4}) &= 4 \\ \text{tr } (\not{a}\not{b}) &= 4a\cdot b \\ \text{tr } (\not{a}\not{b}\not{c}\not{d}) &= 2a\cdot b\,\text{tr } (\not{c}\not{d}) - \text{tr } (\not{b}\not{a}\not{c}\not{d}) \\ \text{tr } (\not{a}_1\not{a}_2\dots\not{a}_{2n+1}) &= 0 \end{aligned}$$

La convention de normalisation des spineurs de Dirac de masse m suit celle de Peskin et Scrhœder dans [PS95]

$$\bar{u}u = 2mc^2, \qquad \text{et} \qquad \bar{v}v = -2mc^2$$

de sorte que l'on a les projecteur d'énergie positive (avec $E^2 = m^2c^4 + p^2c^2$)

$$P_+ = \sum_{i=1,2} u^{(i)}\bar{u}^{(i)} = \not{p} + mc^2$$

et négative

$$P_- = \sum_{i=1,2} v^{(i)}\bar{v}^{(i)} = \not{p} - mc^2.$$

Première partie

Champs classiques

Chapitre 1

Classical fields

1.1 Non-relativistic wave equation

The classical motion of a particle in a potential V is described by the hamiltonian

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(q)$$

For a given momentum p and position q, the hamiltonian gives the energy of the particle

$$E = H(p, q)$$

The quantum description of this system is obtained with the substitutions $E \to i\hbar\partial_t$ and $p \to \frac{\hbar}{i}\nabla$ in that relation

$$i\hbar\frac{d}{dt}\psi = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\triangle + V(q)\right)\psi$$

applied on a wave function $\psi(q,t)$ that describes the state of the system. This is the Schrœdinger equation.

1.1.1 Coulomb potential

Let's consider the case of the Coulomb potential $V(r) = -\frac{Ze^2}{r}$ between an electron of charge $-e$ (e positive) and a nucleus of charge Ze.

The Schrœdinger equation now reads

$$i\hbar\frac{d}{dt}\psi = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\triangle - \frac{Ze^2}{r}\right)\psi$$

Looking for a stationary solution $\psi = Ae^{-i\frac{Et}{\hbar}}F(r,\theta,\phi)$ we get

$$EF = -\frac{\hbar^2}{2m}\triangle F - \frac{Ze^2}{r}F$$

With

$$\triangle = \frac{1}{r^2}\partial_r(r^2\partial_r) - \frac{L^2}{\hbar^2 r^2}$$

with L^2 the square of the angular momentum operator that is diagonalized by the spherical harmonics

$$L^2 Y_\ell^m = \hbar^2\ell(\ell+1)Y_\ell^m$$

, we can write $F = R(r)Y_\ell^m(\theta, \phi)$, and we gets

$$ER = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{r^2}\partial_r(r^2\partial_r)R + \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\ell(\ell+1)}{r^2}R - \frac{Ze^2}{r}R$$

Letting $\epsilon = \frac{2mE}{\hbar^2}$, $\mu = \frac{mc^2}{\hbar c}$, $\alpha = \frac{e^2}{\hbar c}$, we get

$$\epsilon R = -\frac{1}{r^2}(r^2 R')' + \left(\frac{\ell(\ell+1)}{r^2} - \frac{2Z\alpha\mu}{r}\right) R$$

Let $R = \frac{w}{r}$, then $R' = \frac{w'}{r} - \frac{w}{r^2}$ and $(r^2R')' = (rw' - w)' = rw''$. So the radial equation reads

$$\epsilon \frac{w}{r} = -\frac{1}{r}w'' + \left(\frac{\ell(\ell+1)}{r^2} - \frac{2Z\alpha\mu}{r}\right)\frac{w}{r}$$

that is

$$\epsilon w = -w'' + \left(\frac{\ell(\ell+1)}{r^2} - \frac{2Z\alpha\mu}{r}\right) w$$

The asymptotic behaviour as $r \to \infty$ reduces to

$$w'' + \epsilon w = 0$$

for which, if ϵ is negative (a bound state) then $\epsilon = -\omega^2$, and

$$w \propto c_- e^{-\omega r} + c_+ e^{\omega r}$$

For a square integrable wave-function we must have $c_+ = 0$, so

$$w = K e^{-\omega r} u(r)$$

So $w' = K(-\omega u + u')e^{-\omega r}$ and $w'' = K(u'' - 2\omega u' + \omega^2 u)e^{-\omega r}$. Replacing into the equation for w we get

$$-\omega^2 u = -u'' + 2\omega u' - \omega^2 u + \left(\frac{\ell(\ell+1)}{r^2} - \frac{2Z\alpha\mu}{r}\right) u$$

that is

$$u'' - 2\omega u' - \left(\frac{\ell(\ell+1)}{r^2} - \frac{2Z\alpha\mu}{r}\right) u = 0.$$

We can find a polynomial solution by letting

$$u = r^s \sum_k c_k r^k = \sum_k c_k r^{s+k}$$

then

$$u' = \sum_k (s+k) r^{s+k-1}, \qquad u'' = \sum_k (s+k)(s+k-1) r^{s+k-2}$$

The equation becomes

$$\sum_k c_k \Big(\big((s+k)(s+k-1) - \ell(\ell+1)\big) r^{s+k-2} \\ - 2\big(\omega(s+k) - Z\alpha\mu\big) r^{s+k-1} \Big) = 0$$

For this equation to be valid for all r, each factor must be equal to zero. Let's rewrite this in powers of r

$$\begin{aligned}
&c_0\big(s(s-1)-\ell(\ell+1)\big)r^{s-2}\\
&\quad+\left(c_1\big((s+1)s-\ell(\ell+1)\big)-2\big(\omega s-Z\alpha\mu\big)c_0\right)r^{s-1}\\
&\quad+\quad\ldots\\
&\quad+\left(c_{k+1}\big((s+k+1)(s+k)-\ell(\ell+1)\big)-2\big(\omega(s+k)-Z\alpha\mu\big)\right)r^{s+k-1}\\
&\quad+\quad\ldots\\
&\quad=0
\end{aligned}$$

The term in r^{s-2} gives the value of s

$$s(s-1)-\ell(\ell+1)=0$$

so

$$s=\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{(2\ell+1)^2}=\begin{cases}-\ell\\ \ell+1\end{cases}$$

The negative root $s=-\ell$ must be discarded as it makes R diverge as $r\to 0$, so

$$s=\ell+1.$$

The vanishing of the other terms give the recurrence relation between the coefficients

$$c_{k+1}=2\frac{\omega(s+k)-Z\alpha\mu}{(s+k)(s+k+1)-\ell(\ell+1)}c_k$$

So $c_{k'+1}=0$ if

$$\omega(s+k')=Z\alpha\mu$$

for which

$$\omega^2 = -\epsilon = \frac{Z^2\alpha^2\mu^2}{(s+k')^2}$$

We have then

$$\epsilon = -\frac{Z^2\alpha^2\mu^2}{(\ell+k'+1)^2}$$

With $n = \ell + k' + 1$ we have finally

$$\boxed{E_n = -Z^2\frac{(\alpha mc^2)^2}{2n^2}}$$

since $0 \leqslant k'$, then $1 \leqslant n$, and $0 \leqslant \ell \leqslant n$.

Eigenfunctions

For a given value of n and ℓ, we have $0 \leqslant k \leqslant n - \ell$. and

$$\omega = \frac{Z\alpha\mu}{n}$$

So the coefficients a determined by

$$c_{k+1} = 2Z\alpha\mu\frac{\frac{\ell+1+k}{n} - 1}{(\ell+k+2)(\ell+k+1) - \ell(\ell+1)}c_k$$

that is

$$c_{k+1} = 2Z\alpha\mu\frac{k-k'}{n((2\ell+k+2)(k+1))}c_k$$

Let $\rho = \frac{r}{r_{Z,n}}$ where $r_{Z,n} = \frac{n}{2Z\alpha\mu}$, then

$$\boxed{u = r^{\ell+1} \sum_{k=0}^{k'} c'_k \rho^k}$$

with

$$\boxed{c'_{k+1} = \frac{k-k'}{(2\ell+k+2)(k+1)} c'_k}$$

with $c_0 = \binom{n+\ell}{2\ell+1}$, the expression

$$L^{2\ell+1}_{n-\ell-1} = \sum_k c'_k \rho^k$$

gives the generalized Laguerre polynomials in ρ, so

$$w_{n,\ell}(\rho) = e^{-\rho} \rho^\ell L^{2\ell+1}_{n-\ell-1}(\rho).$$

Laguerre polynomials

We will next give the expressions for the first few generalized Laguerre polynomials in the form $u_{n\ell} = e^{\omega\rho} w_{n\ell}$.

- Take $n = 1$ and $\ell = 0$, then $k' = 0$ and

$$\boxed{u_{1,0}(\rho) = 1}$$

- For $n = 2$ and $\ell = 0$, then $k' = 1$ and

$$c_0 = 2, \quad c_1 = 2\frac{-1}{2} = -1$$

so that

$$\boxed{u_{2,0}(\rho) = 2 - \rho}$$

For $n = 2$ and $\ell = 1$, we have $k' = 0$ and

$$\boxed{u_{2,1} = \rho}$$

- $n = 3$
  For $\ell = 0$ we have $k' = 2$ and

$$c_0 = 3, \quad c_1 = 3\frac{-2}{2} = -3, \quad c_2 = -3\frac{-1}{3 \cdot 2} = \frac{1}{2}$$

and

$$\boxed{u_{3,0}(\rho) = 3 - 3\rho + \frac{\rho^2}{2}}$$

For $\ell = 1$, $k' = 1$ and

$$c_0 = 4, \quad c_1 = 4\frac{-1}{4} = -1$$

and

$$\boxed{u_{3,1}(\rho) = \rho(4 - \rho)}$$

For $\ell = 2$, $k' = 0$, and

$$\boxed{u_{3,2}(\rho) = \rho^2}.$$

- $n = 4$
  For $\ell = 0$ we have $k' = 3$

$$c_0 = 4, \quad c_1 = 4\frac{-3}{2} = -6, \quad c_2 = -6\frac{-2}{6} = 2, \quad c_3 = 2\frac{-1}{12} = -\frac{1}{6}$$

and

$$\boxed{u_{4,0} = 4 - 6\rho + 2\rho^2 - \frac{\rho^3}{6}}$$

For $\ell = 1$, $k' = 2$ and

$$c_0 = 10, \quad c_1 = 10\frac{-2}{4} = -5, \quad c_2 = -5\frac{-1}{10} = -\frac{1}{2}$$

and

$$\boxed{u_{4,1} = \rho(10 - 5\rho + \frac{\rho^2}{2})}$$

For $\ell = 2$, $k' = 1$ and

$$c_0 = 6, \quad c_1 = 6\frac{-1}{6} = -1$$

and

$$\boxed{u_{4,2} = \rho^2(6 - \rho)}$$

For $\ell = 3$, $k' = 0$ and

$$\boxed{u_{4,3} = \rho^3}$$

- Finally for $n = 5$. For $\ell = 0$ $k' = 4$ and

$$c_0 = 5, \quad c_1 = -10, \quad c_2 = 5, \quad c_3 = -\frac{5}{6}, \quad c_4 = \frac{1}{24}$$

and

$$\boxed{u_{5,0} = 5 - 10\rho + 5\rho^2 - \frac{5}{6}\rho^3 + \frac{\rho^4}{24}}$$

For $\ell = 1$ $k' = 3$ and

$$c_0 = 20, \quad c_1 = -15, \quad c_2 = 3, \quad c_3 = -\frac{1}{6}$$

and

$$\boxed{u_{5,1} = \rho(20 - 15\rho + 3\rho^2 - \frac{\rho^3}{6})}$$

For $\ell = 2$ $k' = 2$ and

$$c_0 = 21, \quad c_1 = 21\frac{-2}{6} = -7, \quad c_2 = -7\frac{-1}{14} = \frac{1}{2}$$

and

$$\boxed{u_{5,2} = \rho^2(21 - 7\rho + \frac{\rho^2}{2})}$$

For $\ell = 3$ $k' = 1$ and

$$c_0 = 8, \quad c_1 = 8\frac{-1}{8} = -1$$

and

$$\boxed{u_{5,3} = \rho^3(8 - \rho)}$$

For $\ell = 4$ $k' = 0$ and

$$\boxed{u_{5,4} = \rho^4}$$

Eigenstates

We can then write the general solution for a given n, ℓ pair as

$$\psi_{n,\ell}(r, \theta, \phi, t) = Ae^{-i\frac{E_n t}{\hbar}} e^{-\rho}\rho^\ell L^{2\ell+1}_{n-\ell-1}(\rho) Y^m_\ell(\theta, \phi)$$

with $\rho = \frac{r}{r_{Z,n}}$.

Using $\rho_0 = \frac{r}{r_{Z,0}}$ we have

$$\psi_{n,\ell}(r,\theta,\phi,t) = Ae^{-i\frac{E_n t}{\hbar}} e^{-\frac{\rho_0}{n}} \left(\frac{\rho_0}{n}\right)^{\ell} L^{2\ell+1}_{n-\ell-1}\left(\frac{\rho_0}{n}\right) Y^m_\ell(\theta,\phi)$$

The eigenstates are degenerate in ℓ and m.

$$E_{n,\ell} = E_n.$$

The m degeneracy is due to the invariance under rotations of the hamiltonian. This is lifted under a magnetic field which breaks that symmetry (Zeeman effect).

Let's calculate the firsts eigenfunctions

1s : Let $n = 1$ (first level), then $\ell = 0$ (s orbital), and $k' = 0$. For $\ell = 0$, $m = 0$ and $Y^0_0 = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}$. The state is name $1s$ and the eigenfunction is

$$\boxed{\psi_{1s} = A_{1s} e^{-i\frac{E_1 t}{\hbar}} e^{-\frac{r}{r_0}}}$$

with

$$E_1 = Z^2\frac{(\alpha mc^2)^2}{2}, \qquad r_0 = \frac{Z\alpha mc}{\hbar},$$

and A_{1s} is a normalization factor.

2s : Let $n = 2$, and $\ell = 0$, then $k' = 1$. Take $c_0 = 2$, then

$$c_1 = 2\frac{-1}{2} = -1$$

So

$$\boxed{\psi_{2s} = A_{2s} e^{-i\frac{E_2 t}{\hbar}} e^{-\frac{r}{2r_0}} \big(2 - \frac{r}{2r_0}\big)}$$

with

$$E_2 = Z^2 \frac{(\alpha mc^2)^2}{8} = \frac{E_1}{4}.$$

2p : Let $n = 2$, and $\ell = 1$, then $k' = 0$.

$$\boxed{\psi_{2p} = A_{2s} e^{-i\frac{E_2 t}{\hbar}} r e^{-\frac{r}{2r_0}} Y_1^m}$$

where

$$Y_1^{\pm 1} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2\pi}} \sin(\theta) e^{\pm i\phi},$$
$$Y_1^0 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{\pi}} \cos(\theta)$$

3s : Let $n = 3$, and $\ell = 0$, then $k' = 2$. For u we have

$$u_{3s} = \big(3 - 3\frac{r}{3r_0} + \frac{r^2}{18r_0^2}\big)$$

and with $E_3 = \frac{E_1}{9}$

$$\boxed{\psi_{3s} = A_{3s} e^{-i\frac{E_3 t}{\hbar}} e^{-\frac{r}{3r_0}} \big(3 - \frac{r}{r_0} + \frac{r^2}{18r_0^2}\big)}$$

3p : Let $n = 3$, and $\ell = 1$.
For u we have

$$u_{3p} = r\big(4 - \frac{r}{3r_0}\big)$$

and

$$\boxed{\psi_{3p} = A_{3p} e^{-i\frac{E_3 t}{\hbar}} e^{-\frac{r}{3r_0}} r\big(4 - \frac{r}{3r_0}\big) Y_1^m}$$

3d : Let $n = 3$, and $\ell = 2$. For u we have

$$u_{3d} = r^2$$

and

$$\boxed{\psi_{3d} = A_{3d} e^{-i\frac{E_3 t}{\hbar}} e^{-\frac{r}{3r_0}} r^2 Y_2^m}$$

where

$$\begin{aligned} Y_2^{\pm 2} &= \frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin^2(\theta) e^{\pm 2i\phi} \\ Y_2^{\pm 1} &= \pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin(\theta)\cos(\theta) e^{\pm i\phi} \\ Y_2^0 &= \frac{1}{4}\sqrt{\frac{5}{\pi}} (3\cos^2(\theta) - 1) \end{aligned}$$

These are the first few eigenstates of an electron in an hydrogenoid atom. The spin of the electron is not taken into account into that description and relativistic effects are not taken into account either.

1.2 Relativistic wave equations

1.2.1 Massive Scalar field

The massive scalar field describes a spinless massive particle relativistically. The equation for that particle is obtained as usual with the substitution $E \to i\hbar\partial_t$ and $p \to \frac{\hbar}{i}\nabla$ in the expression for the norm of the relativistic energy-momentum quadrivector

$$E^2 - p^2c^2 = m^2c^4$$

which gives

$$\left(-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2(-\hbar^2)\nabla^2\right)\varphi = m^2c^4\varphi$$

When divided by $-\hbar^2c^2$ this gives the Klein-Gordon equation

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \triangle + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right)\varphi = 0$$

In the presence of a electromagnetic field $(\Phi, \vec{A})$ the energy-momentum quadri-norm becomes

$$(E + e\Phi)^2 - (p - e\vec{A})^2c^2 = m^2c^4$$

and this translates to

$$\left(\frac{1}{c^2}\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} + e\Phi\right)^2 - \left(\frac{\hbar}{i}\nabla - \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2 - m^2c^2\right)\varphi = 0$$

Looking for a stationary state we put $\phi = e^{-i\frac{Et}{\hbar}} F(r, \theta, \phi)$ and we get

$$\left(\frac{1}{c^2} (E + e\Phi)^2 - \left(\frac{\hbar}{i} \nabla - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 - m^2 c^2 \right) F = 0$$

Coulomb potential

For a central Coulomb field $\Phi = \frac{Ze}{r}$, and $\vec{A} = 0$, we get

$$\left(\frac{1}{c^2} \left(E + \sigma \frac{Ze^2}{r} \right)^2 + \hbar^2 \triangle - m^2 c^2 \right) F = 0$$

with $\sigma = -1$ for a negative charged scalar field and $\sigma = +1$ for a positive one.

Let $\alpha = \frac{e^2}{\hbar c}$ be the fine structure constant, $\epsilon = \frac{E}{\hbar c}$ and $\mu = \frac{mc^2}{\hbar c}$, then the equation reads

$$\left(\left(\epsilon + \sigma \frac{Z\alpha}{r} \right)^2 + \triangle - \mu \right) F = 0$$

In spherical coordinate we have

$$\triangle = \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r) - \frac{L^2}{r^2}$$

where L is the angular momentum operator with

$$L^2 Y_m^\ell = \ell(\ell + 1) Y_m^\ell, \qquad L_z Y_m^\ell = m Y_m^\ell$$

with Y^ℓ_m the spherical harmonics and L_z the z component of the angular momentum operator.

Writing $F = R(r)Y^\ell_m(\theta,\phi)$ we get the radial equation

$$\left(\left(\epsilon+\sigma\frac{Z\alpha}{r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\partial_r(r^2\partial_r)-\frac{\ell(\ell+1)}{r^2}-\mu\right)R=0$$

Let $R=\frac{w}{r}$ we have then

$$R'=\frac{w'}{r}-\frac{w}{r^2},\qquad r^2R=rw'-w,\qquad (r^2R')'=w'-rw''-w'=rw''$$

so that

$$\left[\left(\epsilon+\sigma\frac{Z\alpha}{r}\right)^2-\mu^2-\frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\right]\frac{w}{r}+\frac{w''}{r}=0$$

which can be written as

$$\left((\epsilon^2-\mu^2)+2\epsilon\sigma\frac{Z\alpha}{r}+\frac{Z^2\alpha^2-\ell(\ell+1)}{r^2}\right)w+w''=0$$

the asymptotic $r\to\infty$ solutions verify

$$w''-(\mu^2-\epsilon^2)w=0.$$

If we look for bound states, we have $\mu>\epsilon$ so $(\mu^2-\epsilon^2)=\omega^2>0$ and the solution that is bounded at infinity must be of the form

$$w=Ae^{-\omega r}u(r)$$

for the full equation. We have then

$$w' = A(u' - \omega u)e^{-\omega r}, \qquad w'' = A(u'' - 2\omega u' + \omega^2 u)e^{-\omega r}$$

and the equation becomes

$$\left(-\omega^2 + 2\sigma\epsilon\frac{Z\alpha}{r} + \frac{Z^2\alpha^2 - \ell(\ell+1)}{r^2}\right)u + u'' - 2\omega u' + \omega^2 u = 0$$

that is

$$\left(2\sigma\epsilon\frac{Z\alpha}{r} + \frac{Z^2\alpha^2 - \ell(\ell+1)}{r^2}\right)u + u'' - 2\omega u' = 0$$

We expect to find polynomial solutions for u of the form

$$u = r^s \sum_k c_k r^k = \sum_k c_k r^{s+k}$$

for which

$$u' = \sum_k c_k (s+k) r^{s+k-1}, \qquad u'' = \sum_k c_k (s+k)(s+k-1) r^{s+k-2}$$

We have then

$$\sum_k c_k \Big(2\sigma\epsilon Z\alpha r^{s+k-1} + \big(Z^2\alpha^2 - \ell(\ell+1)\big) r^{s+k-2} \\ + (s+k)(s+k-1) r^{s+k-2} - 2\omega(s+k) r^{s+k-1}\Big) = 0$$

that is

$$\sum_k c_k \Big(2\sigma\epsilon Z\alpha - 2\omega(s+k)\Big) r^{s+k-1} \\ + \big(Z^2\alpha^2 - \ell(\ell+1) + (s+k)(s+k-1)\big) r^{s+k-2} = 0$$

Developping for the first ks we have

$$\begin{aligned}
&c_0\big((2\sigma\epsilon Z\alpha - 2\omega s) r^{s-1} + (Z^2\alpha^2 - \ell(\ell+1) + s(s-1)) r^{s-2}\big)\\
&\quad + c_1\big((2\sigma\epsilon Z\alpha - 2\omega(s+1)) r^{s-1} + (Z^2\alpha^2 - \ell(\ell+1) + (s+1)s) r^{s-1}\big)\\
&\quad + \qquad \ldots\\
&\quad + c_k\big((2\sigma\epsilon Z\alpha - 2\omega(s+k)) r^{s+k-1} + (Z^2\alpha^2 - \ell(\ell+1) + (s+k)(s+k-1))\\
&\quad + \qquad \ldots\\
&\quad = 0
\end{aligned}$$

That can be rearranged as

$$\begin{aligned}
&r^{s-2}\big((Z^2\alpha^2 - \ell(\ell+1) + s(s-1)) c_0\big)\\
&+ r^{s-1}\big(Z^2\alpha^2 - \ell(\ell+1) + (s+1)s) c_1 + (2\sigma\epsilon Z\alpha - 2\omega s) c_0\big)\\
&+ \qquad \ldots\\
&+ r^{s+k-2}\big((Z^2\alpha^2 - \ell(\ell+1) + (s+k)(s+k-1)) c_k\\
&\qquad\qquad + (2\sigma\epsilon Z\alpha - 2\omega(s+k-1)) c_{k-1}\big)\\
&+ \qquad \ldots\\
&= 0
\end{aligned}$$

Since this must be valid for any r, each term must vanish. We then get the value for s with the first term

$$Z^2\alpha^2 - \ell(\ell+1) + s(s-1) = 0$$

from which

$$s = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \ell(\ell+1) - Z^2\alpha^2}$$

which can be written

$$s = \frac{1}{2} \pm \sqrt{(\ell + \frac{1}{2})^2 - Z^2\alpha^2} = \frac{1}{2} \pm (\ell + \frac{1}{2})\sqrt{1 - \frac{Z^2\alpha^2}{(\ell + \frac{1}{2})^2}}$$

Taking the square root as one we have $s \simeq -\ell$ for the minus root, and $s \simeq \ell + 1$ for the positive root. The negative rot must be discarded if we want a wave function that is finite at $r = 0$. So we take

$$s = \frac{1}{2} + (\ell + \frac{1}{2})\sqrt{1 - \frac{Z^2\alpha^2}{(\ell + \frac{1}{2})^2}}$$

Next, from the vanishing of the other terms, we retrieve a recurrence relation for the coefficients

$$c_k((Z^2\alpha^2 - \ell(\ell+1) + (s+k)(s+k-1)) = 2(\omega(s+k-1) - \sigma\epsilon Z\alpha)c_{k-1}$$

using the equation for s we can write

$$c_k = 2\frac{\omega(s+k-1) - \sigma\epsilon Z\alpha}{k(2s+k-1)}c_{k-1}$$

For the series for u to end there must exist a $k = k'$ such that $c_{k'+1} = 0$, that is so that the denominator vanishes for $k = k'+1$

$$\omega(s + k') = \sigma\epsilon Z\alpha$$

From this relation, since ω and the left hand side are positive, we must take $\sigma = +1$ [1]. On squaring

$$(\mu^2 - \epsilon^2)(s + k')^2 = \epsilon^2 Z^2 \alpha^2$$

From this we get the energy

$$\epsilon^2 (Z^2\alpha^2 + (s + k')^2) = \mu^2 (s + k')^2$$

That is

$$\epsilon = \frac{\mu}{\sqrt{1 + \frac{Z^2\alpha^2}{(s+k')^2}}}$$

In usual units

$$\boxed{E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 + \frac{Z^2\alpha^2}{(s+k')^2}}}}$$

To get an expression comparable to the hydrogenoid atoms we develop the denominator in power series of α with

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} - \frac{5x^3}{16} + O(x^4)$$

1. This is to be compared to the non-relativistic case

$$E = \frac{p^2}{2m} - \frac{Ze^2}{r}$$

for two charges of opposite sign and magnitude Ze and e (e positive), of potential energy $V = -\frac{Ze^2}{r}$. This becomes $E - V$, with the plus sign for σ in the relativistic energy-momentum first component.

which gives in our present case

$$\frac{1}{\sqrt{1+\frac{Z^2\alpha^2}{(s+k')^2}}} = 1 - \frac{Z^2\alpha^2}{2(s+k')^2} + \frac{3Z^4\alpha^4}{8(s+k')^4} - \frac{5Z^6\alpha^6}{16(s+k')^6} + O(\alpha^8)$$

and for s we can use the series

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + O(x^4)$$

so that

$$s = \frac{1}{2} + (\ell + \frac{1}{2})\left(1 - \frac{Z^2\alpha^2}{2(\ell+\frac{1}{2})^2} - \frac{Z^4\alpha^4}{8(\ell+\frac{1}{2})^4} - \frac{Z^6\alpha^6}{16(\ell+\frac{1}{2})^6} + O(\alpha^8)\right)$$

which gives

$$s = \ell + 1 - \left(\frac{Z^2\alpha^2}{2(\ell+\frac{1}{2})} + \frac{Z^4\alpha^4}{8(\ell+\frac{1}{2})^3} + \frac{Z^6\alpha^6}{16(\ell+\frac{1}{2})^5} + O(\alpha^8)\right)$$

and

$$s + k' = \ell + k' + 1 - \frac{Z^2\alpha^2}{2(\ell+\frac{1}{2})} - \frac{Z^4\alpha^4}{8(\ell+\frac{1}{2})^3} - \frac{Z^6\alpha^6}{16(\ell+\frac{1}{2})^5} + O(\alpha^8)$$

Let $n = \ell + k' + 1$ be the principal quantum number, then

$$s + k' = n\left(1 - \frac{Z^2\alpha^2}{2n(\ell+\frac{1}{2})} - \frac{Z^4\alpha^4}{8n(\ell+\frac{1}{2})^3} - \frac{Z^6\alpha^6}{16n(\ell+\frac{1}{2})^5} + O(\alpha^8)\right)$$

and

$$\frac{1}{s+k'} = \frac{1}{n}\left(1 + \frac{Z^2\alpha^2}{2n(\ell+\frac{1}{2})} + \frac{Z^4\alpha^4}{8n(\ell+\frac{1}{2})^3} + \left(\frac{Z^2\alpha^2}{2n(\ell+\frac{1}{2})}\right)^2 + O(\alpha^5)\right)$$

that is

$$\frac{1}{s+k'} = \frac{1}{n}\Biggl(1 + \frac{Z^2\alpha^2}{2n(\ell+\frac{1}{2})} + \frac{Z^4\alpha^4}{8n^2(\ell+\frac{1}{2})^3}\biggl(\frac{2}{(\ell+\frac{1}{2})} + n\biggr) + O(\alpha^5)\Biggr)$$

and

$$\begin{aligned}\frac{1}{(s+k')^2} &= \frac{1}{n^2}\Biggl(1 + 2\frac{Z^2\alpha^2}{2n(\ell+\frac{1}{2})} + \frac{Z^4\alpha^4}{4n^2(\ell+\frac{1}{2})^2} + 2\frac{Z^4\alpha^4}{8n^2(\ell+\frac{1}{2})^3}\biggl(\frac{2}{(\ell+\frac{1}{2})} + n \\ &\qquad + O(\alpha^5)\Biggr) \\ &= \frac{1}{n^2}\Biggl(1 + \frac{Z^2\alpha^2}{n(\ell+\frac{1}{2})} + \frac{Z^4\alpha^4}{4n^2(\ell+\frac{1}{2})^2}\biggl(\frac{2}{(\ell+\frac{1}{2})^2} + \frac{n}{\ell+\frac{1}{2}} + 1\biggr) + O(\alpha\end{aligned}$$

and

$$\frac{1}{(s+k')^4} = \frac{1}{n^4}\Biggl(1 + 2\frac{Z^2\alpha^2}{n(\ell+\frac{1}{2})} + O(\alpha^4)\Biggr)$$

and we can take

$$\frac{1}{(s+k')^6} = \frac{1}{n^6} + O(\alpha^2)$$

The energy to order six in α ($+O(\alpha^8)$) is then given by

$$\boxed{\begin{aligned} E_{n,\ell} = mc^2\Bigg(1 - \frac{Z^2\alpha^2}{2n^2} - \frac{Z^4\alpha^4}{2n^4}\left(\frac{n}{\ell+\frac{1}{2}} - \frac{3}{4}\right) \\ + \frac{Z^6\alpha^6}{8n^6}\bigg(\frac{2n^2}{(\ell+\frac{1}{2})^4} + \frac{n^3}{(\ell+\frac{1}{2})^3} + \frac{n^2}{(\ell+\frac{1}{2})^2} \\ + \frac{3n}{\ell+\frac{1}{2}} - \frac{5}{2}\bigg) + O(\alpha^8)\Bigg)\end{aligned}}$$

This is the energy of a zero-spin particle due to a Coulomb potential (for example a π^- around a p^+).

action

Chapitre 2

Lagrangiens libres

2.1 Lagrangiens

La dynamique d'un champs ϕ est gouvernée par le lagrangien

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi).$$

On définit alors l'action par l'intégrale du lagrangien entre deux instants t_1 et t_2 donnés

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi).$$

Dans le formalisme lagrangien, les équation du mouvement des champs sont données par les champs qui minimisent l'action. On effectue une variation de l'action et on trouve que les champs

équation!d'Euler-Lagrange
équation!de Klein-Gordon
équation!de Dirac

qui rendent l'action extrémale vérifient les équations d'Euler-Lagrange

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0.$$

2.1.1 Champs de Klein-Gordon

Lagrangien de Klein-Gordon

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi^*)(\partial^\mu \phi) - m^2 \phi^* \phi$$

Qui, par variation du champs ϕ^* donne l'équation du mouvement

$$(\Box + m^2)\phi = 0,$$

qui est l'*équation de Klein-Gordon*, d'un champs scalaire éventuellement complexe.

2.1.2 Champs de Dirac

Lagrangien d'une particule de Dirac

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi$$

où $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$. Par variation de ce lagrangien par rapport au champs $\bar{\psi}$ on obtient l'*équation de Dirac*

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0.$$

En représentation d'impulsion elle s'écrit

$$(\not{p} - m)\psi(p) = 0.$$

où $\not{p} = \gamma^\mu p_\mu$.

Solution de l'équation de Dirac libre

Restaurons le facteur c dans l'équation de Dirac

$$(\not{p} - mc)\psi(p) = 0$$

et posons

$$\psi = \begin{pmatrix} \zeta \\ \chi \end{pmatrix}.$$

En représentation standard, $\not{p}$ est donné par

$$\not{p} = \gamma_0 p_0 - \gamma^i p_i = \begin{pmatrix} \frac{E}{c} & -\sigma \cdot p \\ \sigma \cdot p & -\frac{E}{c} \end{pmatrix}.$$

L'équation de Dirac s'écrit alors

$$\begin{pmatrix} \frac{E}{c} - mc & -\sigma \cdot p \\ \sigma \cdot p & -\frac{E}{c} - mc \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta \\ \chi \end{pmatrix} = 0$$

soit

$$\begin{cases} (\frac{E}{c} - mc)\zeta - (\sigma \cdot p)\chi & = 0 \\ (\sigma \cdot p)\zeta - (\frac{E}{c} + mc)\chi & = 0. \end{cases}$$

On obtient les relations suivantes

$$\begin{cases} \zeta & = \frac{(\sigma \cdot p)c}{E_-}\chi \\ \chi & = \frac{(\sigma \cdot p)c}{E_+}\zeta. \end{cases}$$

avec $E^2 = m^2c^4 + p^2c^2$ et

$$E_- = E - mc^2 \qquad \text{et} \qquad E_+ = E + mc^2.$$

La matrice $\sigma \cdot p$ est donnée en exprimant les matrices de Pauli

$$\sigma \cdot p = \begin{pmatrix} p_3 & p_1 - ip_2 \\ p_1 + ip_2 & -p_3 \end{pmatrix}.$$

Commençons par déterminer les états d'énergie positive de spin $\uparrow$ et $\downarrow$ donnés respectivement par $\zeta^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\zeta^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On obtient

$$\chi^{(1)} = \frac{c}{E_+} \begin{pmatrix} p_3 \\ p_1 + ip_2, \end{pmatrix} \qquad \chi^{(2)} = \frac{c}{E_+} \begin{pmatrix} p_1 - ip_2 \\ -p_3, \end{pmatrix}.$$

On obtient ainsi les spineurs d'énergie positive

$$u^{(1)} = N \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{c}{E_+} p_3 \\ \frac{c}{E_+}(p_1 + ip_2) \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad u^{(2)} = N \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{c}{E_+}(p_1 - ip_2) \\ -\frac{c}{E_+} p_3 \end{pmatrix}.$$

On obtient de même les états d'énergie négative, qui détermine les antiparticules, en posant $\chi^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\chi^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. On obtient alors

$$\zeta^{(1)} = \frac{c}{E_-} \begin{pmatrix} p_1 - ip_2 \\ -p_3 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \zeta^{(2)} = \frac{c}{E_-} \begin{pmatrix} p_3 \\ p_1 + ip_2 \end{pmatrix}.$$

Les spineurs d'énergie négative sont ainsi donnés par

$$v^{(1)} = N \begin{pmatrix} \frac{c}{E_-}(p_1 - ip_2) \\ -\frac{c}{E_-} p_3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad v^{(2)} = N \begin{pmatrix} \frac{c}{E_-} p_3 \\ \frac{c}{E_-}(p_1 + ip_2) \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le facteur N est choisi en fonction de la normalisation des spineurs.

Le spineur conjugué est défini par

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0.$$

Le scalaire qui définit la norme du spineur est donné par

$$\bar{\psi}\psi.$$

On obtient ainsi

$$\begin{aligned}
\bar{u}u &= N^2(\zeta^\dagger - \frac{c}{E_+}\zeta^\dagger\sigma^\dagger \cdot p)\begin{pmatrix} \zeta \\ \frac{c}{E_+}(\sigma \cdot p)\zeta \end{pmatrix} \\
&= N^2(1 - \frac{c^2}{E_+^2}p^2) \\
&= N^2\frac{E_+^2 - p^2c^2}{E_+^2}
\end{aligned}$$

En utilisant la définition de E_+ on trouve

$$\begin{aligned}
\bar{u}u &= N^2\frac{E^2 + m^2c^4 + 2Emc^2 - (E^2 - m^2c^4)}{E_+^2} \\
&= N^2\frac{2mc^2}{E_+}
\end{aligned}$$

On normalise les spineurs à $2mc^2$ en posant $N = \sqrt{E_+} = \sqrt{E + mc^2}$.

2.1.3 Champs vectoriels

Champs vectoriel de masse nulle

Lagrangien du champs électromagnétique $A = (cE, \mathbf{A})$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

où

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = \partial_{[\mu} A_{\nu]}.$$

La dynamique du champs libre, en l'absence de sources, est donnée par

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$$

soit

$$\Box A^\nu - \partial^\nu (\partial_\mu A^\mu) = 0$$

et dans la jauge de Lorenz [1] on obtient

$$\Box A^\nu = 0.$$

En notations traditionnelles, la jauge de Lorenz s'écrit

$$\partial_\mu A^\mu = \partial_t \phi - \nabla \cdot \mathbf{A} = 0.$$

---

1. Ludwig Valentin Lorenz (1867), à ne pas confondre avec Hendrik Antoon Lorentz qui a laissé son nom aux transformations et au contractions et dilatations apparentes des longueurs et du temps en relativité restreinte.

Champs vectoriel massif

Pour un champs massif, le lagrangien de Proca est

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - m^2 A_\mu A^\mu$$

qui donne l'équation de Proca obéie par le champs massif

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + m^2 A^\nu = 0$$

en prenant la divergence de cette équation on obtient

$$\partial_\nu A^\nu = 0.$$

La condition de Lorenz est ainsi automatiquement satisfaite et la jauge ne peut pas être fixée arbitrairement. Ainsi, la dynamique du champs libre est-elle donnée par

$$(\Box A_\mu + m^2 A_\mu) = 0$$

avec la condition $\partial_\mu A^\mu = 0$.

Chapitre 3

Symétries et lois de conservation

3.1 Transformations de jauges globales

Les lagrangiens des champs de Klein-Gordon et de Dirac sont invariant si l'on multiplie les champs par un facteur de phase. On se propose de déduire les conséquences de cette invariance.

transformation de jauge de 1ère espèce

jauge!globale

3.1.1 Jauge abélienne

Champs de Klein-Gordon

Considérons le lagrangien de Klein-Gordon

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi^*)(\partial^\mu \phi) - m^2 \phi^* \phi.$$

On observe que ce lagrangien ne change pas si l'on effectue la substitution

$$\phi \to \phi' = e^{-i\alpha}\phi$$
$$\phi^* \to \phi^{*\prime} = e^{i\alpha\phi}$$

pour une valeur réelle quelconque de α. C'est une *transformation de jauge de première espèce*. La valeur de α est la même dans tout l'espace-temps. Il s'agit d'une transformation de jauge *globale*.

Supposons que α soit infinitésimal. On a alors

$$\phi' = [1 - i\alpha + o(\alpha^2)]\phi \simeq \phi - i\alpha\phi.$$

La variation du champs ϕ est alors

$$\delta\phi = -i\alpha\phi.$$

La variation du champs ϕ^* est, elle, donnée par

$$\delta\phi^* = i\alpha\phi^*.$$

Champs de Dirac et symétrie $U(1)$

Tout comme le lagrangien de Klein-Gordon, le lagrangien de Dirac est invariant sous une transformation de jauge de première espèce

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi$$

ne change pas si l'on effectue la transformation globale

$$\begin{aligned} \psi &\to \psi' = e^{-i\alpha}\psi \simeq \psi - i\alpha\psi \\ \bar{\psi} &\to \bar{\psi}' = e^{i\alpha}\bar{\psi} = \bar{\psi} + i\alpha\bar{\psi}. \end{aligned}$$

3.1.2 Théorème de Noether

Le théorème de Noether affirme qu'à tout groupe continu de symétrie du Lagrangien correspond un courant conservé et une charge conservée.

Cas général

Considérons un lagrangien $\mathcal{L}(\phi_j, \partial_\mu \phi_j)$ et supposons que sous l'effet d'une symétrie, les champs soient modifiés selon

$$\phi_j \to \phi'_j = \phi_j + \delta\phi_j \qquad \partial_\mu \phi_j \to \partial_\mu \phi'_j = \partial_\mu \phi_j + \delta(\partial_\mu \phi_j)$$

et supposons encore que $\delta(\partial_\mu \phi_j) = \partial_\mu(\delta\phi_j)$. Par cette transformation, le lagrangien devient

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L}(\phi'_j, \partial_\mu \phi'_j)$$

et sa variation est donnée par

$$\delta\mathcal{L} = \sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_j}\delta\phi_j + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_j)}\delta(\partial_\mu \phi_j)$$

courant!conservé
courant!de N\oe hter
charge!conservée
charge!de N\oe ther

c'est-à-dire, en utilisant les équations d'Euler-Lagrange pour transformer le permier terme

$$\delta\mathcal{L} = \sum_j \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_j)} \right) \delta\phi_j + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_j)} \partial_\mu(\delta\phi_j).$$

On obtient finalement

$$\delta\mathcal{L} = \sum_j \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_j)} \delta\phi_j \right).$$

Or, si la transformation est une symétrie du lagrangien, la variation du lagrangien est nulle, ainsi

$$\partial_\mu \left(\sum_j \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_j)} \delta\phi_j \right) = 0, \tag{3.1}$$

ce qui montre que l'expression entre parenthèse est bien *un courant conservé*. La *charge conservée* associée à ce courant est

$$Q = \int_\Omega J^0 \, d\omega.$$

Champs de Klein-Gordon et symétrie $U(1)$

Dans le cas du champs de Klein-Gordon, on a vu que

$$\delta\phi = -i\alpha\phi \qquad \text{et} \qquad \delta\phi^* = i\alpha\phi^*.$$

En outre, on a

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} = \partial^\mu\phi^*$$

courant!de Klein-Gordon
charge!de Klein-Gordon

et

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^*)} = \partial^\mu \phi.$$

Ainsi, l'équation 3.1 devient

$$\partial_\mu \left((\partial^\mu \phi^*)(-i\alpha\phi) + (\partial^\mu \phi) i\alpha\phi^* \right) = 0$$

ou encore

$$-i\alpha\partial_\mu \left((\partial^\mu \phi^*)\phi - (\partial^\mu \phi)\phi^* \right) = 0.$$

On définit ainsi le *courant conservé* de Klein-Gordon

$$J^\mu = i \left(\phi^*(\partial^\mu \phi) - (\partial^\mu \phi^*)\phi \right) = i\phi^* \overleftrightarrow{\partial^\mu} \phi \tag{3.2}$$

et

$$\partial_\mu J^\mu = 0.$$

La *charge conservée* est

$$Q = \int_\Omega J^0 \, d\omega.$$

De façon explicite

$$Q = i \int_\Omega \left(\phi^*(\partial^0 \phi) - (\partial^0 \phi^*)\phi \right) \, d\omega.$$

On voit immédiatement que si le champ est réel, $\phi^* = \phi$ et la charge conservée s'annule.

Champs de Dirac et symétrie $U(1)$

Pour le lagrangien de Dirac, on a

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)} = \bar{\psi} i \gamma^\mu$$

et

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \bar{\psi})} = 0,$$

avec

$$\delta\psi = -i\alpha\psi$$
$$\delta\bar{\psi} = i\alpha\psi.$$

Ainsi la relation 3.1 devient

$$\alpha\partial_\mu \left(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\right) = 0$$

et le courant conservé de Dirac est

$$J^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi.$$

La charge conservée de Dirac est

$$Q = \int_\Omega \bar{\psi}\gamma^0\psi \, d\omega = \int_\Omega \psi^\dagger\psi \, d\omega.$$

3.2 Théorème de Nœther général

Si l'on prend en compte toutes les symétries qui laissent l'action invariante, on obtient une relation plus générale du théorème de Nœther et du courant conservé, dans lequel figure également les relations pour les transformations de l'espace-temps.

champs!de jauge

$$\delta S = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right) \delta\phi \, d^4x +$$

3.3 Transformations de jauges locales

Yang et Mills [YM54] ont poussés plus loin l'étude des transformations de jauge. La question principale qu'ils se sont posée est de savoir ce qui advient si l'on demande que la symétrie de jauge de première espèce devienne une symétrie locale et non plus simplement globale.

Originellement, ils ont étudié la symétrie $SU(2)$ de l'isospin, qui considère que le neutron et le proton sont, mis à part la charge du proton, la même particule. Sous l'effet de l'interaction nucléaire, la charge du proton n'a aucune importance et les deux types de particules se comportent de la même façon.

Yang et Mills se sont alors demandé quelle serait la conséquence de pouvoir choisir laquelle de ces particules est un neutron et laquelle est un proton, non seulement en un endroit de l'espace, mais dans tous les endroits. Autrement dit, de pouvoir faire ce choix localement.

Passer d'une symétrie globale à une symétrie locale, exige l'introduction d'un nouveau champs, *un champs de jauge*. La méthode utilisée par Yang et Mills suit la démarche de Pauli [Pau41] pour l'électromagnétisme et la symétrie de jauge $U(1)$.

dérivée covariante

3.3.1 Groupe de symétrie abélien

Dérivée covariante

Supposons qu'un champs ϕ subisse une *transformation de jauge de deuxième espèce*, une transformation de jauge locale

$$\phi \to \phi' = e^{-i\alpha(x)}\phi$$
$$\phi^* \to \phi'^* = e^{i\alpha(x)}\phi^*.$$

Cette fois, le lagrangien de Klein-Gordon n'est plus invariant. En effet, le terme cinétique, qui contient des dérivées ∂_μ, va introduire un terme supplémentaire dans le lagrangien. En effet, la dérivée se transforme alors comme

$$\partial_\mu\phi \to \partial_\mu\phi' = e^{-i\alpha(x)}\left(-i\partial_\mu\alpha + \partial_\mu\phi\right).$$

Définissons la *dérivée covariante*, par analogie à l'impulsion en mécanique classique des particules chargées en présence d'un champs électromagnétique $\mathbf{p} = m\mathbf{v} - q\mathbf{A}$

$$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu + igA_\mu \tag{3.3}$$

où A est un champs de *jauge* dans la représentation de la symétrie choisie, de dimension égale à la représentation des champs de particules (p.ex. en $U(1)$, A est un champs vectoriel.

En prenant la dérivée covariante du champs ϕ', on obtient

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}'_\mu\phi' &= (\partial_\mu + igA'_\mu)e^{-i\alpha(x)}\phi \\
&= e^{-i\alpha(x)}\left(\partial_\mu\phi - i\partial_\mu\alpha\phi + igA'_\mu\phi\right) \\
&= e^{-ig\beta(x)}\left(\partial_\mu + ig(-\partial_\mu\beta + A'_\mu)\right)\phi \\
&= e^{-ig\beta(x)}\left(\partial_\mu + igA_\mu)\right)\phi
\end{aligned}$$

où $g\beta = \alpha$ et

$$A_\mu = A'_\mu - \partial_\mu \beta.$$

Ainsi, si le champs A_μ subit la transformation de jauge

$$A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \beta \tag{3.4}$$

lorsque le champs subit la transformation

$$\phi \to \phi' = e^{-ig\beta}\phi,$$

alors on vérifie que

$$\mathcal{D}'_\mu e^{-ig\beta}\phi = e^{-ig\beta}\mathcal{D}_\mu \phi.$$

On reconnaît dans 3.4 la transformation de jauge du quadrivecteur potentiel du champs électromagnétique. Le couplage g entre A_μ et ϕ dans la dérivée covariante est alors la charge électrique du champs ϕ, qui apparaît dans le terme d'impulsion $\mathbf{p} = m\mathbf{v} - q\mathbf{A}$.

Le lagrangien invariant de jauge est alors

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{KG} &= (\mathcal{D}_\mu \phi^*)(\mathcal{D}_\mu \phi) - m^2\phi^*\phi \\
&= (\partial_\mu \phi^* - igA_\mu \phi^*)(\partial^\mu \phi + igA^\mu \phi) - m^2\phi^*\phi \\
&= (\partial_\mu \phi^*)(\partial^\mu \phi) - m^2\phi^*\phi - gA_\mu J^\mu + g^2 A_\mu A^\mu \phi^*\phi
\end{aligned}$$

où J^μ est donné par la relation 3.2. Le champs A_μ permet de rendre le lagrangien invariant, mais il manque une partie cinétique pour le champs de jauge A_μ.

dérivée covariante

Partant de la définition de la dérivée covariante 3.3, on a pour le champs de jauge de symétrie $U(1)$ le commutateur

$$[\mathcal{D}_\mu, \mathcal{D}_\nu] = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = F_{\mu\nu}.$$

Le tenseur antisymétrique $F_{\mu\nu}$ correspond au tenseur du champs électromagnétique. Le terme cinétique est alors

$$\mathcal{L}_{em} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}.$$

Remarquons que la "charge" g n'apparaît pas dans le tenseur du champs $F_{\mu\nu}$. Il en découle que la dynamique du champs de jauge en l'absence de source ne dépend pas de g. Ainsi, la valeur de g est arbitraire.

Le lagrangien complet, qui réunit le champs ϕ de charge g et le champs électromagnétique est obtenu en sommant le lagrangien invariant de Klein-Gordon avec le lagrangien cinétique du champs de jauge

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \mathcal{L}_{KG} + \mathcal{L}_{em} \\ &= (\partial_\mu \phi^*)(\partial^\mu \phi) - m^2 \phi^* \phi - g A_\mu J^\mu + g^2 A_\mu A^\mu \phi^* \phi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}.\end{aligned}$$

3.3.2 Groupe de symétrie non-abélien

Dérivée covariante

Définissons la *dérivée covariante*

$$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu + i g B_\mu$$

pour $SU(2)$ B est un champs tensoriel, une matrice de $SU(2)$, etc.). universalité

En adoptant la définition

$$F_{\mu\nu} = [\mathcal{D}_\mu, \mathcal{D}_\nu]$$

aussi dans pour les autres symétries de jauge, on a, dans le cas de jauges non-abéliennes

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu + ig[B_\mu, B_\nu].$$

contrairement à la jauge de symétrie $U(1)$, le tenseur du champs de jauge dépend de g. Cela a comme conséquence que tous les champs couplés au champs B le sont avec la même charge g. C'est l'*universalité* des champs de jauges non-abéliennes.

On vérifie alors que sous l'effet d'une transformation de jauge locale G, le tenseur se transforme selon

$$GF_{\mu\nu}G^{-1}$$

Chapitre 4

Brisures de Symétrie

4.1 Brisure spontannée

4.2 Bosons de Goldstone

4.3 Processus de Higgs

Chapitre 5

Le Modéle Standard

5.1 Le secteur des leptons

5.2 Le secteur des hadrons

Chapitre 6

Calculs d'amplitudes

Suivant [Gri87].

6.1 Matrice S

6.2 Taux de diffusion

Si deux particules 1 et 2 entrent en collision et produisent $n-2$ particules

$$1 + 2 \to 3 + 4 + \cdots + n$$

la section efficace de ce mode est donnée par

$$d\sigma = |\mathcal{M}|^2 \frac{\hbar^2 S}{4\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - (m_1 m_2 c^2)^2}} (2\pi)^4 \delta^4 (p_1 - \sum_{i=2}^{n-1} p_i) \prod_{i=2}^{n} \frac{c d^3 p_i}{(2\pi)^3 2E_i}$$

et

$$d^3\mathbf{p}_3 = |\mathbf{p}_3|^2 d|\mathbf{p}_3| d\Omega$$

et

$$d\Omega = \sin(\theta) d\theta d\phi$$

6.3 Taux de désintégration

Soit une particule 1 de masse M qui se désintègre en $n-1$ particules de masse m_2, m_3,...,m_n

$$1 \rightarrow 2 + 3 + 4 + \cdots + n$$

Le taux de désintégration dans ce mode est donné par

$$d\Gamma = |\mathcal{M}|^2 \frac{S}{2\hbar M} (2\pi)^4 \delta^4 (p_1 - \sum_{i=2}^{n-1} p_i) \prod_{i=2}^{n} \frac{c d^3 p_i}{(2\pi)^3 2E_i}$$

où S est un facteur de symétrie qui prend une valeur $\frac{1}{k!}$ pour chaque groupe de k particules identiques.

6.4 Exemples

6.4.1 Désintégration du μ

Dans cet exemple, on suit la démarche de [Gri87, p.237]. Calculons le taux de désintégration du μ selon le processus de désintégration β^-

$$\mu \to e + \nu_\mu + \bar{\nu}_e.$$

La désintégration est due au courant chargé médiée par le boson-vecteur W^-. Soit p_1 la quadri-impulsion du μ, p_2 et p_4 les

Figure 6.1 – Diagramme de Feynman de la désintégration du μ.

quadri-impulsions des neutrinos ν_μ et $\bar{\nu}_e$ respectivement et p_3 la quadri-impulsion de l'électron.

On a alors

$$\begin{aligned} p_1^2 &= M^2 \\ p_2^2 = p_4^2 &= 0 \\ p_3^2 &= m^2 \end{aligned}$$

où M est la masse du μ et m la masse de l'électron.

Dans le référentiel du μ on a

$$\begin{aligned} p_1 &= (M, \mathbf{0}) \\ p_2 &= (|\mathbf{k}_\mu|, \mathbf{k}_\mu) \\ p_3 &= (E_e, \mathbf{p}) \\ p_4 &= (|\mathbf{k}_e|, \mathbf{k}_e) \end{aligned}$$

Par conservation de la quadri-impulsion, on a

$$p_1 = p_2 + p_3 + p_4$$

d'où, en multipliant les deux membres par p_1,

$$M^2 = p_1 \cdot p_2 + p_1 \cdot p_3 + p_1 \cdot p_4$$

ou en multipliant par p_2

$$M|\mathbf{k}_\mu| = p_2 \cdot p_3 + p_2 \cdot p_4.$$

Enfin, en multipliant par p_3 on obtient

$$p_2 \cdot p_3 + m^2 + p_3 \cdot p_4 = ME_e.$$

On déduit de ces identités que

$$p_1 \cdot p_3 = ME_e, \quad p_2 \cdot p_4 = M^2 + m^2 - 2ME_e, \quad \text{et} \quad p_3 \cdot p_4 = \frac{1}{2}(M^2 - m^2) - p_1 \cdot p_2.$$

Le courant muonique est donné par

$$j_\mu^\alpha = \bar{u}(\nu_\mu)\frac{ig_W}{2\sqrt{2}M_W}\gamma^\alpha(1-\gamma_5)u(\mu)$$

et le courant électronique par

$$j_e^\alpha = \bar{u}(e)\frac{ig_W}{2\sqrt{2}M_W}\gamma^\alpha(1-\gamma_5)u(\nu_e).$$

Ainsi, l'amplitude de diffusion est

$$\mathcal{M} = -\frac{i}{8}\left(\frac{g_W}{M_W}\right)^2[\bar{u}(\nu_\mu)\gamma^\alpha(1-\gamma_5)u(\mu)][\bar{u}(e)\gamma_\alpha(1-\gamma_5)u(\nu_e)].$$

La densité de probabilité est donnée par

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{1}{64}\left(\frac{g_W}{M_W}\right)^4[\bar{u}(\nu_\mu)\gamma^\alpha(1-\gamma_5)u(\mu)][\bar{u}(e)\gamma_\alpha(1-\gamma_5)u(\nu_e)]$$
$$\times[\bar{u}(\nu_\mu)\gamma^\beta(1-\gamma_5)u(\mu)]^*[\bar{u}(e)\gamma_\beta(1-\gamma_5)u(\nu_e)]^*$$

Or, avec $\Gamma = \gamma^\alpha$, on a

$$[\bar{u}(a)\Gamma u(b)]^* = [u(a)^\dagger\gamma^0\Gamma u(b)]^\dagger = u(b)^\dagger\Gamma^\dagger{\gamma^0}^\dagger u(a)$$

soit

$$[\bar{u}(a)\Gamma u(b)]^* = u(b)^\dagger\gamma^0\big(\gamma^0\Gamma^\dagger{\gamma^0}^\dagger\big)u(a) = \bar{u}(b)\big(\gamma^0\Gamma^\dagger{\gamma^0}^\dagger\big)u(a).$$

Mais on vérifie que pour $\Gamma = \gamma^\alpha$, on a

$$\gamma^0\Gamma^\dagger{\gamma^0}^\dagger = \Gamma.$$

astuce!de Casimir

Ainsi on obtient

$$[\bar{u}(a)\Gamma u(b)]^* = \bar{u}(b)\Gamma u(a).$$

La densité de probabilité est donc donnée par

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{1}{64}\left(\frac{g_W}{M_W}\right)^4 [\bar{u}(\nu_\mu)\gamma^\alpha(1-\gamma_5)u(\mu)][\bar{u}(\mu)\gamma^\beta(1-\gamma_5)u(\nu_\mu)] \\ \times [\bar{u}(e)\gamma_\alpha(1-\gamma_5)u(\nu_e)][\bar{u}(\nu_e)\gamma_\beta(1-\gamma_5)u(e)],$$

où l'on a simplement permuté les facteurs afin d'assembler les facteurs des courants muoniques et des courants électroniques.

On utilise ensuite l'identité

$$\begin{aligned} \sum_{ij}\sum_{\text{spins } s} u^{(s)}(p)_i A_{ij}\bar{u}^{(s)}(p)_j &= \sum_{ij} A_{ij} \sum_{\text{spins } s} u^{(s)}(p)_i \bar{u}^{(s)}(p)_j \\ &= \sum_{ij} A_{ij}(\not{p} + mc)_{ji} \\ &= \mathrm{tr}\ (A(\not{p}+mc)). \end{aligned}$$

C'est l'astuce de Casimir [Gri87, p.238].

La probabilité de transition moyenne est obtenue en faisant la moyenne sur les spins initiaux et la somme sur les spins finaux.

$$\begin{aligned} \langle|\mathcal{M}|^2\rangle = \frac{1}{2}\sum_{\substack{\text{spin } s\\ \text{du } \mu}}\sum_{\substack{\text{spins}\\ \text{finaux}\\ s_1,s_2,s_3}} \frac{1}{64}\left(\frac{g_W}{M_W}\right)^4 \\ \times [\bar{u}^{(s_1)}(\nu_\mu)\gamma^\alpha(1-\gamma_5)u^{(s)}(\mu)][\bar{u}^{(s)}(\mu)\gamma^\beta(1-\gamma_5)u^{(s_1)}(\nu_\mu)] \\ \times [\bar{u}^{(s_2)}(e)\gamma_\alpha(1-\gamma_5)u^{(s_4)}(\nu_e)][\bar{u}^{(s_4)}(\nu_e)\gamma_\beta(1-\gamma_5)u^{(s_2)}(e)]. \end{aligned}$$

Le facteur $\frac{1}{2}$ vient de la moyenne sur le spin (s) du μ. On a alors

$$\begin{aligned}\langle|\mathcal{M}|^2\rangle = \frac{1}{128}\left(\frac{g_W}{M_W}\right)^4 &\mathrm{tr}\ \left[\not{p}_2\gamma^\alpha(1-\gamma_5)(\not{p}_1+m)\gamma^\beta(1-\gamma_5)\right]\\ &\times \mathrm{tr}\ \left[(\not{p}_3+m)\gamma_\alpha(1-\gamma_5)\not{p}_4\gamma_\beta(1-\gamma_5)\right].\end{aligned}$$

Deuxième partie

Champs quantiques

Chapitre 7

Quantification canonique

7.1 Quantification du champs de Klein-Gordon

7.2 Quantification du champs de Dirac

7.3 Quantification du champs e.-m.

7.3.1 Jauge de Coulomb

7.3.2 Jauge de Lorentz

Gupta-Bleuler

La condition de Lorenz $\partial_\mu A^\mu$ en champs classique ne s'extrapole pas directement avec les champs quantiques. Cette condition prise comme identité d'opérateurs entre en conflit avec la relation de commutation condition!de Gupta-Bleuler

$$[A_\mu(\mathbf{x}, t), \pi_\nu(\mathbf{x}', t)] = i g_{\mu\nu} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}').$$

En décomposant le champs en une partie de fréquence positive A^+ et une partie de fréquance négative $A^{(-)}$, la condition de *Gupta-Bleuler* [Gup50, Gup69, Ble50] est alors

$$\partial_\mu A^{(+)^\mu} |\psi\rangle = 0.$$

En effet, pour $A^{(-)}$ contient des opérateurs de création et ne peut pas satisfaire cette relation, même pour l'état du vide. Par contre, l'opérateur $A^{(+)}$ contient des opérateurs d'annihilation et la condition ne pose pas de problèmes sur cette partie, qui est automatiquement vérifiée pour l'état du vide.

7.4 Quantification du champs de Proca

Chapitre 8

Quantification par l'intégrale de Feynman

8.1 L'intégrale de Feynman

8.1.1 Intégrales gaussiennes

En une dimension

Calculons l'intégrale de la fonction $f(x) = e^{-\frac{1}{2}ax^2}$. Nous trouvons sans difficultés

$$\left(\int f(x)\,dx\right)^2 = \int e^{-\frac{1}{2}a(x^2+y^2)}dxdy = \int 2\pi\rho d\rho e^{-\frac{1}{2}a\rho^2} = \frac{2\pi}{a}.$$

Ainsi, l'intégrale de la gaussienne f est

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}ax^2}\,dx = \sqrt{\frac{2\pi}{a}}.$$

Pour une fonction quadratique $f(x) = \frac{1}{2}ax^2 + bx + c$ on a

$$f(x) = \frac{1}{2}a(x + \frac{b}{a})^2 - \frac{b^2}{a} + c$$

et on a

$$\int e^{-f(x)} = e^{\frac{b^2}{a} - c}\sqrt{\frac{2\pi}{a}}.$$

Cas multidimensionnel

Si A est une matrice diagonale $A = \mathrm{diag}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ définie positive, on peut calculer l'intégrale de la gaussienne en n dimensions

$$\int e^{-\frac{1}{2}(x,Ax)} d^n x = \frac{(2\pi)^{n/2}}{\sqrt{a_1 a_2 \cdots a_n}} = \frac{(2\pi)^{n/2}}{\sqrt{\det(A)}}$$

où l'on a utilisé la notation compacte

$$(x, Ax) = \sum x_i a_i x_i.$$

On peut généraliser ce calcul pour une forme quadratique générale

$$f(x) = \frac{1}{2}(x, Ax) + (b, x) + c$$

avec, cette fois, b et c des vecteurs de dimension n et A une matrice symétrique définie positive. Le minimum de la forme quadratique est obtenu pour

$$\bar{x} = -A^{-1}b.$$

En remplaçant x par $x - \bar{x}$ on obtient

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}(x, Ax) - (x, b) + \frac{1}{2}(b, Ab) + (b, x) - (b, Ab) + c \\ &= \frac{1}{2}(x, Ax) - \frac{1}{2}(b, Ab) + c. \end{aligned}$$

Ainsi, l'intégrale de l'exponentielle de la forme quadratique donne-t-elle

$$\int e^{-[\frac{1}{2}(x,Ax)+(b,x)+c]} d^n x = e^{\frac{1}{2}(b,Ab)-c} \frac{(2\pi)^{n/2}}{\sqrt{\det(A)}}.$$

Le calcul est trivial pour une matrice diagonale A et reste valable pour une matrice non-diagonale. Pour une matrice symétrique définie positive générale A, il faut passer par la matrice diagonale $D = SAS^{-1}$, en utilisant $\det(D) = \det(A)$ et $x' = Sx$, $b' = Sb$. Le calcul ne présente aucune difficulté.

8.1.2 Intégrale de chemin

Introduction

Considérons un champs dont la dynamique est dictée par le lagrangien $\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$. Pour fixer les idées supposons

$$\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) = T(\partial_\mu \phi) - V(\phi).$$

Les moment sont donné par

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi)}$$

et l'hamiltonien par

$$\mathcal{H} = \pi \partial_0 \phi - \mathcal{L}.$$

Champs de Klein-Gordon Le lagrangien de Klein-Gordon est

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_0 \phi)^2 - \frac{1}{2}(\nabla \phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2.$$

Le moment est alors

$$\pi = \partial_0 \phi$$

et la densité hamiltonienne

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{2}(\nabla \phi)^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2.$$

avec l'hamiltonien

$$H = \int d^4x \mathcal{H}.$$

Intégrale de Feynman

En s'inspirant de la mécanique quantique de Schrœdinger, l'évolution d'un système d'un état q_0 vers un état $q$est donnée par l'opérateur d'évolution

$$U(t, t_0) = e^{-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)}$$

où $H = H(q,p)$. Subdivisons l'intervalle $[t_0, t]$ en n intervalles de longueur $\tau = (t - t_0)/n$ et développons le terme

$$\begin{aligned}\left\langle q_{i+1} \left| e^{-\frac{i}{\hbar}H\tau} \right| q_i \right\rangle &= \left\langle q_{i+1} \left| 1 - \frac{i}{\hbar}H\tau \right| q_i \right\rangle \\ &= \delta(q_{i+1} - q_i) - \frac{i\tau}{\hbar}H \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3p\, e^{\frac{i}{\hbar}p\cdot(q_{i+1}-q_i)} - \frac{i\tau}{\hbar}\left\langle q_{i+1} \left| H(q,p) \right| q_i \right\rangle .\end{aligned}$$

En prenant l'expression de l'hamiltonien

$$H(q,p) = \frac{p^2}{2m} + V(q),$$

Dans la représentation en p, avec $\langle p' | p\rangle = \delta^3(p-p')$ et $\langle q_{i+1} | p\rangle = (2\pi\hbar)^{\frac{3}{2}} \exp(\frac{i}{\hbar}pq_{i+1})$ on a

$$\left\langle q_{i+1} \left| \frac{p^2}{2m} \right| q_i \right\rangle = \frac{1}{\hbar}\int d^3p\, d^3p' \;\langle q_{i+1} | p\rangle \left\langle p \left| \frac{p^2}{2m} \right| p' \right\rangle \langle p' | q_i\rangle$$

$$= \frac{1}{\hbar}\int d^3p\, \frac{p^2}{2m} \exp\left[\frac{i}{\hbar}p(q_{i+1} - q_i)\right]$$

et

$$\langle q_{i+1} \left| V(q) \right| q_i\rangle = V(\bar{q}_i)\, \langle q_{i+1} | q_i\rangle = V(\bar{q}_i)\delta^3(q_{i+1} - q_i).$$

où $\bar{q}_i = \frac{1}{2}(q_{i+1} + q_i)$. En réunissant ces résultats, l'amplitude de transition est

$$\langle\, q_{i+1}, t_{i+1} |\, q_i, t_i \rangle = \frac{1}{h} \int dp \exp\left[\frac{i}{\hbar} p(q_{i+1} - q_i) - \frac{i\tau}{\hbar} H(\bar{q}_i, p) \right]$$

$$= \frac{1}{h} \int dp_i \exp\left[\frac{i\tau}{\hbar} \left(p_i \frac{q_{i+1} - q_i}{\tau} - H(\bar{q}_i, p_i) \right) \right]$$

Finalement, en composant tous les chemins possibles

$$\langle\, q_f, t_f |\, q_0, t_0 \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle\, q_f, t_f |\, q_{n-1}, t_{n-1} \rangle \langle\, q_{n-1}, t_{n-1} |\, \ldots \rangle$$
$$\ldots \langle\, q_2, t_2 |\, q_1, t_1 \rangle \langle\, q_1, t_1 |\, q_0, t_0 \rangle$$

on obtient

$$\langle\, q_f, t_f |\, q_0, t_0 \rangle = \int \frac{\mathcal{D}q\mathcal{D}p}{h} \exp\left[\frac{i}{\hbar} \left(\int_{t_0}^{t_f} [p\dot{q} - H(q,p) \right) \right] .$$

Dans le cas où $H(q,p) = T(p) + V(q)$, alors l'intégrand dans l'exponentielle est le lagrangien $L(q,\dot{q}) = p\dot{q} - H(q,p)$ et l'expression devient, après avoir effectué l'intégrale sur p

$$\langle\, q_f, t_f |\, q_0, t_0 \rangle = N \int \mathcal{D}q \exp\left[\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^{t_f} L(q,\dot{q}) \right]$$

avec

$$N = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{m}{ih\tau} \right)^{\frac{n+1}{2}} .$$

Transition du vide au vide Avec $\dot{\phi} = \partial_0 \phi$

$$Z_0[J] = N \int \mathcal{D}\phi \, \exp\left[i \int (\pi\dot{\phi} - \mathcal{H}) d^4x + i \int J\phi \, d^4x\right]$$

or, $\pi\dot{\phi} - \mathcal{H} = \mathcal{L}$ ainsi

$$Z_0[J] = N \int \mathcal{D}\phi \, \exp\left[i \int \mathcal{L} \, d^4x + i \int J\phi \, d^4x\right]$$

soit

$$Z_0[J] = N \int \mathcal{D}\phi \, \exp\left[iS + i \int J\phi \, d^4x\right].$$

8.2 Le champs de Klein-Gordon

8.2.1 Champs libre

Avec $S = \int \mathcal{L} \, d^4x$ l'action du système, l'amplitude de transition du vide au vide est donnée par

$$Z_0[J] = \langle 0, \infty | \, 0, -\infty \rangle^J = N \int \mathcal{D}\phi e^{i(S + \int J\phi d^4x)}$$

où N est un facteur de normalisation choisi de sorte qu'en absence de source, l'amplitude de transition du vide au vide soit égale à

$$N = \left[\int \mathcal{D}\phi e^{i(S \, d^4x)}\right]^{-1}.$$

La fonction de Green $\Delta_{KG}(x)$ du champs de Klein-Gordon est donnée par

$$\Delta_{KG}(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{e^{ikx}}{k^2 - m^2 - i\epsilon} d^4k$$

et dans le cas sans interactions, l'amplitude de transition du vide au vide est donnée par

$$Z_0[J] = N \exp\left(-\frac{i}{2} \int J(x)\Delta_{KG}(x-y)J(y)\, d^4x\, d^4y\right).$$

8.2.2 Avec interaction

8.3 Le champs de Dirac

8.3.1 Champs libre

Pour le champs de Dirac libre, le taux de transition du vide au vide en présence de sources η et $\bar{\eta}$ (qui sont des variables de Grassman est ainsi donné par l'expression

$$Z_0[\eta, \bar{\eta}] = \frac{1}{N} \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \exp\left[i \int (\bar{\psi} D\psi + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta) d^4x\right].$$

où $D = i\gamma \cdot \partial - m$ est l'opérateur de Dirac.

En prenant

$$D^{-1}(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{e^{-ipx}}{\gamma^\mu p_\mu - m} d^4p = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{\gamma^\mu p_\mu + m}{p^2 - m^2} e^{-ipx} d^4p$$

Le propagateur de Dirac, on obtient

jauge!de Feynman

$$Z_0[\eta,\bar\eta] = \frac{1}{N}\exp\left[-i\int \bar\eta(x)D^{-1}(x-y)\eta(y)d^4x\,d^4y\right]$$

8.3.2 Avec interaction

En présence d'interactions, La probabilité de transition du vide au vide en présence de source devient

$$Z[\eta,\bar\eta] = \exp\left[i\int \mathcal{L}_{\text{int}}\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta\eta},\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta\bar\eta}\right)d^4x\right]Z_0[\eta,\bar\eta].$$

8.4 Les champs de jauge

L'intégration fonctionnelle sur les champs de jauge est perturbée à cause de l'invariance de jauge. Ainsi, des champs qui ne diffèrent que par une transformation de jauge, apportent la même contribution à l'action et aussi à l'intégrale fonctionnelle. Il est ainsi essentiel de fixer la jauge par un terme dans le lagrangien

$$\mathcal{L}_{GF} = -\frac{1}{2}(\partial_\mu A^\mu)^2$$

qui est la *jauge de Feynman* ou, de façon plus générale

$$\mathcal{L}_{GF} = -\frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)^2$$

qui permet également de trouver un propagateur pour le champs

$$D_{\mu\nu}(k) = -\frac{1}{k^2}\left[g_{\mu\nu}+(\xi-1)\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right].$$

jauge!de Landau
jauge!axiale

Ainsi

$$\begin{cases} \text{si } \xi \to 1 \ : & \text{jauge de Feynman} \\ \text{si } \xi \to 0 \ : & \text{jauge de Landau.} \end{cases}$$

8.4.1 Champs de jauges non-abéliennes

Les fantômes de Fadeev-Popov

La jauge axiale

Soit t un vecteur de type espace $t^\mu t_\mu = -1$. La *jauge axiale* est donnée par

$$t^\mu A^a_\mu = 0,$$

et le terme du lagrangien qui fixe la jauge est

$$\mathcal{L}_{GF} = -\frac{1}{2\xi}(t^\mu A^a_\mu)^2.$$

La fixation de jauge se fait par

$$F^a = t^\mu A^a_\mu$$

et on a

$$\delta F^a = f^{abc} A^b_\mu t^\mu \Lambda^c + t^\mu \partial_\mu \Lambda^a = t^\mu \partial \Lambda^a$$

de sorte que

$$\frac{\delta F^a}{\delta \Lambda^b} = \delta^{ab} t^\mu \partial_\mu.$$

Cette dernière expression ne contient plus le champs de jauge de sorte que les fantômes et les champs sont découplés. Grâce à ce choix de jauge, la partie des fantômes peut s'intégrer séparément et ne conduit qu'à un facteur multiplicatif. Le propagateur est toutefois un peu plus complexe

Le lagrangien donne la partie quadratique

$$\frac{1}{2}\int A^{a\mu}\left(\Box g_{\mu\nu}-\partial_\mu\partial_\nu-\frac{1}{\xi}t_\mu t_\nu\right)A^{a\nu}d^4x.$$

L'opérateur entre parenthèses s'exprime, dans l'espace des impulsions

$$-k^2 g_{\mu\nu}+k_\mu k_\nu-\frac{1}{\xi}t_\mu t_\nu,$$

dont l'inverse est donné par

$$-\frac{i}{k^2}\left[g^{\mu\nu}+\frac{t^2}{(k\cdot t)^2}k^\mu k^\nu-\frac{k^\mu t^\nu+t^\mu k^\nu}{k\cdot t}\right]\delta^{ab}.$$

condition!asymptoti
faible
LSZ

Chapitre 9

La matrice S

La condition *asymptotique faible* de Lehmann, Symanzik et Zimmermann (LSZ)[LSZ55]

$$\lim_{t\to\pm\infty} \langle a \left|\phi(x)\right| b\rangle = \left\langle a \left|\phi_{\text{in}}^{\text{out}}(x)\right| b\right\rangle$$

L'opérateur S est défini par la relation

$$\phi_{\text{out}}(x) = S^{\dagger}\phi_{\text{in}}S.$$

9.1 La formule de réduction

On obtient finalement

$$S =: \exp\left[\int \phi_{in}(z)\frac{\delta}{\delta J(z)}dz\right] : Z[J]$$

Les éléments de la matrice S sont obtenus en développant l'exponentielle et, avec la définition de la fonction de Green à n points

$$\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x_1)}\cdots\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x_n)}Z[J]\bigg|_{J=0} = G(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

multiplie par l'opérateur de Klein-Gordon

$$\prod_{i=1}^{n}(\Box_{x_i} + m^2),$$

pour enlever les branches extérieures et enfin par

$$\prod_{i=1}^{n}\phi(x_i)$$

pour les particules libres extérieures.

Finalement, on peut écrire

$$S_n(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n}\phi(x_i)(\Box_{x_i} + m^2)G(x_1, \ldots, x_n).$$

Dans le cas de champs spineurs, on multiplie par l'opérateur de Dirac $D_x = (i\gamma \cdot \partial - m)$.

propagateur!habillé
propagateur!comple

Chapitre 10

Renormalisation

10.1 Introduction

Cas de la théorie $\lambda\phi^4$ le propagateur habillé ou complet

$$G_c^{(2)}(x, y)$$

graphes tronqués.

1-particules irréductibles (1PI). Self-énergie propre

$$\frac{1}{i}\Sigma(p).$$

$$
\begin{aligned}
G_c^{(2)} &= G_0(p) + G_0(p)\frac{\Sigma(p)}{i}G_0(p) + G_0(p)\frac{\Sigma(p)}{i}G_0(p)\frac{\Sigma(p)}{i}G_0(p) + \dots \\
&= \left(G_0(p) - \frac{\Sigma(p)}{i}G_0(p)\right)^{-1} \\
&= \frac{i}{p^2 - m^2 - \Sigma(p)}
\end{aligned}
$$

$$m_{\text{phys}}^2 = m^2 + \Sigma(p)$$

$$G_c^{(2)}(p)\Gamma^{(2)}(p) = i$$

d'où

$$\Gamma^{(2)}(p) = p^2 - m^2 - \Sigma(p)$$

On pose la transformée de Legendre de W

$$W[J] = \Gamma[\phi] + \int d^4x\, J(x)\phi(x).$$

on trouve

$$\frac{\delta^3\Gamma}{\delta\phi(y)\delta\phi(y')\delta\phi(y'')} = -\int d^4x\, d^4x'\, d^4x''\Gamma(x,y)\Gamma(x',y')\Gamma(x'',y'')\frac{\delta^3 W}{\delta J(x)\delta J(x')\delta$$

10.2 Identité de Ward-Takahashi en QED

En QED

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + i\bar{\psi}\gamma^\mu(\partial_\mu + ieA_\mu)\psi - m\bar{\psi}\psi$$
$$- \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)^2 + J^\mu A_\mu + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta$$

et

$$Z = N\int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi \exp\left[i\int \mathcal{L}d^4x\right]$$

où l'on a absorbé le facteur des fantômes dans la constante de normalisation N.

Les termes de la deuxième ligne ne sont pas invariants de jauge et lors d'une transformation infinitésimale de jauge

$$A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu\Lambda, \qquad \psi \to \psi - ie\Lambda\psi, \qquad \bar{\psi} \to \bar{\psi} + ie\Lambda\psi$$

Z prend un facteur

$$\delta Z = \exp\left[i\int d^4x\,\left(-\frac{1}{\xi}(\partial^\mu A_\mu)\Box\Lambda + J^\mu\partial_\mu\Lambda - ie\Lambda(\bar{\psi} - \bar{\psi}\eta)\right)\right]$$

soit, après quelques intégrations par parties

$$\delta Z = \exp\left[i\int d^4x\,\left(-\frac{1}{\xi}\Box(\partial^\mu A_\mu) - \partial_\mu J^\mu - ie(\bar{\psi} - \bar{\psi}\eta)\right)\Lambda\right]$$

Or Z doit être invariante par transformation de jauge, il en découle que ce facteur, vu comme un opérateur sur Z est

identité de!Ward-Takahashi
Ward-Takahashi|seeidentité de

l'identité. Autrement dit

$$\left[\frac{i}{\xi}\Box\partial^\mu \frac{\delta}{\delta J^\mu} - \partial^\mu J_\mu - e\left(\bar\eta\frac{\delta}{\delta\bar\eta} - \eta\frac{\delta}{\delta\eta}\right)\right] Z[\eta,\bar\eta,J] = 0$$

identité de!Ward
Ward|seeidentité de

Avec $Z = e^{iW}$ on obtient

$$-\frac{1}{\xi}\Box\partial^\mu \frac{\delta W}{\delta J^\mu} - i\partial^\mu J_\mu - ie\left(\bar\eta\frac{\delta W}{\delta\bar\eta} - \eta\frac{\delta W}{\delta\eta}\right) = 0$$

En terme de la fonction de vertex Γ, où

$$\Gamma[\psi,\bar\psi,A_\mu] = W[\eta,\bar\eta,J_\mu] - \int d^4x(\bar\eta\psi + \bar\psi\eta + J^\mu A_\mu)$$

on obtient

$$-\frac{1}{\xi}\Box\partial^\mu A_\mu(x) + i\partial^\mu\frac{\delta\Gamma}{\delta A_\mu(x)} + ie\psi\frac{\delta\Gamma}{\delta\psi(x)} - ie\bar\psi\frac{\delta\Gamma}{\delta\bar\psi(x)} = 0$$

Prenons la dérivée fonctionnelle par rapport à $\psi(x_1)$ et $\bar\psi(x_2)$ avec $\psi = \bar\psi = A_\mu = 0$. On obtient

$$\boxed{q^\mu\Gamma_\mu(p,q,p+q) = D^*(p+q) - D^*(p)}$$

où $D^*(p) = \gamma^\mu p_\mu - m^*$ avec m^* la masse physique, renormalisée. C'est l'*identité de Ward-Takahashi* Dans la limite $q \to 0$ on obtient l'*identité de Ward*

$$\boxed{\frac{\partial D^*}{\partial p^\mu} = \Gamma_\mu(p,0,p).}$$

Au premier ordre de perturbation on a

$$\frac{\partial D^*}{\partial p^\mu} = \gamma_\mu$$

et

$$\Gamma_\mu(p, q, p+q) = \gamma_\mu.$$

Ainsi l'identité de Ward est automatiquement satisfaite au premier ordre.

La renormalisation de la QED montre que les fonctions divergentes de la théorie peuvent se mettre sous la forme de coefficients divergents des termes de propagateur nus et de vertex

$$\begin{aligned} D^{-1^*} &\to Z_2 D^{-1} \\ \Gamma_\mu(p, 0, p) &\to \frac{1}{Z_1}\gamma_\mu. \end{aligned}$$

Il découle alors des identités de Ward que

$$Z_1 = Z_2$$

et un seul facteur suffit pour renormaliser la théorie, avec un facteur Z_3 pour la fonction d'onde.

Pour les théories de jauges non-abélienne, il existe également une identité du type de Ward-Takahashi. C'est l'*identité de Slavnov-Taylor*. Avant de l'étudier, il convient de passer par la *transformation de Becchi-Rouet-Stora* (BRST pour BRS transformation).

identité de!Slavnov-Taylor
Slavnov-Taylor|seeidentité de
transformation de!Becchi-Rouet-Stora
transformation de!BRS
BRST

identité de!Slavnov-Taylor

10.3 Transformation de BRS

10.4 Identités de Slavnov-Taylor

En posant

$$\Gamma' = \Gamma + \frac{1}{2\xi} \int d^4x \, (\partial^\nu A^a_\nu)^2,$$

on obtient

$$\boxed{\int d^4x \left[\frac{\delta\Gamma'}{\delta u^{a\mu}} \frac{\delta\Gamma'}{\delta A^a_\mu} + \frac{\Gamma'}{\delta v^a} \frac{\delta\Gamma'}{\delta\eta^a} \right] = 0.}$$

C'est l'*identité de Slavnov-Taylor*

10.5 Renormalisation

10.6 Liberté asymptotique

10.7 Anomalies

Chapitre 11

Extensions

.1 Fourier transforms

Let f be a function of a single variable x. Its Fourier transform is

$$F(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ikx} dx$$

.1.1 Exponential

Let $f(x) = e^{-i\kappa x}$ and let's take its Fourier transform. To make it converge multiply by $e^{-\epsilon|x|}$ with $\epsilon > 0$ and that will be made to tend to zero at the end of the calculation.

$$F_\epsilon(k) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\kappa-k)x-\epsilon|x|} dx$$

We thus get

$$F_\epsilon(k) = \left[\frac{e^{-i(\kappa-k)x+\epsilon x}}{-i(\kappa-k)+\epsilon}\right]_{-\infty}^{0} + \left[\frac{e^{-i(\kappa-k)x-\epsilon x}}{-i(\kappa-k)-\epsilon}\right]_{0}^{\infty}$$

that is

$$\begin{aligned}
F_\epsilon(k) &= \frac{1}{-i(\kappa-k)+\epsilon} - \frac{1}{-i(\kappa-k)-\epsilon} \\
&= \frac{1}{-i(\kappa-k)+\epsilon} + \frac{1}{i(\kappa-k)+\epsilon} \\
&= \frac{2\epsilon}{\epsilon^2 + (\kappa-k)^2} \\
&= F_\epsilon(k-\kappa)
\end{aligned}$$

For $\kappa \neq k$, $F_0(k-\kappa) = 0$ when we set $\epsilon = 0$, whereas when $\kappa = k$ we have

$$F_0(k-\kappa) = \frac{2}{\epsilon} \to \infty, \quad \text{as} \quad \epsilon \to 0.$$

So that

$$F_0(k) = \begin{cases} 0, & \text{for } k \neq 0 \\ \infty & \text{for } k = 0 \end{cases}$$

Moreover we have

$$\int_{-\infty}^{\infty} F_\epsilon(k-\kappa) dk = \frac{2}{\epsilon} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+(\frac{\kappa-k}{\epsilon})^2} dk = 2\left[\arctan\left(\frac{k-\kappa}{\epsilon}\right)\right]_{-\infty}^{\infty} = 2\pi$$

which result is independent of ϵ.

Finally, for a function $f(k)$ we have

$$I_\epsilon(\kappa) = \int_{-\infty}^{\infty} f(k)F(k)dk = 2\epsilon \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(k)}{\epsilon^2 + (k-\kappa)^2} = 2\epsilon \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(u+\kappa)}{\epsilon^2+u^2}.$$

where $u = k - \kappa$. We can do that integral by the residue theorem, and integrate along a closed curve that goes from $-\infty$ to ∞ and around the upper complex plane that contains the pole $u = i\epsilon$, so that

$$I_\epsilon(\kappa) = 2\epsilon 2\pi i \left. \frac{f(i\epsilon+\kappa)}{(\epsilon - iu)(\epsilon+iu)}(u-i\epsilon)\right|_{u=i\epsilon} = 2\epsilon 2\pi \frac{f(\kappa+i\epsilon)}{2\epsilon}$$

So as $\epsilon \to 0$ we have

$$I_0(\kappa) = 2\pi f(\kappa).$$

This justify to set

$$F_0(k-\kappa) = 2\pi\delta(k-\kappa).$$

as the Dirac delta distribution.

.2 Potentials

Let $V(r)$ be a spherically symmetric 3-dimensional potential

$$V(\vec{r}) = V(r)$$

with $r = \|\vec{r}\|$.

Let's suppose the potential has the form

$$V_\alpha(r) = \kappa r^\alpha$$

Since the potential depends explicitly only on $r = \|\vec{r}\|$, The ϕ and θ azimuthal and polar angle can be done explicitly. The Fourier transform then depends only on the radial component of the wave vector $\tilde{V} = V(q)$ with $q = \|\vec{q}\|$.

.2.1 Fourier transform

The Fourier transform of V is then

$$\tilde{V}_\alpha(q) = \int d^3r V_\alpha(r) e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} = 2\pi \int_0^\infty r^2 V(r)\, dr \int_{-1}^1 e^{iqrz} dz$$

where $z = \cos(\theta)$ with $\theta \in [0,\pi]$ and the integration on $\phi \in [0, 2\pi]$ is already performed. We used the volume element $d^3r = rd\theta\, r\sin(\theta) d\phi\, dr = r^2 d\big(\cos(\theta)\big) d\phi\, dr$.

Since by following θ, $z = \cos(\theta)$ goes from 1 to -1, reversing the limits of integration cancels the minus sign from the differential of z.

Doing the z integration we are left with

$$\tilde{V}_\alpha(q) = 2\pi \int_0^\infty r^2 V_\alpha(r) \frac{e^{iqr} - e^{-iqr}}{iqr} dr = \frac{4\pi}{q} \int_0^\infty r V_\alpha(r) \sin(qr) dr$$

For the central potential mentioned above, we have then

$$\tilde{V}_\alpha(r) = \frac{4\pi}{q} \kappa \int_0^\infty r^{\alpha+1} \sin(qr) dr$$

.2.2 Dirac distribution

The functional form of the Dirac distribution is defined by

$$f(x) = \int f(y) \delta(x - y) dy$$

So the Fourier transform of δ is

$$\tilde{\delta}(q) = \int \delta(x) e^{iqx} = e^{iq0} = 1.$$

.2.3 Inverse Fourier transform and Dirac distribution

The inverse Fourier transform of a function is defined as

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int \tilde{f}(q) e^{-iqx}.$$

If we apply this definition to the Fourier transform of the Dirac function, we have

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iqx} dq$$

which does not converge. To make it convergent we can add a term $-\epsilon q$ in the exponential

$$\frac{1}{\pi}\int e^{-iqx-\epsilon|q|} dq$$

and take $\epsilon \to 0$ at the end of the integration. We get then

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{-iqx-\epsilon q}}{-ix-\epsilon}\right]_0^{\infty} + \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{-iqx+\epsilon q}}{-ix+\epsilon}\right]_{-\infty}^{0} \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{ix+\epsilon} + \frac{1}{\epsilon - ix}\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\frac{2\epsilon}{\epsilon^2 + x^2} \\
&= \frac{1}{\pi}\frac{\epsilon}{\epsilon^2 + x^2}.
\end{aligned}$$

As $x \neq 0$, in the limit $\epsilon \to 0$ we have $f(x) = 0$.

Before taking the limit $\epsilon \to 0$ when $x = 0$, let's calculate

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \frac{\epsilon}{\pi}\int \frac{dx}{\epsilon^2 + x^2} = \frac{\epsilon}{\pi}\frac{1}{\epsilon}\arctan(\frac{x}{\epsilon})\Big|_{-\infty}^{\infty} = 1.$$

So that the integral is independent of ϵ. Moreover, when $x = 0$ we have

$$f(0) = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon\pi} = \infty$$

This means that f is everywhere nul except in zero where it diverges and its integral is unity. This looks a lot like the Dirac distribution functional form.

So, in all generality, we can state that

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\epsilon}{\epsilon^2 + x^2} = \delta(x).$$

.2.4 Inverse Fourier transform

The inverse Fourier transform of a Fourier transform $\tilde{V}$ is given by

$$V(r) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3q\, V(q) e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}}.$$

If $\tilde{V}(q)$ is the Fourier tranform of $V(r)$

$$\tilde{V}(q) = \int d^3r V(r) e^{i\vec{q}\vec{r}}$$

then the inverse Fourier transform of $\tilde{V}$ is

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3q \int d^3r V(r) e^{i\vec{q}\cdot\vec{r} - i\vec{q}\cdot\vec{r}'} &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3r V(r) \int d^3q e^{i\vec{q}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')} \\
&= \int d^3r V(r) \delta^3(\vec{r} - \vec{r}') \\
&= V(r')
\end{aligned}$$

So, as its name suggests, the inverse Fourier transform gives back the original function.

.3 Coulomb-like potential

In the cas of the Coulomb-like potential we have $\alpha = -1$

$$V_{-1}(r) = \kappa \frac{1}{r}$$

and the Fourier transform of V_{-1} is

$$\tilde{V}_{-1}(q) = \frac{4\pi}{2iq}\kappa \int_0^\infty \left(e^{(iq-\epsilon)r} - e^{-(iq+\epsilon)r} \right) dr$$

where ϵ is to be taken as $\epsilon \to 0$ at the end of the integration, to make the integral finite. So we get

$$\begin{aligned}
\tilde{V}_{-1}(q) &= \frac{4\pi\kappa}{2iq} \left[\frac{e^{(iq-\epsilon)r}}{iq-\epsilon} + \frac{e^{-(iq+\epsilon)r}}{iq+\epsilon} \right]_0^\infty \\
&= \frac{4\pi\kappa}{2iq} (- \frac{1}{iq} - \frac{1}{iq}) \\
&= - \frac{4\pi\kappa}{2iq} \frac{2}{iq}
\end{aligned}$$

That is

$$\boxed{\tilde{V}_{-1}(q) = \frac{4\pi\kappa}{q^2}.}$$

Clearly, we have also

$$\boxed{V_{-1}(r) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3q \frac{4\pi\kappa}{q^2} e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}} = \frac{\kappa}{r}.}$$

.4 Constant potential

The constant potential case is given by $\alpha = 0$

$$V(r) = \kappa.$$

Here we have

$$\begin{aligned}
\tilde{V}_0(q) &= \frac{4\pi}{2iq}\kappa \int_0^\infty r\left(e^{(iq-\epsilon)r} - e^{-(iq+\epsilon)r}\right)dr \\
&= \frac{4\pi}{2iq}\kappa \int_0^\infty \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial q}\left(e^{(iq-\epsilon)r} + e^{-(iq+\epsilon)r}\right)dr \\
&= \frac{4\pi}{2iq}\kappa\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial q}\left[\frac{e^{(iq-\epsilon)r}}{iq-\epsilon} - \frac{e^{-(iq+\epsilon)r}}{iq+\epsilon}\right]_0^\infty
\end{aligned}$$

That is

$$\begin{aligned}
\tilde{V}_0(q) &= \frac{4\pi}{2iq}\kappa\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial q}\left[-\frac{1}{iq-\epsilon} + \frac{1}{iq+\epsilon}\right] \\
&= \frac{4\pi}{2iq}\kappa\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial q}\frac{-2\epsilon}{q^2+\epsilon^2}
\end{aligned}$$

and with $\epsilon \to 0$ we recover

$$\boxed{\tilde{V}_0(q) = \frac{4\pi}{q}\kappa\delta'(q)}$$

where $\delta'(q) = \frac{\partial}{\partial q}\delta(q)$.

.5 Linear potential

For $\alpha = 1$ we have

$$\begin{aligned}
\tilde{V}_1(q) &= \frac{4\pi}{2iq}\kappa \int_0^\infty r^2 \left(e^{(iq-\epsilon)r} - e^{-(iq+\epsilon)r} \right) dr \\
&= \frac{4\pi}{2iq}\kappa \int_0^\infty \frac{1}{i^2}\frac{\partial^2}{\partial q^2} \left(e^{(iq-\epsilon)r} - e^{-(iq+\epsilon)r} \right) dr \\
&= \frac{4\pi}{2iq}\kappa \frac{\partial^2}{\partial q^2} \left[\frac{1}{iq-\epsilon} + \frac{1}{iq+\epsilon} \right]_0^\infty \\
&= -\frac{4\pi}{2iq}\kappa \frac{\partial^2}{\partial q^2} \frac{2iq}{q^2+\epsilon^2} \\
&= -\frac{4\pi}{q}\kappa \frac{\partial^2}{\partial q^2} \frac{1}{q}
\end{aligned}$$

where we let $\epsilon \to 0$ in the last step.

So we finally get

$$\boxed{\tilde{V}_1(q) = -\frac{8\pi}{q^4}\kappa.}$$

.6 Yukawa potential

Let us consider

$$V_Y(r) = \frac{e^{-\alpha r}}{r}$$

We have then, where the ϵ converging factor has been omitted, since the exponential with α makes the integral converge

$$\begin{aligned}
\tilde{V}_Y(q) &= \frac{4\pi}{2iq}\int_0^\infty \left(e^{(iq-\alpha)r} - e^{-(iq+\alpha)r}\right) dr \\
&= \frac{4\pi}{2iq}\left[\frac{e^{(iq-\alpha)r}}{iq-\alpha} + \frac{e^{-(iq+\alpha)}}{iq+\alpha}\right]_0^\infty \\
&= -\frac{4\pi}{2iq}\left(\frac{1}{iq-\alpha} + \frac{1}{iq+\alpha}\right) \\
&= \frac{4\pi}{2iq}\frac{2iq}{q^2+\alpha^2}
\end{aligned}$$

So that

$$\boxed{\tilde{V}_Y(q) = \frac{4\pi}{q^2+\alpha^2}.}$$

.7 Yukawa-like potentials

We can now consider potentials of the form

$$V_{Y\alpha} = r^\alpha e^{-\alpha r}$$

for which the Fourier transform is given by

$$\tilde{V}_{Y\alpha}(q) = \frac{4\pi}{2iq}\int_0^\infty r^{\alpha+1}\left(e^{(iq-\alpha)r} - e^{-(iq+\alpha)r}\right) dr$$

These are the same integrals found before except that now, we do not take $\alpha \to 0$.

Annexe A

Intégration n-dimensionnelle

Annexe B

The Second Appendix

Bibliographie

[AH93] I. J. R. Aitchison and A. J. G. Hey. *Gauge Theories in Particle Physics.* Institute of Physics Publishing, 2nd edition, 1993.

[BD64] James D. Bjorken and Sidney D. Drell. *Relativistic Quantum Mechanics.* McGraw-Hill, 1964.

[BD65] James D. Bjorken and Sidney D. Drell. *Relativistic Quantum Fields.* McGraw-Hill, 1965.

[Ble50] K. Bleuler. *Helv. Phys. Acta*, 23 :567, 1950.

[Gri87] David Griffiths. *Introduction to Elementary Particles.* Wiley, 1987.

[Gup50] S.N. Gupta. Theory of longitudinal photons in quantum electrodynamics. *Proc. Phys. Soc. A*, 63(7) :681, 1950.

[Gup69] S.N. Gupta. Comment on quantum electrodynamics. *Phys. Rev.*, 180(5) :1601, 1969.

[LSZ55] H. Lehmann, K. Symanzik, and W. Zimmermann. *Nuovo Cimento*, 1 :425, 1955.

[Pau41] W. Pauli. Relativistic field theories of elementary particles. *Rev. Mod. Phys.*, 13 :203, 1941.

[PS95] Michael E. Peskin and Daniel V. Shroeder. *An Introduction to Quantum Field Theory.* Westview Press, 1995.

[Qui97] Chris Quigg. *Gauge Theories of Strong, Weak, and Electromagnetic Interactions.* Westview Press, 1997.

[Ryd96] Lewis H. Ryder. *Quantum Field Theory.* Cambridge University Press, 2nd edition, 1996.

[YM54] C.N. Yang and R.L. Mills. Conservation of isotopic spin and isotopic gauge invariance. *Phys. Rev.*, 96(1) :191, 1954.