Relativité Générale

G. Pasa (27 mai 2018)

Table des matières

Chapitre 1

Relativité restreinte

1.1 Introduction

Le point de départ de la théorie de la relativité restreinte provient de la constance de la vitesse de la lumière dans le vide. Elle est désormais l'étalon de mesure pour le mètre et est considérée comme une constante universelle à laquelle on a attribué la valeur exacte

$$c = 299'792'458\,\mathrm{m\,s^{-1}}.$$

Sans revenir sur les expériences à résultats nuls qui sont en accord avec cette hypothèse, reprenons quelques expériences de pensées qui conduisent à des résultats remarquables, conséquences de ce postulat.

1.1.1 Relativité de la simultanéité

Deux événements sont dits simultanés s'ils ont lieux en même temps pour un observateur donné. L'expérience du train d'Einstein, montre que cette notion n'est pas absolue.

Selon Newton, le temps est absolu et s'écoule de manière identique pour tous. Aussi, si deux événements sont simultanés pour un observateur O, ils seront également simultanés pour tout observateur d'inertie O' qui observe ces mêmes événements. Cela ne dépend en outre pas de l'état de mouvement de cet observateur par rapport à O.

Avec Einstein considérons un train voyageant à vitesse constante. Supposons qu'à un certain moment, il passe devant un observateur situé le long des voies. Dans un wagon du train, il y a un voyageur immobile dans le wagon. Au milieu du wagon se trouve une lampe. Lorsque la lampe passe devant l'observateur le long des voies, elle s'allume subitement en émettant des photons dans toutes les directions.

Nous nous intéressons aux photons émis vers l'avant et vers l'arrière. Comme la lampe est placée exactement au milieu du wagon, le voyageur verra les photons arriver exactement au même instant sur la paroi avant et sur la paroi arrière du wagon.

Mais supposons que le train avance à la vitesse V le long des voies que nous considérons être le long de l'axe Ox, pour l'observateur le long des voies. Supposons encore que le wagon ait une longueur $2L$. Ainsi, à l'instant où la lampe s'allume, la lampe a comme coordonnée $x = 0$, la paroi avant $x = L$ et la paroi arrière $x = -L$.

Les photons voyagent à la vitesse de la lumière c vers l'avant et vers l'arrière.

Les photons qui voyagent vers l'avant, atteindront la paroi avant au temps t_a tel que

$$ct_a = L + Vt_a \;\Leftrightarrow\; t_a = \frac{L}{c - V}.$$

Les photons qui voyagent vers l'arrière, atteindront la paroi arrière au temps t_b

$$-ct_b = -L + Vt_b \;\Leftrightarrow\; t_b = \frac{L}{c + V}.$$

Clairement $t_b < t_a$, autrement dit, la paroi arrière sera éclairée avant la paroi avant. Du moins c'est ce que l'observateur le long des voies verra.

Cette simple expérience montre que le voyageur et l'observateur le long des voies ne sont pas d'accord sur la simultanéité des événements 'la paroi arrière est illuminée' et 'la paroi avant est illuminée' : la simultanéité dépend de l'observateur.

Nous verrons par la suite que la plupart des paradoxes apparents de la relativité restreinte sont des manifestations du fait que la simultanéité des événements n'est pas une notion absolue, amis dépend de l'observateur.

1.1.2 Dilatation du temps

On considère deux miroirs parallèles entre eux et parallèles à Ox et séparés par une distance $\frac{\ell}{2}$. Un faisceau lumineux oscille d'un miroir à l'autre, orthogonalement aux miroirs et à Ox. Dans le référentiel de repos de l'horloge, le temps t d'un aller-retour est lié à ℓ par

$$t = \frac{\ell}{c}$$

Un observateur en mouvement selon Ox à la vitesse $-v$ observe l'horloge. Pour lui, l'horloge est animée d'une vitesse v selon Ox. Lors d'un aller-retour, il mesure un temps t' tel que

$$ct' = \sqrt{\ell^2 + v^2 t'^2} \;\Leftrightarrow\; c^2 t'^2 = \ell^2 + v^2 t'^2$$

d'où

$$t'^2 = \frac{\ell^2}{c^2 - v^2} = \frac{c^2 t^2}{c^2 - v^2}$$

$$\boxed{t' = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}}$$

En posant $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$, on a

$$t' = \gamma t.$$

1.1.3 Contraction des longueurs

Le phénomène de contraction des longueurs peut également être mis en évidence par l'horloge à lumière. Tournons l'horloge à lumière de 90° afin que la lumière oscille dans le sens du déplacement, selon Ox. Dans ce cas, le lien entre ℓ et t est encore

$$\ell = ct$$

dans le référentiel au repos de l'horloge.

Dans le référentiel en mouvement, l'observateur voit la lumière osciller avec une période t'. D'après la discussion précédente, on a

$$t' = \gamma t = \gamma \frac{\ell}{c}$$

où $\ell = ct$ est la distance aller-retour dans le référentiel de repos des miroirs.

Clairement, la distance entre les miroirs dans le référentiel en mouvement ne peut pas être ℓ, notons-la ℓ'. C'est la longueur qu'a l'horloge lumineuse de longueur "propre" ℓ, lorsqu'elle est en mouvement à la vitesse v par rapport à un observateur.

Dans le référentiel où les miroirs avances à la vitesse v, considérons le miroirs arrière comme premier miroir, le miroir de départ de la lumière. La lumière partant du premier miroir doit rattraper le second miroir qui avance à la vitesse v. Elle met un temps t'_a pour atteindre le second miroir

$$ct'_a = \frac{\ell'}{2} + vt'_a \;\Leftrightarrow\; t'_a = \frac{\frac{\ell'}{2}}{c - v}.$$

Une fois arrivé le faisceau lumineux est réfléchi en direction du premier miroir, qu'il atteint après un temps t'_r

$$ct'_r = \frac{\ell'}{2} - vt_r \;\Leftrightarrow\; t'_r = \frac{\frac{\ell'}{2}}{c + v}$$

Le temps total d'un aller-retour dans le référentiel en mouvement sera mesuré comme

$$t' = t'_a + t'_r = \frac{\ell'}{2}\left(\frac{1}{c - v} + \frac{1}{c + v}\right) = \ell' \frac{c}{c^2 - v^2} = \frac{\ell'}{c}\gamma^2.$$

Or $t' = \gamma t$ et on voit alors que

$$\frac{\ell'}{c}\gamma^2 = t' = \gamma t = \gamma \frac{\ell}{c} \;\Leftrightarrow\; \ell' = \ell \frac{1}{\gamma}$$

soit

$$\boxed{\ell' = \ell \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Cette relation montre que l'horloge lumineuse en mouvement semble plus courte que lorsqu'elle est au repos. Il en va de même de la longueur de tout objet dans le sens de son déplacement.

1.1.4 Paradoxes apparents

Les relations que l'on vient de rencontrer peuvent mener à des situations étranges, qui nous mettent mal à l'aise.

Paradoxe du garage

Soit une voiture de longueur $L = 5$ m dans son référentiel de repos. Soit encore un garage de longueur L dans son référentiel de repos également. Initialement la porte arrière du garage est fermée et la porte avant est ouverte. On suppose que le garage est équipé de portes automatiques d'un système d'une rapidité fulgurante. Dès que l'avant du véhicule touche la porte arrière du garage, celle-ci s'ouvre et la porte arrière se ferme.

Le véhicule avance en direction du garage à la vitesse $v = \frac{4}{5}c$. Un observateur assis sur le toit du garage voit le véhicule avancer dans sa direction, mais ce véhicule a une longueur $L' = \frac{L}{\sqrt{1-\frac{16}{5}}} = \frac{3}{5}L = 3$ m. Le garage est donc assez long pour contenir toute la voiture à un instant donné. Aussi, lorsque l'avant du véhicule touchera la porte arrière du garage, la porte avant peut se fermer sans problème, la voiture sera complètement à l'intérieur du garage.

Le pilote, quant à lui, voit le garage avancer vers lui à une vitesse $v = \frac{4}{5}c$. Pour lui, c'est le garage qui ne mesure que 3 m. Aussi, selon lui, lorsque l'avant du véhicule touchera la porte arrière du garage, il restera encore 2 m de véhicule dehors du garage. Si la porte avant se ferme, le véhicule sera abimé.

Le problème apparent est que deux observateurs qui regardent la même scène semblent arriver à des conclusions totalement différentes. Nous verrons plus loin la résolution de ce paradoxe apparent.

Paradoxe des jumeaux(de Langevin)

Dans le cas du paradoxe des jumeaux de Langevin, deux jumeaux identiques décident de se séparer le temps d'un voyage. Le jumeau 1 décide de partir vers une étoile voisine, disons α-Proxima, située à 4.5 années-lumières de la Terre, tandis que son jumeau l'attend sur Terre.

La vitesse du voyageur est d'environ $v = \frac{3}{5}c$. Aussi, son jumeau (le numéro 2) attendra son frère pendant $t = \frac{9\text{ a.l.}}{\frac{3}{5}c} = 15$ ans (pour l'aller-retour). Or cette durée, lorsque le sédentaire la compare à celle de son frère en mouvement qui doit avoir un temps dilaté n'est que de $t' = \gamma t = \frac{4}{5}t = 12$ ans. Aussi, pour le frère en mouvement, la durée écoulée n'est que de 12 ans. Lorsqu'il reviendra sur Terre, il aura 3 ans de moins que le jumeau resté sur Terre.

Mais du point de vue du voyageur, c'est le jumeau resté sur Terre qui se déplace à la vitesse v. Donc c'est le jumeau terrien qui devrait être plus jeune, lorsque le voyageur revient sur Terre.

Là encore, les situations au retour du voyageur sont irréconciliables, apparemment, selon le point de vue.

1.2 Espace-temps

Soit un observateur O. Nous appellerons *événement* pour l'observateur O un point de l'espace P de coordonnées spatiales dans le référentiel de O $P(x_P, y_P, z_P)$ avec une quatrième composante notée avant les autres (composante numéro zéro) qui est le temps auquel on considère ce point de l'espace. Aussi, l'événement P aura comme coordonnées (ct_P, x_P, y_P, z_P) [1] On appelle *espace-temps* l'ensemble de ces événements.

La vitesse de la lumière est la même dans tout référentiel d'inertie. Tous les observateur d'inertie mesurent la même valeur pour la vitesse de la lumière. Aussi, deux événements $P(ct_P, x_P, y_P, z_P)$ et $Q(ct_q, x_Q, y_Q, z_Q)$ liés par un faisceau lumineux sont liés au temps de passage de la lumière en ces événements par

$$c|t_P - t_R| = \delta(P, Q)$$

ce qui peut s'écrire

$$c^2(t_P - t_R)^2 = (x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2 + (z_P - z_Q)^2.$$

Si P et Q sont séparés par des coordonnées infinitésimales, on peut écrire

$$c^2dt^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

ou, ce qui revient au même,

$$c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = 0.$$

Pour deux événements quelconques infinitésimalement proches, on peut définir l'expression

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

qui ne vaut plus zéro s'ils ne peuvent être reliés par un rayon lumineux.

1. Le facteur c devant la coordonnée de temps permet d'avoir des coordonnées mesurées en mètre.

a) Si $ds^2 > 0$ on dit que les événements sont séparés par un intervalle du type temps.
b) Si $ds^2 < 0$ on dit que les événements sont séparés par un intervalle du type espace.
c) Si $ds^2 = 0$ on dit que les événements sont séparés par un intervalle du type lumière ou qu'ils se trouvent sur le cône lumière.

Ces séparations de l'espace-temps pour les événements par rapport à un événement de référence P déterminent le partage de l'espace-temps en 4 zones distinctes :

a) Le **futur** : l'ensemble des événements Q liés à P par un intervalle du genre temps et pour lesquels $\Delta t > 0$.
b) Le **passé** :l'ensemble des événements Q liés à P par un intervalle du genre temps et pour lesquels $\Delta t < 0$.
c) Le **cône-lumière** : L'ensemble des événements Q liés à P par un intervalle lumière.
d) L'**ailleur** : l'ensemble des événements Q liés à P par un intervalle du genre espace et qui ne peuvent être atteint, ou qui ne peuvent atteindre P, par aucun signal.

Cette division de l'espace-temps est universelle. Tous les observateurs inertiels concordent sur les événements de ces ensembles.

Comme les signaux ne peuvent se propager plus rapidement que la lumière, une relation causale ne peut exister que pour des événements liés par un intervalle du genre temps.

1.3 Transformations de Lorentz

Étant donnés deux événements $E(ct, x, y, z)$ et $E'(ct', x', y', z')$, l'intervalle

$$\Delta s = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2$$

ne doit par dépendre du référentiel d'inertie dans lequel il est mesuré. C'est un invariant relativiste.

Dans la forme infinitésimale, cet intervalle devient la *forme fondamentale*

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2.$$

En définissant le tenseur métrique de Minkowski

$$g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$$

l'intervalle infinitésimal s'écrit

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu.$$

Un changement de référentiel d'inertie homogène

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$$

est une transformation de Lorentz, si elle conserve la métrique de Minkowski. La longueur de l'intervalle espace-temps est alors conservée.

Une transformation de Lorentz inhomogène (transformation de Poincaré)

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu$$

conserve également cette quadri-distance.

Une transformation de Lorentz est une combinaison de *rotations* (qui ne transforment que les composantes spatiales) et de *boosts* (qui transforment la composante temporelle avec des composantes spatiales).

1.3.1 Boosts selon Ox, Oy et Oz

Supposons qu'un événement ait comme coordonnées (ct, x, y, z) dans un référentiel $\mathcal{R}$. Supposons encore qu'un observateur O' observe ce même événement dans une référentiel $\mathcal{R}'$ en mouvement à la vitesse $\vec{v}$ par rapport à $\mathcal{R}$ et soit (ct', x', y', z') les coordonnées de ce même événement dans $\mathcal{R}'$. On veut déterminer les coordonnées dans $\mathcal{R}'$ supposant connues les coordonnées dans $\mathcal{R}$.

Si à l'instant $t = t' = 0$ les origines des deux référentiels coïncident et que l'axe Ox coïncide avec l'axe $O'x'$ qui est l'axe du mouvement, le vecteur vitesse aura comme composante $\vec{v} = (v, 0, 0)$.

$$\begin{cases} ct' &= \dfrac{ct - \frac{vx}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ x' &= \dfrac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ y' &= y \\ z' &= z \end{cases}$$

En définissant $\beta = \dfrac{v}{c}$ et $\gamma = (1-\beta^2)^{\frac{1}{2}}$ on peut récrire cette transformation

$$\begin{cases} ct' &= \gamma(ct - \beta x) \\ x' &= \gamma(x - \beta ct) \\ y' &= y \\ z' &= z \end{cases}$$

Pour un boost dans la direction Oy ou Oz on échange simplement x avec y ou z respectivement.

1.4 Groupe de Lorentz et de Poincaré

1.5 Dynamique relativiste

$$\frac{dp}{d\tau} = \gamma \vec{F}$$

1.6 Tenseur électromagnétique

Des équations de Maxwell homogènes

$$\begin{cases} \nabla \cdot B &= 0 \\ \nabla \times E + \dfrac{\partial B}{\partial t} &= 0 \end{cases}$$

on déduit de la première (absence de charge magnétique) que le champs d'induction magnétique est dérivé d'un potentiel vecteur $\vec{A}$

$$B = \nabla \times A.$$

dans la deuxième (loi d'induction de Faraday) on obtient (en échangeant le rotationnel et la dérivée temporelle)

$$\nabla \times (E + \partial_t \vec{A}) = 0.$$

On en déduit que l'expression entre parenthèses est le gradient d'un champ scalaire

$$E + \partial_t \vec{A} = -\nabla\phi.$$

Ainsi

$$\begin{cases} B &= \nabla \times \vec{A} \\ E &= -\nabla\phi - \dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t} \end{cases}$$

Les potentiels forment les composantes d'un quadri-vecteur contravariant [2]

$$A^\mu = (\frac{\phi}{c}, \vec{A}) \longleftrightarrow A_\mu = (\frac{\phi}{c}, -\vec{A})$$

En notation différentielle, on peut construire la forme différentielle (où $dx^0 = c\,dt$ et $dx^1 = dx$, $dx^2 = dy$ et $dx^3 = dz$)

$$A = A_\mu dx^\mu = \phi\, dt - \vec{A} \cdot d\vec{x} = \frac{\phi}{c}\, dx^0 - \vec{A} \cdot d\vec{x}.$$

Le tenseur électromagnétique (MTW : de Faraday) s'obtient alors en posant

$$F = dA = \partial_\mu A_\nu dx^\mu \wedge dx^\nu$$

soit

$$F = (\partial_i \frac{\phi}{c} + \partial_0 A_i) dx^i \wedge dx^0 - (\partial_1 A_2 - \partial_2 A_1) dx^1 \wedge dx^2 - (\partial_1 A_3 - \partial_3 A_1) dx^1 \wedge dx^3 - (\partial_2 A_3 - \partial_3 A_2) dx^2 \wedge dx^3$$

On a ainsi

$$F = -\frac{\vec{E}}{c} \cdot d\vec{x} \wedge dx^0 - B_z dx^1 \wedge dx^2 + B_y dx^1 \wedge dx^3 - B_x dx^2 \wedge dx^3$$

2. On convient de noter les composantes cartésiennes A_x, A_y et A_z toujours avec les indices en bas, et de mentionner les indices covariants et contravariants uniquement avec les nombres (convention de Ryder).

En notant $F = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu$, où $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$, on obtient l'expression matricielle du tenseur covariant

$$(F_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{E_x}{c} & \frac{E_y}{c} & \frac{E_z}{c} \\ -\frac{E_x}{c} & 0 & -B_z & B_y \\ -\frac{E_y}{c} & B_z & 0 & -B_x \\ -\frac{E_z}{c} & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

Le tenseur contravariant s'obtient en montant les indices

$$(F^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{E_x}{c} & -\frac{E_y}{c} & -\frac{E_z}{c} \\ \frac{E_x}{c} & 0 & -B_z & B_y \\ \frac{E_y}{c} & B_z & 0 & -B_x \\ \frac{E_z}{c} & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

Le tenseur covariant étant une 2-forme exacte [3] (étant la différentielle d'une 1-forme), on a évidemment [4]

$$dF = d^2 A = 0.$$

En développant cette dernière égalité, on retrouve les équations de Maxwell homogènes, à partir desquelles nous avons commencé cette section.

On obtient une 2-forme non close en définissant son dual (qui est encore une 2-forme)

$$\tilde{F} = *F, \qquad \tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\alpha\beta}.$$

La différentielle du dual est alors une 3-forme, dont le dual est une 1-forme J

$$d * F = *J.$$

Cette 1-forme J obéit alors à la loi de conservation

$$d * J = d^2 * F = 0.$$

En posant $J = (\frac{\rho}{c}, \vec{\jmath})$, l'équation $d * F = *J$ prend la forme des deux équations de Maxwell inhomogènes (avec $c = 1$)

$$\begin{cases} \nabla \cdot E & = \rho \\ \nabla \times B - \partial_t E & = \vec{\jmath} \end{cases}$$

1.6.1 Transformation des potentiels lors d'un boost

Considérons un boost qui transforme un référentiel $\mathcal{R}$ dans un référentiel $\mathcal{R}'$ en déplacement dans la direction Ox à la vitesse $\vec{v}$

$$\Lambda = (\Lambda^\mu{}_\kappa) = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le quadri-potentiel se transforme comme un quadri-vecteur $A^\mu = (A_t, \vec{A})$ avec $A_t = \frac{\phi}{c}$,

$$A'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu$$

Ce qui donne lors d'un boost dans la direction Ox

$$A'^\mu = \Big(\gamma(A_t - \beta A_x); \gamma(A_x - \beta A_t); A_y; A_z \Big)$$

soit

$$A'^\mu = \Big(\gamma(\frac{\phi}{c} - \beta A_x); \gamma(A_x - \beta \frac{\phi}{c}); A_y; A_z \Big)$$

3. Une forme ω est close si $d\omega = 0$. Elle est exacte s'il existe une forme α telle que $\omega = d\alpha$. Il est aisé de montrer que toute forme exacte est close $d(d\alpha) = 0$. Le lemme de Poincaré affirme que dans un espace étoilé, toute forme close est exacte.

4. En effet, les dérivées secondes obtenues $\partial_j \partial_k A_m$ sont symétriques alors que les différentielles $dx^j \wedge dx^k$ sont antisymétriques. Ainsi tous les termes du développement sont nuls.

1.6.2 Transformation des champs lors d'un boost

Considérons un boost qui transforme un référentiel $\mathcal{R}$ dans un référentiel $\mathcal{R}'$ en déplacement dans la direction Ox à la vitesse $\vec{v}$

$$\Lambda = (\Lambda^\mu{}_\kappa) = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le tenseur de Faraday se transforme selon

$$F'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu{}_\kappa \Lambda^\nu{}_\rho F^{\kappa\rho}.$$

Concernant les éléments diagonaux on a

$$F'^{\mu\mu} = \Lambda^\mu{}_\kappa \Lambda^\mu{}_\rho F^{\kappa\rho}.$$

Ainsi, en évitant les termes en $F^{\nu\nu}$ qui sont nuls, on prend $\kappa \neq \rho$

$$F'^{00} = \Lambda^0{}_\kappa \Lambda^0{}_\rho F^{\kappa\rho} = \Lambda^0{}_0 \Lambda^0{}_1 F^{01} + \Lambda^0{}_1 \Lambda^0{}_0 F^{10} = \Lambda^0{}_0 \Lambda^0{}_1 (F^{01} + F^{10}) = 0.$$

vu que F est antisymétrique.

Il en va de même des éléments spatiaux

$$F'^{11} = \Lambda^1{}_\kappa \Lambda^1{}_\rho F^{\kappa\rho} = \Lambda^1{}_0 \Lambda^1{}_1 F^{01} + \Lambda^1{}_1 \Lambda^1{}_0 F^{10} = \Lambda^1{}_0 \Lambda^1{}_1 (F^{01} + F^{10}) = 0.$$

et pour $k \in \{2, 3\}$, seuls les termes diagonaux du boost sont non nuls et donc

$$F'^{kk} = \Lambda^k{}_k \Lambda^k{}_k F^{kk} = 0.$$

Concernant les termes non-diagonaux

$$F'^{10} = \Lambda^1{}_\kappa \Lambda^0{}_\rho F^{\kappa\rho} = \Lambda^1{}_0 \Lambda^0{}_1 F^{01} + \Lambda^1{}_1 \Lambda^0{}_0 F^{10} = (-\beta\gamma)^2(-E_x) + \gamma^2 E_x = E_x \gamma^2 (1 - \beta^2) = E_x.$$

Ce qui montre que

$$E'_x = E_x.$$

Pour $k \in \{2, 3\}$, avec $\Lambda^k{}_k = 1$, on a

$$F'^{k0} = \Lambda^k{}_k \Lambda^0{}_\rho F^{k\rho} = \Lambda^k{}_k \Lambda^0{}_0 F^{k0} + \Lambda^k{}_k \Lambda^0{}_1 F^{k1} = \gamma(E_k) - \beta\gamma(-1)^k B_{5-k}.$$

d'où

$$\begin{cases} \dfrac{E'_y}{c} &= \gamma\left(\dfrac{E_y}{c} - \beta B_z\right) \\ \dfrac{E'_z}{c} &= \gamma\left(\dfrac{E_z}{c} + \beta B_y\right). \end{cases}$$

En généralisant ce résultat, avec $c = 1$, on observe que

$$\begin{cases} \vec{E}'_\parallel &= \vec{E}_\parallel \\ \vec{E}'_\perp &= \gamma(\vec{E}_\perp + \vec{v} \times \vec{B}) \end{cases}$$

Avec

$$\vec{E}_\parallel = \vec{\beta}\frac{(\vec{\beta} \cdot \vec{E})}{\beta^2} \quad \text{et} \quad \vec{E}_\perp = \vec{E} - \vec{E}_\parallel$$

On peut récrire la règle de transformation du champ électrique sous la forme

$$\begin{aligned} \vec{E}' &= \vec{E}'_\parallel + \vec{E}'_\perp \\ &= \vec{\beta}\frac{(\vec{\beta} \cdot \vec{E})}{\beta^2} + \gamma\left(\vec{E} - \vec{\beta}\frac{(\vec{\beta} \cdot \vec{E})}{\beta^2} + \vec{v} \times \vec{B}\right) \\ &= \frac{1 - \gamma}{\beta^2}(\vec{\beta} \cdot \vec{E})\vec{\beta} + \gamma\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right) \end{aligned}$$

Or $\beta^2 = 1 - \frac{1}{\gamma^2} = \frac{\gamma^2 - 1}{\gamma^2}$, ainsi

$$\boxed{\vec{E}' = -\gamma^2 \frac{\vec{\beta}}{1 + \gamma}(\vec{\beta} \cdot \vec{E}) + \gamma\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right)}$$

Il reste à calculer les composantes spatiales du tenseur de Faraday. Soit

$$F'^{32} = B'_x = \Lambda^3{}_3\Lambda^2{}_2 F^{32} = B_x.$$

et

$$F'^{13} = B'_y = \Lambda^1{}_\rho\Lambda^3{}_3 F^{\rho 3} = \gamma F^{13} - \beta\gamma F^{03} = \gamma(B_y + \beta E_z)$$

et finalement

$$F'^{21} = B'_z = \Lambda^2{}_2\Lambda^1{}_\rho F^{3\rho} = -\beta\gamma F^{20} + \gamma F^{21} = \gamma(B_z - \beta E_y)$$

On peut récrire la règle de transformation du champ magnétique sous la forme

$$\begin{aligned}
\vec{B}' &= \vec{B}'_\parallel + \vec{B}'_\perp \\
&= \vec{\beta}\frac{(\vec{\beta}\cdot\vec{B})}{\beta^2} + \gamma\left(\vec{B} - \vec{\beta}\frac{(\vec{\beta}\cdot\vec{B})}{\beta^2} - \frac{1}{c}\vec{\beta}\times\vec{E}\right) \\
&= \frac{1-\gamma}{\beta^2}(\vec{\beta}\cdot\vec{B})\vec{\beta} + \gamma\left(\vec{B} - \frac{1}{c}\vec{\beta}\times\vec{E}\right)
\end{aligned}$$

soit

$$\boxed{\vec{B}' = -\gamma^2\frac{\vec{\beta}}{1+\gamma}(\vec{\beta}\cdot\vec{B}) + \gamma\left(\vec{B} - \frac{1}{c}\vec{\beta}\times\vec{E}\right)}$$

Chapitre 2

Géométrie Différentielle

Lorsque le même indice est présent dans une expression, une fois en haut et une fois en bas, une somme sur toutes les valeurs possibles de l'indice est sous-entendue (convention d'Einstein).

2.1 Variétés différentielles

Soit $\mathcal{M}$ un ensemble, U un ouvert de $\mathcal{M}$ et ϕ un homéomorphisme de U vers $\mathbb{R}^n$. Le couple (U, ϕ) est une *carte* de M sur l'ouvert U. Soit $P \in U$ et $\phi(P) = (x^1, \ldots, x^n) \in \mathbb{R}^n$. Les nombres x^i sont les *coordonnées locales* de P par la carte (U, ϕ).

Un *atlas* sur $\mathcal{M}$ est un ensemble de cartes $\{(U_i, \phi_i)\}_{i\in I}$ qui recouvrent M

$$\bigcup_{i\in I} U_i = \mathcal{M}.$$

Si deux cartes (U_i, ϕ_i) et (U_j, ϕ_j) ont une intersection non vide, alors l'application $\phi \circ \phi_j^{-1}$ établit une correspondance entre les coordonnées de (U_j, ϕ_j) et celles de (U_i, ϕ_i) de telle sorte que

$$\phi_i(P) = y, \quad \phi_j(P) = x, \qquad \text{alors} \qquad \phi_i \circ \phi_j^{-1}(x) = y.$$

Si les $\phi_i \circ \phi_j^{-1}$ sont des homéomorphismes entre ouverts de $\mathbb{R}^n$, de $\phi_j(U_i \cap U_j)$ vers $\phi_i(U_i \cap U_j)$, alors $\mathcal{M}$ muni de cet atlas est une *variété topologique* de dimension n.

Si les $\phi_i \circ \phi_j^{-1}$ sont des difféomorphismes, alors $\mathcal{M}$ est une *variété différentielle*, de classe $\mathcal{C}^k$ si les $\phi_i \circ \phi_j^{-1}$ sont de classe $\mathcal{C}^k$.

Une variété vérifie la propriété de *Hausdorf* si elle est *séparable* : pour toute paire d'éléments $\{P, Q\}$ de M il existe des voisinages U_P de P et U_Q de Q disjoints.

Une *fonction* de $\mathcal{M}$ vers $\mathbb{R}$ définit une fonction induite de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}$ définie par $f_\phi = f \circ \phi^{-1}$, sur la carte (U, ϕ) d'un ouvert U de $\mathcal{M}$. La fonction f est *différentiable* en $P \in \mathcal{M}$ si la fonction f_ϕ est différentiable en $\phi(P)$.

La valeur de la fonction f en P ne dépend pas de la carte utilisée, ainsi, pour tout $P \in U_i \cap U_j$, si

$$\phi_i(P) = y \quad \text{et} \quad \phi_j(P) = x,$$

alors

$$f_{\phi_i}(y) = f_{\phi_j}(x) = f(P).$$

Le *gradient* de f en P est également un concept indépendant de la carte utilisée, c'est un objet essentiellement géométrique défini dans une carte (U, ϕ) en tant que dérivées partielles de f_ϕ. Si (U_i, ϕ_i) et (U_j, ϕ_j) sont des cartes de M, avec

$$\phi_i(P) = y \qquad \text{et} \qquad \phi_j(P) = x$$

alors

$$\frac{\partial f_{\phi_i}}{\partial y^k}(y) = \frac{\partial f_{\phi_j}}{\partial y^k}(x(y)) = \frac{\partial f_{\phi_j}}{\partial x^m}(x)\frac{\partial x^m}{\partial y^k}.$$

Cette règle de transformation de la carte (U_j, ϕ_j) à la carte (U_i, ϕ_i) montre que le gradient de f se transforme comme un *vecteur covariant.* Un vecteur covariant est également désigné par l'expression 1-*forme* ou encore *forme différentielle.*

2.2 Vecteurs

Un *vecteur tangent* d'une variété différentiable est un objet intriséque défini sans référence à un système de coordonnées. Un vecteur tangent v_P en un point P d'une variété $\mathcal{M}$ est un opérateur différentiel linéaire du premier ordre qui agit sur les fonctions différentiables définies sur un voisinage de P. Si (U, ϕ) est une carte de $\mathcal{M}$ au voisinage du point P

$$v(f(P)) = v(f(\phi^{-1}(x))) = v(f_\phi(x)).$$

Soit une paramétrisation d'une courbe c de $\mathcal{M}$ passant par $P = c(0)$

$$c : \mathbb{R} \to \mathcal{M} \quad \lambda \to P(\lambda) = c(\lambda).$$

La courbe c définit alors également une courbe dans $\mathbb{R}^n$ via une carte (U, ϕ) d'un voisinage de P dans M

$$c_\phi = \phi \circ c \qquad \text{avec} \qquad c_\phi(\lambda) = \phi \circ c(\lambda) = x(\lambda).$$

Soit v le vecteur tangent à $\mathcal{M}$ en P défini par la courbe c. On peut alors écrire que l'action du vecteur tangent v à $\mathcal{M}$ en P le long de la courbe c est

$$v(f) = \frac{df}{d\lambda}(c_\phi(\lambda))\bigg|_{\lambda=0} = \frac{\partial f_\phi}{\partial x^k}(c_\phi(\lambda))\frac{dc_\phi^k(\lambda)}{d\lambda}\bigg|_{\lambda=0} = v^k \frac{\partial f_\phi}{\partial x^k}(x)$$

où l'on a posé

$$v^k = \frac{dc_\phi^k}{d\lambda}(\lambda)\bigg|_{\lambda=0}.$$

Cette définition est indépendante de la carte utilisée.

Si $P \in U_i \cap U_j$ et (U_i, ϕ_i), (U_j, ϕ_j) sont deux cartes de $\mathcal{M}$ au voisinage de P, on peut écrire

$$v(f) = v_y^k \frac{\partial f_{\phi_i}}{\partial y^k} = v_y^k \frac{\partial f_{\phi_j}}{\partial x^m}\frac{\partial x^m}{\partial y^k} = v_x^m \frac{\partial f_{\phi_j}}{\partial x^m}$$

avec $x = \phi_j(P)$ et $y = \phi_i(P)$. Ainsi la loi de transformation des composantes de v est

$$v_x^m = v_y^k \frac{\partial x^m}{\partial y^k}.$$

Cette loi de transformation est la loi des vecteurs *contravariants*.

On peut ainsi définir le vecteur tangent v en P comme l'opérateur différentiel

$$v = v_x^m \frac{\partial}{\partial x^m}.$$

En définissant les vecteurs $e_m = \frac{\partial}{\partial x^m}$, on peut écrire

$$v = v^m e_m$$

où les vecteurs e_m définissent une base d'un espace vectoriel $T_P\mathcal{M}$ appelé l'*espace tangent* à $\mathcal{M}$ en P. Les vecteurs e_m sont les vecteurs tangents à la variété $\mathcal{M}$ de l'image des courbes de coordonnées de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathcal{M}$.

2.3 Formes différentielles 1-formes

L'espace dual $T_P^*\mathcal{M}$ de $T_P\mathcal{M}$ est l'*espace cotangent* à $\mathcal{M}$ en P. L'espace $T_P^*\mathcal{M}$ est l'espace des vecteurs covariants, ou des formes différentielles.

Soit $\omega \in T_P^*\mathcal{M}$, et $v \in T_P\mathcal{M}$, l'action de ω sur v est

$$\langle \omega, v \rangle = \omega_n v^m \langle \theta^n, e_m \rangle$$

où les θ^n forment la base duale des e_m et vérifient

$$\langle \theta^n, e_m \rangle = \delta_m^n.$$

Ainsi

$$\langle \omega, v \rangle = \omega_m v^m$$

où la somme sur m est entendue.

Il en découle que les composantes de ω se transforment, en passant de la carte (U_j, ϕ_j) à la carte (U_i, ϕ_i), avec $x = \phi_j(P)$ et $y = \phi_i(P)$ selon la loi

$$\omega_{y,i} = \omega_{x,j} \frac{\partial x^j}{\partial y^i}.$$

On note généralement les vecteurs de base de $T_P^*\mathcal{M}$ dx^k, de sorte que

$$\omega = \omega_k dx^k$$

et

$$\langle dx^k, \frac{\partial}{\partial x^m} \rangle = \frac{\partial x^k}{\partial x^m} = \delta^k_m.$$

2.4 Dérivée d'une fonction entre variétés

Soit $\varphi : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ une fonction lisse entre les variétés $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$. Soit $P \in \mathcal{M}$ et $Q \in \mathcal{N}$ tels que $Q = \varphi(P)$.

Soit $g_\mathcal{N} : \mathcal{N} \to \mathbb{R}$ une fonction sur $\mathcal{N}$. La fonction φ induit sur $\mathcal{M}$ la fonction $g_\mathcal{N} \circ \varphi$ par

$$(g_\mathcal{N} \circ \varphi)(P) = g_\mathcal{N}(\varphi(P)) = g_\mathcal{N}(Q).$$

La fonction φ induit une fonction φ_* (*pushforward*), parfois notée $d\varphi_P$, entre les espaces tangents $T_P\mathcal{M}$ et $T_Q\mathcal{N}$ en P et Q respectivement,

$$\begin{aligned} d\varphi_P :& T_P\mathcal{M} \to T_Q\mathcal{N} \\ & v_p \mapsto v_Q = d\varphi_P(v_P) \end{aligned} \qquad \text{ou} \qquad \begin{aligned} \varphi_* :& T_P\mathcal{M} \to T_Q\mathcal{N} \\ & v_p \mapsto v_Q = \varphi_* v_P \end{aligned}$$

où l'image de v_P par φ_* est définie par

$$(\varphi_* v_P)(g_\mathcal{N}) = v_P(g_\mathcal{N} \circ \varphi) \quad \text{ou} \quad \big(d\varphi_P(v_P)\big)(g_\mathcal{N}) = v_P(g_\mathcal{N} \circ \varphi).$$

Ainsi l'image par φ_* d'un vecteur de $T_P\mathcal{M}$ est un vecteur de $T_Q\mathcal{N}$, et cette identification ne dépend pas des cartes utilisées en P et en Q.

Soit (U, ϕ) une carte d'un voisinage de P et (V, ψ) une carte d'un voisinage de Q. La fonction φ défini une fonction entre les coordonnées x du voisinage U de P et les coordonnées y du voisinage V de Q

$$\tilde{\varphi} = \psi \circ \varphi \circ \phi^{-1}$$

telle que $\tilde{\varphi}(x) = y = (\tilde{\phi^1}(x), \dots, \tilde{\phi^m}(x))$ où m est la dimension de $\mathcal{N}$. On peut alors calculer les composantes de $\varphi_* v_P$ en observant son action sur une fonction réelle $g_\mathcal{N}$ sur $\mathcal{N}$ (ou plutôt sur la partie de $\mathbb{R}^m$ définie par (V, ψ))

$$(\tilde{\varphi}_* v_P)(g_\mathcal{N}) = v_P(g_\mathcal{N} \circ \tilde{\varphi}) = v^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}(g_\mathcal{N} \circ \tilde{\varphi}) = v^\mu \frac{\partial g_\mathcal{N}}{\partial y^\nu} \frac{\partial \tilde{\varphi^\nu}}{\partial x^\mu}$$

de sorte que les composantes de $\tilde{\varphi}_* v_P$ sont

$$v_Q^\nu = (\tilde{\varphi}_* v_P) = v^\mu \frac{\partial \tilde{\varphi^\nu}}{\partial x^\mu}.$$

La matrice des $\frac{\partial \tilde{\varphi^\nu}}{\partial x^\mu}$ n'est rien d'autre que la matrice jacobienne de $\tilde{\varphi}$, induite par φ entre les espaces de coordonnées. Ainsi φ_* est la dérivée de φ, que l'on note généralement $\varphi'(P)$ ou encore $d\varphi(P)$.

La fonction φ induit encore une application φ^* (*pullback*) de $T_Q^*\mathcal{N}$ vers $T_P^*\mathcal{M}$ telle que pour toute forme $\omega_Q \in T_Q^*\mathcal{N}$, $\varphi^*\omega_Q$ est une forme ω_P de $T_P^*\mathcal{M}$,

$$\begin{aligned} \varphi^* :& T_Q^*\mathcal{N} \to T_P^*\mathcal{M} \\ & \omega_Q \mapsto \omega_P = \varphi^*\omega_Q \end{aligned}$$

par

$$\langle \varphi^*\omega_Q, v_P \rangle = \langle \omega_Q, \varphi_* v_P \rangle.$$

2.5 Tenseurs

Un tenseur est une application linéaire sur les produits tensoriels de $T_P\mathcal{M}$ ou $T_P^*\mathcal{M}$ vers $\mathbb{R}$. Une base des tenseurs est fournie par les produits tensoriels des vecteurs de base e_m et θ^n. Aussi les vecteurs de base de la forme

$$e_k \otimes e_m \otimes \theta^n$$

définissent un tenseur de $T_P^*\mathcal{M} \otimes T_P^*\mathcal{M} \otimes T_P\mathcal{M}$ vers $\mathbb{R}$ de la forme

$$t = t^{km}{}_n(e_k \otimes e_m \otimes \theta^n)$$

où les coefficients $t^{km}{}_n$ sont les composantes du tenseur de type $(2,1)$ pour 2 fois contravariant et 1 fois covariant. En effet, les coefficients se transforment lors d'un changement de système de coordonnées, selon

$$(t_x)^{km}{}_n = (t_y)^{ab}{}_c \frac{\partial x^k}{\partial y^a} \frac{\partial x^m}{\partial y^b} \frac{\partial y^c}{\partial x^n}$$

On définit de la même manière toute sorte de tenseurs de degré (p,q) divers en construisant une base adéquate et en produisant des combinaisons linéaires de ces éléments de base.

De manière générale, un tenseur T de type (p,q) est une application

$$T : \bigotimes_p T_P^*\mathcal{M} \bigotimes_q T_P\mathcal{M} \to \mathbb{R}.$$

Un tel tenseur opère sur p formes et q vecteurs

$$T(\omega_1, \ldots, \omega_p; v_1, \ldots, v_q) \in \mathbb{R}.$$

Un représentant d'un tenseur T de type (p,q) dans une base $e_\mu\ \theta^\nu$ donnée est défini par ses composantes

$$T^{\alpha_1 \ldots \alpha_p}{}_{\beta_1 \ldots \beta_q}.$$

La contraction d'un tenseur T avec ses arguments s'écrit alors

$$T^{\alpha_1 \ldots \alpha_p}{}_{\beta_1 \ldots \beta_q} \omega_{1,\alpha_1} \ldots \omega_{p,\alpha_p} v_1^{\beta_1} \ldots v_q^{\beta_q}.$$

Le propre d'un tenseur est que sa valeur, lorsqu'il est évalué sur des formes et des vecteurs, ne dépend pas du système de coordonnées utilisé. Ainsi, ses composantes se transforment selon les règles de transformation des formes et des vecteurs. Les indices contravariant (supérieurs) se transforment comme les vecteurs et les indices covariants (inférieurs) se transforment comme les formes.

Par exemple on a, pour un tenseur $(1,1)$

$$T^\alpha{}_\beta \omega_\alpha v^\beta = (T')^{\alpha'}{}_{\beta'} (\omega')_{\alpha'} (v')^{\beta'}$$

avec

$$(\omega')_{\alpha'} = \omega_\alpha \frac{\partial x^\alpha}{\partial (x')^{\alpha'}} \qquad \text{et} \qquad (v')^{\beta'} = v^\beta \frac{\partial (x')^{\beta'}}{\partial x^\beta}.$$

Ainsi, pour conserver l'égalité de la valeur du tenseur dans les deux systèmes de coordonnées, il faut que

$$(T')^{\alpha'}{}_{\beta'} = T^\alpha{}_\beta \frac{\partial (x')^{\alpha'}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\beta}{\partial (x')^{\beta'}}.$$

2.6 Dérivée de Lie

Soit V un champ de vecteurs sur une variété $\mathcal{M}$ tel qu'en tout point $P \in \mathcal{M}$, V définit un vecteur $V(P)$.

Le champs de vecteur V génère un flot $f_V(t,P)$

$$\begin{aligned} f_V(\bullet, P) :& I \to \mathcal{M} \\ & t \mapsto P_t = f_V(t) \end{aligned}$$

pour tout $P \in \mathcal{M}$ et pour tout $t \in I$, un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, $0 \in I$, si

$$f_V(0,P) = P$$

et que

$$\left. \frac{df_V(t,P)}{dt} \right|_t = V(P_t).$$

On dit que $f_V(t,P)$ est une courbe intégrale du champs de vecteur V.

Le flot f_V définit un déplacement sur M qui permet de définir une dérivée, la *dérivée de Lie* de champ V.

2.6.1 Dérivée de Lie d'un vecteur

Soit $P \in \mathcal{M}$ et $f_t = f_V(t, P)$ le flot passant par $P = f_0$, en $t = 0$, et défini par le champs de vecteur V. La *dérivée de Lie d'un vecteur* v est le vecteur défini par la différence entre le vecteur du champs v évalué en $f_t = f_V(t, P) = P'$ et ramené en P par le flot du champs V et le vecteur du même champs v évalué directement en P

$$\mathcal{L}_V(v) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left[(f_{-t*}) v|_{f_t} - v|_{f_0} \right]$$

Ainsi, $v|_{f_t}$ est évalué en $f_t = P'$ et pour $t \to 0$, on a

$$\phi(f_t) = x + t\tilde{V}(x)$$

dans une carte (U, ϕ) de $\mathcal{M}$ contenant P, où $x = \phi(P)$ et où $\tilde{V}$ est le vecteur des composantes de V.

Or

$$v|_{f_t} = v(\phi(f_t))^\alpha e_\alpha|_{f_t} = \left[v(x)^\alpha + t\tilde{V}^\mu \frac{\partial v(x)^\alpha}{\partial x^\mu} \right] e_\alpha$$

soit

$$v|_{f_t} = \left(v^\alpha(x) + t\tilde{V}^\mu \frac{\partial v^\alpha(x)}{\partial x^\mu} \right) e_\alpha|_{f_t}$$

dans la base e_α en f_t.

Enfin, f_{-t*} ramène ce vecteur en P et comme

$$(f_{-t*} v) g = v[g \circ f_{-t}]$$

on a

$$\begin{aligned}
\left[(f_{-t*}) v|_{f_t(P)} \right]^\kappa &= \left(v(x)\nu + t\tilde{V}^\mu \frac{\partial v(x)^\nu}{\partial x^\mu} \right) \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left(x^\kappa - t\tilde{V}^\kappa \right) \\
&= \left(v(x)^\nu + t\tilde{V}^\mu \frac{\partial v(x)^\nu}{\partial x^\mu} \right) \left(\delta^\kappa{}_\nu - t \frac{\partial \tilde{V}^\kappa}{\partial x^\nu} \right) \\
&= \left(v(x)^\kappa + t\tilde{V}^\mu \frac{\partial v(x)^\kappa}{\partial x^\mu} - t v(x)^\nu \frac{\partial \tilde{V}^\kappa}{\partial x^\nu} \right)
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\boxed{\mathcal{L}_V(v) = [V, v] = \left(\tilde{V}^\mu \frac{\partial v(x)^\kappa}{\partial x^\mu} - v(x)^\mu \frac{\partial \tilde{V}^\kappa}{\partial x^\mu} \right) \partial_\kappa.}$$

On vérifie que $\mathcal{L}_V$ satisfait la règle de Leibnitz et est linéaire pour l'addition des vecteurs

1. $\mathcal{L}_V(u + v) = \mathcal{L}_V(u) + \mathcal{L}_V(v)$
2. $\mathcal{L}_V(u \otimes v) = \mathcal{L}_V(u) \otimes v + u \otimes \mathcal{L}_V(v)$.

2.6.2 Dérivée de Lie d'une fonction

De plus, sur une fonction f, on a

$$\boxed{\mathcal{L}_V(f) = V[f].}$$

2.6.3 Dérivée de Lie d'une 1-forme

Il en découle que pour une 1-forme ω on obtient

$$\boxed{\mathcal{L}_V(\omega) = \left(V^\mu \frac{\partial \omega_\nu}{\partial x^\mu} + \omega_\mu \frac{\partial V^\mu}{\partial x^\nu} \right) dx^\nu}$$

La dérivée de Lie d'une 1-forme est encore une 1-forme. En effet

$$\mathcal{L}_V(\omega_\mu v^\mu) = V[\omega_\mu v^\nu] = V^\nu \partial_\nu(\omega_\mu v^\nu) = V^\nu(\partial_\nu \omega_\mu) v^\nu + V^\nu \omega_\mu \partial_\nu v^\mu$$

D'autre part

$$\mathcal{L}_V(\omega_\mu v^\mu) = \mathcal{L}_V(\omega_\mu) v^\mu + \omega_\mu \mathcal{L}_V(v^\mu)$$

Ainsi

$$\mathcal{L}_V(\omega_\mu) v^\mu = V^\nu(\partial_\nu \omega_\mu) v^\nu + V^\nu \omega_\mu \partial_\nu v^\mu - \omega_\mu \mathcal{L}_V(v^\mu)$$

soit

$$\mathcal{L}_V(\omega_\mu) v^\mu = V^\nu(\partial_\nu \omega_\mu) v^\nu + V^\nu \omega_\mu \partial_\nu v^\mu - \omega_\mu \left(V^\nu \partial_\nu v^\mu - v^\nu \partial_\nu V^\mu \right).$$

Les deux termes du milieu s'annulent, d'où le résultat annoncé.

2.7 Métrique

Une métrique g sur M est une forme bilinéaire symétrique non-dégénérée sur $T_P\mathcal{M} \otimes T_P\mathcal{M}$ qui s'écrit

$$g = g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu,$$

avec

$$g(u,v) = g(v,u) \Leftrightarrow g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu},$$

et non dégénérée signifiant que pour tout $u \in T_P\mathcal{M}$ non nul, on a

$$g(u,u) \neq 0.$$

Appliquée sur deux vecteurs, le tenseur métrique donne le produit scalaire des deux vecteurs

$$g(u,v) = g_{\mu\nu} u^\alpha v^\beta \langle dx^\mu, \partial_\alpha \rangle \langle dx^\nu, \partial_\beta \rangle = g_{\mu\nu} u^\alpha v^\beta \delta^\mu{}_\alpha \delta^\nu{}_\beta = g_{\mu\nu} u^\mu v^\nu.$$

Le tenseur métrique g permet de définir une application $g : T_P\mathcal{M} \to T_P^*\mathcal{M}$, qui, définie pour un vecteur $u \in T_P\mathcal{M}$, donne l'image

$$g(u) = g(u, \bullet) = g_{\mu\nu} u^\mu dx^\nu = u_\nu dx^\nu.$$

Cette image appliquée sur un vecteur v fournit le produit scalaire $g(u,v)$. Partant de l'écriture de g, on a

$$g(u) = g_{\mu\nu} u^\alpha \langle dx^\mu, \partial_\alpha \rangle dx^\nu = g_{\mu\nu} u^\mu dx^\nu = u_\nu dx^\nu.$$

Ce qui montre que $g(u)$ est bien une 1-forme. Autrement dit, le tenseur métrique permet de transformer un vecteur contravariant en une 1-forme, un vecteur covariant, en abaissant l'indice.

En notant $g^{\mu\nu}$ l'inverse du tenseur métrique

$$g^{\mu\alpha} g_{\alpha\nu} = \delta^\mu_\nu$$

il s'agit d'un tenseur deux fois contravariant

$$g^{\mu\nu} \partial_\mu \otimes \partial_\nu$$

et en appliquant $g^{\mu\nu}$ à la 1-forme définie par le vecteur u on obtient

$$g^{\mu\nu} u_\nu = g^{\mu\nu} g_{\alpha\nu} u^\alpha = \delta^\mu_\alpha u^\alpha = u^\mu.$$

Ainsi $g^{\mu\nu}$ permet de monter les indices et transforme une 1-forme en un vecteur.

Le tenseur métrique peut également être utilisé pour monter ou descendre les indices des tenseurs. En effet, pour chaque indice covariant qui est monté par $g^{\alpha\beta}$, le vecteur sur lequel agit cet indice voit son indice contravariant baisser par $g_{\beta\gamma}$. Or $g^{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} = \delta^\alpha{}_\gamma$ est la matrice unité. Ainsi rien ne change au niveau la contraction du tenseur avec ses arguments et la valeur obtenue lors d'une telle opération ne change pas.

2.7.1 Temps propre

Soit la métrique de signature -2 selon la convention de [LL]

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = g_{00}(dx^0)^2 + 2g_{0i} dx^0 dx^i + g_{ij} dx^i dx^j$$

où dx^μ est un déplacement infinitésimal dans l'espace-temps entre x^μ et $x^\mu + dx^\mu$. ds^2 est un invariant par changement de coordonnées et en un lieu donné, on a $dx^i = 0$ avec $i \in \{1,2,3\}$.

Ainsi

$$ds^2 = g_{00}(dx^0)^2$$

Avec $dx^0 = cdt$ et en posant $ds^2 = c^2 d\tau$ on obtient

$$d\tau^2 = g_{00} dt^2$$

avec t la coordonnée temporelle et τ le temps propre. Ainsi

$$d\tau = \sqrt{g_{00}} dt.$$

2.7.2 Métrique spatiale locale

Avec la métrique de signature -2

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = g_{00}(dx^0)^2 + 2g_{0i}dx^0dx^i + g_{ij}dx^idx^j$$

On veut calculer la distance spatiale $d\ell$ qui sépare deux événements A et B situés en x^μ et $x^\mu + dx^\mu$ respectivement, dans le référentiel où ils sont simultanés. Pour cela on envoie un rayon lumineux de A vers B, qui est réfléchi en B et revient en A. Le temps aller-retour de ce rayon multiplié par c donne $\Delta(dx^0) = 2d\ell$.

Le rayon lumineux se propage selon un intervalle lumière et on a

$$ds^2 = 0 = g_{00}(dx^0)^2 + 2g_{0i}dx^0dx^i + g_{ij}dx^idx^j$$

En résolvant pour dx^0 on obtient

$$dx^0 = \frac{-g_{0i} \pm \sqrt{(g_{0i}dx^i)^2 - g_{00}g_{ij}dx^idx^j}}{g_{00}}$$

Ainsi

$$\Delta(dx^0) = 2\frac{\sqrt{(g_{0i}g_{0j} - g_{00}g_{ij})dx^idx^j}}{g_{00}}$$

Or, $d\ell = \frac{1}{2}\Delta(dx^0)$ de sorte que

$$d\ell^2 = \left(\frac{g_{0i}g_{0j}}{g_{00}^2} - \frac{g_{ij}}{g_{00}}\right)dx^idx^j = \gamma_{ij}dx^idx^j$$

avec

$$\boxed{\gamma_{ij} = \frac{g_{0i}g_{0j}}{g_{00}^2} - \frac{g_{ij}}{g_{00}}.}$$

la métrique spatiale locale.

2.8 Produit extérieur

Une p-forme sur une variété $\mathcal{M}$ est un tenseur covariant complètement antisymétrique de degré p. L'espace des p-formes de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathcal{M}$ est un module (un sous-module de l'ensemble des tenseurs covariants) sur l'anneau des fonctions $\mathcal{C}^k$ désigné par $\Lambda^p(\mathcal{M})$.

Si $\dim(\mathcal{M}) = n$, et $p > n$, alors clairement $\Lambda^p(\mathcal{M}) = \varnothing$.

Le produit extérieur[MTW] $\wedge$ d'une p-forme et d'une q-forme est une application

$$\begin{aligned} \wedge : &\Lambda^p(\mathcal{M}) \times \Lambda^q(\mathcal{M}) \to \Lambda^{p+q}(\mathcal{M}) \\ &(\alpha, \beta) \mapsto \alpha \wedge \beta \end{aligned}$$

avec

$$(\alpha \wedge \beta)(v_1, \ldots, v_{p+q}) = \frac{1}{p!q!}\sum_\pi \operatorname{sign}(\pi)\alpha(v_{\pi(1)}, \ldots, v_{\pi(p)})\beta(v_{\pi(p+1)}, \ldots, v_{\pi(p+q)})$$

En particulier, avec α et β des 1-formes, on a

$$\begin{aligned} (\alpha \wedge \beta)(v_1, v_2) &= \alpha(v_1)\beta(v_2) - \alpha(v_2)\beta(v_1) \\ &= (\alpha \otimes \beta - \beta \otimes \alpha)(v_1, v_2). \end{aligned}$$

Le produit extérieur des formes est

1. *associatif*
$$(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma).$$
2. *bilinéraire*
$$\begin{aligned} \alpha \wedge (\beta + \gamma) &= \alpha \wedge \beta + \alpha \wedge \gamma \\ (\alpha + \beta) \wedge \gamma &= \alpha \wedge \gamma + \alpha \wedge \gamma \\ f(\alpha \wedge \beta) &= (f\alpha) \wedge \beta = \alpha \wedge (f\beta) \end{aligned}$$
3. *non commutatif, en général*
$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{pq}\beta \wedge \alpha.$$

L'ensemble de toutes les formes sur $\mathcal{M}$ muni du produit extérieur forme l'*algèbre extérieure* ou de *Grassman*, qui est notée $\Lambda(\mathcal{M})$.

L'algèbre $\Lambda(\mathcal{M})$, avec le produit extérieur qui est associatif et bilinéaire, est une *algèbre graduée.*

2.9 Connexions

Une connexion permet de comparer des vecteurs sur deux plans tangents différents en effectuant un déplacement parallèle de l'un des vecteurs sur l'autre plan tangent, le long d'une courbe sur la variété $\mathcal{M}$.

Soit une courbe γ sur $\mathcal{M}$, paramétrée par la variable t. On veut définir une dérivée covariante dans le sens que lors d'un changement de coordonnées, la dérivée se transforme comme un tenseur.

Une connexion ∇ est un opérateur différentiel qui prend en compte la courbure de la variété considérée, à savoir, la modification des vecteurs de base d'un point à l'autre de la variété. Si $v = v^\mu e_\mu$ est un vecteur, alors ∇v est la dérivée covariante de v. Si $u = u^\nu e_n u$ est un autre vecteur, alors $< \nabla v, u >$ est la dérivée covariante de v dans la direction u, que l'on écrit

$$\nabla_u v = u^\nu \nabla_\nu v.$$

De manière générale, en prenant la dérivée covariante de v dans la direction d'un vecteur de base e_ν on a

$$\nabla_\nu v = \nabla_\nu (v^\mu e_\mu) = \nabla_\nu (v^\mu) e_\mu + v^\mu \nabla_\nu (e_\mu).$$

En exigeant la compatibilité de la dérivée covariante avec la dérivée définie par les vecteur de base pour les fonctions, on a

$$\nabla_\nu v = \partial_\nu (v^\mu) e_\mu + v^\mu \nabla_\nu (e_\mu).$$

Enfin, la dérivée covariante du vecteur de base $\nabla_\nu (e_\mu)$ est un vecteur de l'espace tangent de la variété au point choisi [1], on peut donc la décomposer dans la base en ce point

$$\nabla_\nu (e_\mu) = \Gamma^\sigma{}_{\mu\nu} e_\sigma$$

de sorte que

$$\boxed{\nabla_\nu v = (\partial_\nu v^\mu + v^\sigma \Gamma^\mu{}_{\sigma\nu}) e_\mu}$$

Les facteurs $\Gamma^\mu{}_{\sigma\nu}$ sont les *coefficients de connexion.*

On vérifie sans peine que pour un vecteur covariant $\alpha = \alpha_\mu \omega^\mu$, on a

$$\boxed{\nabla_\nu \alpha = (\partial_\nu \alpha_\mu - \omega_\sigma \Gamma^\sigma{}_{\mu\nu}) \omega^\mu}$$

2.9.1 Symétrie des connexions

Le commutateur des connexions ∇_u et ∇_v donne, sur une fonction f

$$\begin{aligned}
[\nabla_u, \nabla_v] f &= u^\mu \nabla_\mu (v^\nu \nabla_\nu) f - v^\mu \nabla_\mu (u^\nu \nabla_\nu) f \\
&= u^\mu (\partial_\mu v^\nu + \Gamma^\sigma{}_{\nu\mu} v^\nu) \nabla_\sigma f + u^\mu v^\nu \nabla_\mu \nabla_\nu f - v^\mu (\partial_\mu u^\nu + \Gamma^\sigma{}_{\nu\mu} u^\nu) \nabla_\sigma f - v^\mu u^\nu \nabla_\mu \nabla_\nu f \\
&= (u^\mu \partial_\mu v^\nu - v^\mu \partial_\mu u^\nu) \partial_\nu f + u^\mu v^\nu (\Gamma^\sigma{}_{\nu\mu} - \Gamma^\sigma{}_{\mu\nu}) \partial_\sigma f + u^\mu v^\nu [\nabla_\mu, \nabla_\nu] f \\
&= [u, v] f + u^\mu v^\nu (\Gamma^\sigma{}_{\nu\mu} - \Gamma^\sigma{}_{\mu\nu}) \partial_\sigma f + u^\mu v^\nu [\nabla_\mu, \nabla_\nu] f \qquad (*) \\
&= (\nabla_u v - \nabla_v u) f + u^\mu v^\nu [\nabla_\mu, \nabla_\nu] f
\end{aligned}$$

où l'on a utilisé l'identité

$$(\nabla_u v - \nabla_v u) f = [u, v] f + u^\mu v^\nu (\Gamma^\sigma{}_{\nu\mu} - \Gamma^\sigma{}_{\mu\nu}) \partial_\sigma f. \tag{2.1}$$

En exprimant le dernier commutateur, on obtient

$$\begin{aligned}
[\nabla_\mu, \nabla_\nu] f &= \nabla_\mu \nabla_\nu f - \nabla_\nu \nabla_\mu f \\
&= \nabla_\mu \partial_\nu f - \nabla_\nu \partial_\mu f \\
&= \partial^2_{\mu\nu} f - \Gamma^\sigma{}_{\nu\mu} \partial_\sigma f - \partial^2_{\nu\mu} f + \Gamma^\sigma{}_{\mu\nu} \partial_\sigma f \\
&= (\Gamma^\sigma{}_{\mu\nu} - \Gamma^\sigma{}_{\nu\mu}) \partial_\sigma f \\
&= T^\sigma{}_{\mu\nu} \partial_\sigma f
\end{aligned}$$

Ce qui définit le tenseur de *torsion* T. Les coefficients de connexions ne se transforment pas comme des tenseurs, mais la différence

$$T^\sigma{}_{\mu\nu} = \Gamma^\sigma{}_{\mu\nu} - \Gamma^\sigma{}_{\nu\mu}$$

se transforme comme un tenseur.

De l'égalité $(*)$ ci-dessus, on remarque que sur une fonction f, le commutateur des Γ s'annule exactement avec $[\nabla_\mu, \nabla_\nu]$ et on a

$$[\nabla_u, \nabla_v] f = [u, v] f,$$

1. Pour une preuve de cette affirmation [Wald, p.32–33]

mais en général
$$[\nabla_u, \nabla_v]f = [u, v]f \neq (\nabla_u v - \nabla_v u)f.$$
Exiger la symétrie des connexions, c'est demander que
$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu]f = 0$$
autrement dit, c'est demander que la torsion soit nulle. On a alors $u = u^\mu e_\mu = u^\mu \partial_\mu$ et sur une fonction (mais pas sur un tenseur pour la dernière égalité), on a
$$\nabla_u v - \nabla_v u = [u, v] = [\nabla_u, \nabla_v].$$

Lorsque l'on applique ces commutateurs sur les vecteurs de base, on obtient
$$\nabla_\mu e_\nu - \nabla_\nu e_\mu = ({\Gamma^\sigma}_{\nu\mu} - {\Gamma^\sigma}_{\mu\nu})e_\sigma$$

D'autre part, le commutateur de deux vecteurs de base est un vecteur que l'on peut décomposer dans la base elle-même
$$\nabla_\mu e_\nu - \nabla_\nu e_\mu = [e_\mu, e_\nu] = {c_{\mu\nu}}^\sigma e_\sigma$$
et on en déduit que
$$\boxed{c_{\mu\nu\sigma} = \Gamma_{\sigma\nu\mu} - \Gamma_{\sigma\mu\nu}.}$$

Dans une base holonome, les vecteurs de base commutent. Les coefficients des commutateurs sont tous nuls, ce qui implique que les coefficients de connexion sont symétriques dans leur deux derniers indices (inférieurs)
$$\boxed{{\Gamma^\sigma}_{\mu\nu} = {\Gamma^\sigma}_{\nu\mu}.}$$

2.9.2 Compatibilité avec la métrique

On dit que la connexion est compatible avec la métrique g si
$$\nabla g = 0.$$
On obtient alors pour la direction e_ν
$$0 = \nabla_\nu g_{\alpha\beta} = \partial_\nu g_{\alpha\beta} - g_{\sigma\beta}{\Gamma^\sigma}_{\alpha\nu} - g_{\alpha\sigma}{\Gamma^\sigma}_{\beta\nu}$$
soit
$$\partial_\nu g_{\alpha\beta} = \Gamma_{\beta\alpha\nu} + \Gamma_{\alpha\beta\nu}$$
et en permutant les indices on a encore
$$\begin{aligned} \partial_\alpha g_{\nu\beta} &= \Gamma_{\beta\nu\alpha} + \Gamma_{\nu\beta\alpha} \\ \partial_\beta g_{\nu\alpha} &= \Gamma_{\alpha\nu\beta} + \Gamma_{\nu\alpha\beta} \end{aligned}$$

En ajoutant les deux dernières dérivées et en retranchant la première, on obtient
$$\partial_\alpha g_{\nu\beta} + \partial_\beta g_{\alpha\nu} - \partial_\nu g_{\alpha\beta} = \Gamma_{\beta\nu\alpha} + \Gamma_{\nu\beta\alpha} + \Gamma_{\alpha\nu\beta} + \Gamma_{\nu\alpha\beta} - \Gamma_{\beta\alpha\nu} - \Gamma_{\alpha\beta\nu}. \tag{2.2}$$

La propriété de symétrie des coefficients de connexions nous permet d'écrire
$$\begin{aligned} c_{\alpha\beta\nu} &= \Gamma_{\nu\beta\alpha} - \Gamma_{\nu\alpha\beta} = -c_{\beta\alpha\nu} \\ c_{\beta\nu\alpha} &= \Gamma_{\alpha\nu\beta} - \Gamma_{\alpha\beta\nu} = -c_{\nu\beta\alpha} \\ c_{\nu\alpha\beta} &= \Gamma_{\beta\alpha\nu} - \Gamma_{\beta\nu\alpha} = -c_{\alpha\nu\beta} \end{aligned}$$

et alors la relation (2.2) devient
$$\partial_\alpha g_{\nu\beta} + \partial_\beta g_{\alpha\nu} - \partial_\nu g_{\alpha\beta} = -c_{\nu\alpha\beta} + (c_{\alpha\beta\nu} + 2\Gamma_{\nu\alpha\beta}) - c_{\beta\nu\alpha}$$
et on obtient alors
$$\Gamma_{\nu\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\partial_\alpha g_{\nu\beta} + c_{\beta\nu\alpha} + \partial_\beta g_{\alpha\nu} + c_{\nu\alpha\beta} - \partial_\nu g_{\alpha\beta} - c_{\alpha\beta\nu})$$
que l'on peut écrire en utilisant la symétrie de g et en notant la dérivée partielle avec une virgule
$$\boxed{\Gamma_{\nu\alpha\beta} = \frac{1}{2}(g_{\nu\alpha,\beta} + c_{\nu\alpha\beta} + g_{\beta\nu,\alpha} + c_{\beta\nu\alpha} - g_{\alpha\beta,\nu} - c_{\alpha\beta\nu})}$$

On peut noter la permutation circulaire des indices $\nu\alpha\beta \to \beta\nu\alpha \to \alpha\beta\nu$.

Dans le cas d'une base holonome, les coefficients de commutations de la base sont nuls et on obtient

$$\boxed{\Gamma_{\nu\alpha\beta} = \frac{1}{2}(g_{\nu\alpha,\beta} + g_{\beta\nu,\alpha} - g_{\alpha\beta,\nu})} \quad \text{(base holonome)}$$

et dans une base orthonormée la métrique $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} = \mathrm{diag}(-1,1,1,1)$ est constante

$$\boxed{\Gamma_{\nu\alpha\beta} = \frac{1}{2}(c_{\nu\alpha\beta} + c_{\beta\nu\alpha} - c_{\alpha\beta\nu})} \quad \text{(base non holonome orthonormée)}$$

Les coefficients de connexion sont ensuite simplement donnés par

$$\boxed{\Gamma^{\gamma}{}_{\alpha\beta} = g^{\gamma\nu}\Gamma_{\nu\alpha\beta}.}$$

2.10 Géodésiques

2.10.1 Transport parallèle

Soit $u = \frac{dx^\alpha}{d\tau}e_\alpha = u^\alpha e_\alpha$ un vecteur. On dit que l'on transporte un vecteur v parallèlement au vecteur u si ce vecteur ne varie pas le long de la direction indiquée par u, soit si

$$\frac{d}{d\tau}v = 0$$

où τ est le paramètre de la courbe, dont le vecteur tangent est u. On a ainsi, avec $\frac{d}{d\tau} = \nabla_u = u^\alpha\nabla_\alpha$

$$\nabla_u v = 0,$$

qui s'écrit

$$u^\alpha\nabla_\alpha(v^\beta e_\beta) = 0$$

et en exprimant le membre de gauche

$$u^\alpha(\partial_\alpha v^\beta e_\beta + v^\beta\Gamma^\gamma_{\beta\alpha}e_\gamma) = 0$$

soit finalement, après un renommage de l'indice muet de la somme $v^\beta e_\beta$

$$\frac{d}{d\tau}v^\beta + v^\beta\Gamma^\gamma_{\beta\alpha}\frac{dx^\alpha}{d\tau} = 0$$

2.10.2 Équation géodésique

Une géodésique est la courbe obtenue en suivant le vecteur u à partir d'un point donné de la variété et telle que ce vecteur u est toujours un vecteur tangent de la courbe. Aussi la variation du vecteur u dans la direction qu'il indique est nulle et

$$\frac{d}{d\tau}u = 0$$

soit

$$\nabla_u u = 0.$$

En terme de composantes, on a alors

$$\boxed{\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau} = 0.}$$

C'est l'équation des géodésiques.

2.10.3 Méthode lagrangienne

Partant du lagrangien

$$L = \sqrt{g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda}}$$

les équations d'Euler-Lagrange donnent l'équation géodésique

2.11 Courbure

2.11.1 Déviation des géodésiques

$$\nabla_u \nabla_u n + \mathcal{R}(u,n)u = 0$$

où

$$\mathcal{R}(u,v)n = R(\ldots, n, u, v)$$

Le tenseur de courbure devient ainsi

$$R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta} = \partial_\gamma \Gamma^{\alpha}{}_{\beta\delta} - \partial_\delta \Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma} + \Gamma^{\alpha}{}_{\sigma\gamma}\Gamma^{\sigma}{}_{\beta\delta} - \Gamma^{\alpha}{}_{\sigma\delta}\Gamma^{\sigma}{}_{\beta\gamma}$$

2.11.2 Variation d'un tenseur sur un contour fermé

Une autre manière de voir le tenseur de courbure consiste à suivre la variation d'un vecteur lorsqu'il est transporté parallèlement à lui-même le long d'un contour fermé.

$$[\nabla_u, \nabla_v] - \nabla_{[u,v]}$$

est un tenseur et ne dépend que de la valeur de la fonction sur lequel il opère et.

Pour le voir il suffit de considérer une fonction $f(x)$ qui prend la valeur 1 en un point P_0 et de calculer la valeur de l'opérateur sur un vecteur w en P_0.

2.12 Formes différentielles et tenseurs

Soit un vecteur $v = v^\mu e_\mu$, avec la base e_μ. Soit ω^μ la base duale des e_μ. Une forme différentielle peut être développée dans la base ω^μ de sorte que

$$\alpha = \alpha_\nu \omega^\nu.$$

Étant donné une forme différentielle qui s'écrit dans une base de coordonnée

$$\alpha = \alpha_\mu dx^\mu,$$

sa différentielle définit une forme d'un rang supérieur de une unité

$$d\alpha = \frac{\partial \alpha_\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu \wedge dx^\mu.$$

De la même manière, on définit la différentielle d'un vecteur de base comme le vecteur 1-forme

$$\boxed{de_\mu = e_\nu \omega^{\nu}{}_{\mu} = e_\nu \omega^{\nu}{}_{\mu\sigma}\omega^\sigma.}$$

En demandant la compatibilité avec la dérivée covariante

$$de_\mu = \nabla_\sigma e_\mu \omega^{\ \sigma} = e_\nu \Gamma^{\nu}{}_{\mu\sigma}\omega^\sigma$$

on en déduit que la connexion 1-forme (avec deux indices) vaut

$$\boxed{\omega^{\nu}{}_{\mu} = \Gamma^{\nu}{}_{\mu\sigma}\omega^\sigma.}$$

La dérivée covariante d'un vecteur v est ainsi

$$dv = d(v^\mu e_\mu) = dv^\mu e_\mu + v^\mu de_\mu = e_\mu(dv^\mu + v^\nu \omega^{\mu}{}_{\nu}).$$

La deuxième différentielle

$$\begin{aligned} d^2v &= de_\mu \wedge (dv^\mu + v^\nu \omega^{\mu}{}_{\nu}) + e_\mu(d^2v^\mu + dv^\nu \wedge \omega^{\mu}{}_{\nu} + v^\nu d\omega^{\mu}{}_{\nu}) \\ &= e_\rho \omega^{\rho}{}_{\mu} \wedge (dv^\mu + v^\nu \omega^{\mu}{}_{\nu}) + e_\mu dv^\nu \wedge \omega^{\mu}{}_{\nu} + e_\mu v^\nu d\omega^{\mu}{}_{\nu} \\ &= e_\mu(v^\nu d\omega^{\mu}{}_{\nu} + v^\nu \omega^{\mu}{}_{\sigma} \wedge \omega^{\sigma}{}_{\nu}) \end{aligned}$$

en éliminant $e_\rho \omega^{\rho}{}_{\mu} \wedge dv^\mu$ avec $e_\mu dv^\nu \wedge \omega^{\mu}{}_{\nu}$. Ainsi

$$d^2v = e_\mu(d\omega^{\mu}{}_{\nu} + \omega^{\mu}{}_{\sigma} \wedge \omega^{\sigma}{}_{\nu})v^\nu = e_\mu \mathcal{R}^{\mu}{}_{\nu} v^\nu$$

ce qui définit le tenseur-2-forme de courbure

$$\boxed{\mathcal{R}^{\mu}{}_{\nu} = d\omega^{\mu}{}_{\nu} + \omega^{\mu}{}_{\sigma} \wedge \omega^{\sigma}{}_{\nu}.}$$

Le lien avec le tenseur de courbure est que

$$\mathcal{R}^{\mu}{}_{\nu} = d\omega^{\mu}{}_{\nu} + \omega^{\mu}{}_{\sigma} \wedge \omega^{\sigma}{}_{\nu} = R^{\mu}{}_{\nu|\alpha\beta|}\omega^\alpha \wedge \omega^\beta.$$

où $|\alpha\beta|$ signifie la somme sur α et sur β avec $\alpha < \beta$.

2.12.1 Compatibilité avec la symétrie

L'opérateur identité est défini par

$$< \mathrm{id}, v >=< e_\mu \omega^\mu, v >= v$$

où id est le tenseur

$$\mathrm{id} = \delta^\mu{}_\nu e_\mu \omega^\nu$$

En différentiant cette identité on a

$$0 = d(e_\mu \omega^\mu) = (de_\mu) \wedge \omega^\mu + e_\mu d\omega^\mu = e_\sigma \omega^\sigma{}_\mu \wedge \omega^\mu + e_\mu d\omega^\mu$$

On obtient alors, après un renommage des indices

$$\boxed{d\omega^\mu + \omega^\mu{}_\nu \wedge \omega^\nu = 0.}$$

On peut imaginer le cas plus général où la dérivée de l'identité est un tenseur, que l'on appelle alors le tenseur de *torsion*

$$\mathcal{T}^\mu = d\omega^\mu + \omega^\mu{}_\nu \wedge \omega^\nu,$$

auquel cas on aura

$$d(e_\mu \omega^\mu) = e_\mu \mathcal{T}^\mu.$$

Les composantes du tenseur de torsion sont alors définies par

$$\mathcal{T}^\mu = \frac{1}{2} T^\mu{}_{\alpha\beta} \omega^\alpha \wedge \omega^\beta.$$

avec

$$T^\mu{}_{\alpha\beta} = -T^\mu{}_{\beta\alpha}.$$

2.12.2 Compatibilité avec la métrique

En prenant la différentielle du produit scalaire de deux vecteurs de base qui définit la métrique

$$e_\mu \cdot e_\nu = g(e_\mu, e_\nu) = g_{\mu\nu}$$

on obtient

$$\begin{aligned} dg_{\mu\nu} &= de_\mu \cdot e_\nu + e_\mu \cdot de_\nu \\ &= e_\sigma \omega^\sigma{}_\mu \cdot e_\nu + e_\mu \cdot e_\sigma \omega^\sigma{}_\nu \\ &= g_{\sigma\nu} \omega^\sigma{}_\mu + g_{\mu\sigma} \omega^\sigma{}_\nu \\ &= \omega_{\nu\mu} + \omega_{\mu\nu} \end{aligned}$$

soit

$$\boxed{dg_{\mu\nu} = \omega_{\nu\mu} + \omega_{\mu\nu}}$$

Ainsi, dans une base où la métrique est constante, on a

$$\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}.$$

2.13 Moment de rotation et tenseur d'Einstein

2.14 Exercices

Exercice 2.1 (2.1, Wald, p.26)

1.
2.
3.

Exercice 2.2 (2.2, Wald, p.26)

a) Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, avec $F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$. On a

$$F(x) - F(a) = (x-a)\int_0^1 F'\big(t(x-a)+a\big)dt$$

et donc

$$F(x) = F(a) + (x-a)H(x)$$

où $H(x) = \int_0^1 F'\big(t(x-a)+a\big)dt$ et

$$H(a) = \int_0^1 F'\big(a\big)dt = F'(a)(1-0) = F'(a).$$

b) En dimension n, supposons que pour tout $F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$ on ait

$$F(x) = F(a) + (x-a)^\mu H_\mu(x), \quad H_\mu(a) = \left.\frac{\partial F}{\partial x^\mu}\right|_{x=a}$$

Soit alors $G \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^{n+1})$. Soit $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ et $x = (x^1, \dots, x^{n+1})$. Si x^{n+1} est fixe, disons $x^{n+1} = b$, alors G est une fonction F de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$

$$F(x^1, \dots, x^n) = G(x^1, \dots, x^n, b)$$

et on peut écrire, selon l'hypothèse précédente

$$F(x^1, \dots, x^n) = F(a^1, \dots, a^n) + \sum_{\mu=1}^{n}(x^\mu - a^\mu)H_\mu(x^1, \dots, x^n)$$

où $H_\mu(x^1, \dots, x^n) = H_\mu(x^1, \dots, x^n, b)$ et $H_\mu(a^1, \dots, a^n, b) = \frac{\partial G(x^1, \dots, x^n, b)}{\partial x^\mu}$, pour $\mu \in \{1, \dots, n\}$. Ainsi

$$G(x^1, \dots, x^n, x^{n+1}) = G(a^1, \dots, a^n, x^{n+1}) + \sum_{\mu=1}^{n}(x^\mu - a^\mu)H_\mu(x^1, \dots, x^n, x^{n+1}).$$

Enfin, le terme $G(a^1, \dots, a^n, x^{n+1})$ est une fonction à une seule variable $f(x) = G(a^1, \dots, a^n, x) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ et on peut lui appliquer le résultat initial

$$f(x) = f(a) + (x-a)h(x)$$

où $h(a) = f'(a)$. En notant que $f(a^{n+1}) = G(a^1, \dots, a^{n+1})$ et, puisque les dérivées partielles considèrent les autres variables comme des constantes, que

$$h(a) = \left.\frac{\partial G(a^1, \dots, a^n, x^{n+1})}{\partial x^{n+1}}\right|_{x^{n+1}=a^{n+1}} = \left.\frac{\partial G(x^1, \dots, x^n, x^{n+1})}{\partial x^{n+1}}\right|_{x=a}$$

où dans la dernière égalité $\{x, a\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$.
On obtient ainsi

$$G(x^1, \dots, x^n, x^{n+1}) = G(a^1, \dots, a^n, a^{n+1}) + \sum_{\mu=1}^{n+1}(x^\mu - a^\mu)H_\mu(x^1, \dots, x^n, x^{n+1}).$$

où l'on a étendu la somme pour inclure le terme en h.

Exercice 2.3 (2.3, Wald, p.27)

1.
2.
3. Alors

$$[Y_\alpha, Y_\beta] = C^\gamma_{\alpha,\beta}Y_\gamma$$

Exercice 2.4 (2.4, Wald, p.27)

1. Avec $u = u^\mu \partial_\mu$ et $v = v^\nu \partial_\nu$, on a

$$\begin{aligned}[u,v] &= u^\mu \partial_\mu (v^\nu \partial_\nu) - v^\mu \partial_\mu (u^\nu \partial_\nu) \\ &= u^\mu \partial_\mu (v^\nu)\partial_\nu + u^\mu v^\nu \partial_\mu \partial_\nu - v^\mu \partial_\mu (u^\nu)\partial_n u - v^\mu u^\nu \partial_\mu \partial_\nu \\ &= u^\mu \partial_\mu (v^\nu)\partial_\nu - v^\mu \partial_\mu (u^\nu)\partial_\nu \\ &= \left(u^\mu \partial_\mu (v^\nu) - v^\mu \partial_\mu (u^\nu)\right)\partial_\nu\end{aligned}$$

Ainsi

$$\boxed{[u,v]^\nu = u^\mu \partial_\mu (v^\nu) - v^\mu \partial_\mu (u^\nu)}$$

qui vaut clairement zéro pour une base de coordonnées (holonome).

2. Avec la base de vecteurs $Y_\alpha = (Y_\alpha)^\mu \partial_\mu$ et les vecteurs de la base duale $Y^{\gamma *} = (Y^{\gamma *})_\mu dx^\mu$, la décomposition de

$$\partial_\mu (Y^{\gamma *})_\nu - \partial_\nu (Y^{\gamma *})_\mu$$

s'obtient en projetant cette expression sur les vecteurs $(Y_\sigma)^\mu (Y_\rho)^\nu$ et en utilisant

$$\partial_\mu \big((Y^{\gamma *})_\nu (Y_\alpha)^\nu\big) = \partial_\mu (\delta\gamma_\alpha) = 0$$

soit

$$(Y_\alpha)^\nu \partial_\mu (Y^{\gamma *})_\nu = -(Y^{\gamma *})_\nu \partial_\mu (Y_\alpha)^\nu.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}(Y_\sigma)^\mu (Y_\rho)^\nu \big(\partial_\mu (Y^{\gamma *})_\nu - \partial_\nu (Y^{\gamma *})_\mu\big) &= (Y_\sigma)^\mu (Y_\rho)^\nu \partial_\mu (Y^{\gamma *})_\nu - (Y_\sigma)^\mu (Y_\rho)^\nu \partial_\nu (Y^{\gamma *})_\mu \\ &= -(Y_\sigma)^\mu (Y^{\gamma *})_\nu \partial_\mu (Y_\rho)^\nu + (Y^{\gamma *})_\mu (Y_\rho)^\nu \partial_\nu (Y_\sigma)^\mu \\ &= (Y^{\gamma *})_\nu \big((Y_\rho)^\mu \partial_\mu (Y_\sigma)^\nu - (Y_\sigma)^\mu \partial_\mu (Y_\rho)^\nu\big) \\ &= (Y^{\gamma *})_\nu [Y_\rho, Y_\sigma]^\nu \\ &= (Y^{\gamma *})_\nu C^\delta_{\rho\sigma} (Y_\delta)^\nu \\ &= C^\delta_{\rho\sigma} \delta^\gamma_\delta \\ &= C^\gamma_{\rho\sigma}\end{aligned}$$

On peut alors écrire

$$\partial_\mu (Y^{\gamma *})_\nu - \partial_\nu (Y^{\gamma *})_\mu = C^\gamma_{\alpha\beta} (Y^{\alpha *})_\mu (Y^{\beta *})_\nu$$

où l'on a juste remplacé (ρ, σ) par (α, β).

Exercice 2.5 (MTW 8.1, p.205)

En coordonnées sphériques, la base holonome est définie par les vecteurs

$$e_0 = \partial_t \mathcal{P}, \quad e_r = \partial_r \mathcal{P}, \quad e_\theta = \partial_\theta \mathcal{P}, \quad e_\phi = \partial_\phi \mathcal{P}$$

et la base non holonome orthonormée

$$e_{\hat{t}} = \partial_t \mathcal{P}, \quad e_{\hat{r}} = \partial_r \mathcal{P}, \quad e_{\hat{\theta}} = \frac{1}{r}\partial_\theta \mathcal{P}, \quad e_{\hat{\phi}} = \frac{1}{r\sin(\theta)}\partial_\phi \mathcal{P}$$

a)

b) Les formes duales de base sont

$$\omega^0 = dt, \quad \omega^r = dr, \quad \omega^\theta = d\theta, \quad \omega^\phi = d\phi$$

et pour les formes de la base non holonome

$$\omega^{\hat{t}} = dt, \quad \omega^{\hat{r}} = dr, \quad \omega^{\hat{\theta}} = r d\theta, \quad \omega^{\hat{\phi}} = r\sin(\theta) d\phi$$

c) La loi de transformation entre la base cartésienne est la base sphérique est définie par

$$\omega^\mu = L^\mu{}_a \omega^a \;\Leftrightarrow\; e_a = e_\mu L^\mu{}_a \;\Leftrightarrow e_\mu = e_a L^a{}_\mu \;\Leftrightarrow \omega^a = L^a{}_\mu \omega^\mu$$

avec

$$\begin{cases} x &= r\sin(\theta)\cos(\phi) \\ y &= r\sin(\theta)\sin(\phi) \\ z &= r\cos(\theta) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} dx &= dr\sin(\theta)\cos(\phi) + r\cos(\theta)\cos(\phi)d\theta - r\sin(\theta)\sin(\phi)d\phi \\ dy &= dr\sin(\theta)\sin(\phi) + r\cos(\theta)\sin(\phi)d\theta + r\sin(\theta)\cos(\phi)d\phi \\ dz &= dr\cos(\theta) - r\sin(\theta)d\theta \end{cases}$$

Ainsi

$$(L^a{}_\mu) = (\frac{\partial x^a}{\partial x^\mu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin(\theta)\cos(\phi) & r\cos(\theta)\cos(\phi) & -r\sin(\theta)\sin(\phi) \\ 0 & \sin(\theta)\sin(\phi) & r\cos(\theta)\sin(\phi) & r\sin(\theta)\cos(\phi) \\ 0 & \cos(\theta) & -r\sin(\theta) & 0 \end{pmatrix}$$

et avec

$$\begin{cases} r &= \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \cos(\theta) &= \dfrac{z}{r} \\ \tan(\phi) &= \dfrac{y}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \partial_x r &= \frac{x}{r} = \sin(\theta)\cos(\theta) \\ \partial_y r &= \frac{y}{r} = \sin(\theta)\sin(\phi) \\ \partial_z r &= \frac{z}{r} = \cos(\theta) \\ -\sin(\theta)\partial_x\theta &= -z\frac{x}{r^3} = -\frac{1}{r}\sin(\theta)\cos(\theta)\cos(\phi) \\ -\sin(\theta)\partial_y\theta &= -z\frac{y}{r^3} = -\frac{1}{r}\sin(\theta)\cos(\theta)\sin(\phi) \\ -\sin(\theta)\partial_z\theta &= \frac{1}{r} - \frac{z^2}{r^3} = \frac{\sin^2(\theta)}{r} \\ \frac{1}{\cos^2(\phi)}\partial_x\phi &= -\frac{y}{x^2} = -\frac{\sin(\phi)}{r\sin(\theta)\cos^2(\phi)} \\ \frac{1}{\cos^2(\phi)}\partial_y\phi &= \frac{1}{x} = \frac{1}{r\sin(\theta)\cos(\phi)} \end{cases}$$

on a

$$(L^\mu{}_a) = (\frac{\partial x^\mu}{\partial x^a}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin(\theta)\cos(\phi) & \sin(\theta)\sin(\phi) & \cos(\theta) \\ 0 & \frac{1}{r}\cos(\theta)\cos(\phi) & \frac{1}{r}\cos(\theta)\sin(\phi) & -\frac{1}{r}\sin(\theta) \\ 0 & -\frac{\sin(\phi)}{r\sin(\theta)} & \frac{\cos(\phi)}{r\sin(\theta)} & 0 \end{pmatrix}$$

d) avec $g_{ab} = \eta_{ab}$ on obtient la métrique en coordonnées sphériques par

$$g_{\mu\nu} = g_{ab}L^a{}_\mu L^b{}_\nu = \eta_{ab}L^a{}_\mu L^b{}_\nu = \sum_a \eta_{aa}L^a{}_\mu L^a{}_\nu = g_{\nu\mu}$$

soit la somme sur chaque ligne des produits des éléments μ et ν de la ligne, c'est le produit scalaire des colonnes μ et ν. On obtient ainsi

$$(g_{\mu\nu}) = \mathrm{diag}(-1, 1, r^2, r^2\sin^2(\theta))$$

La matrice inverse est donc

$$(g^{\mu\nu}) = \mathrm{diag}\big(-1, 1, \frac{1}{r^2}, \frac{1}{r^2\sin^2(\theta)}\big).$$

e) La matrice de passage de la base ω^μ à la base $\omega^{\hat{\mu}}$ est

$$L^{\hat{\mu}}{}_\mu \mathrm{diag}(1, 1, r, r\sin(\theta)) \;\Leftrightarrow\; L^\mu{}_{\hat{\mu}} = \mathrm{diag}(1, 1, \frac{1}{r}, \frac{1}{r\sin(\theta)})$$

Ainsi, on a

$$g_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = g_{\mu\nu}L^\mu{}_{\hat{\mu}}L^\nu{}_{\hat{\nu}}\mathrm{diag}(-1, 1, 1, 1).$$

f) Soit une fonction f, son gradient s'écrit

$$\begin{aligned} df &= e_\mu(f)\omega^\mu \\ &= \partial_t f\, dt + \partial_r f\, dr + \partial_\theta f\, d\theta + \partial_\phi f\, d\phi \\ &= e_{\hat{\mu}}(f)\omega^{\hat{\mu}} \\ &= \partial_t f\omega^{\hat{t}} + \partial_r f\omega^{\hat{r}} + \frac{1}{r}\partial_\theta f\omega^{\hat{\theta}} + \frac{1}{r\sin(\theta)}\partial_\phi f\omega^{\hat{\phi}} \end{aligned}$$

g) Dans la base holonome, vu que $L^3{}_\phi = 0$ et $L^0{}_j = 0$, on a

$$\begin{aligned} \epsilon_{tr\theta\phi} &= \epsilon_{abcd}L^a{}_t L^b{}_r L^c{}_\theta L^d{}_\phi \\ &= \epsilon_{0bc1}L^0{}_t L^b{}_r L^c{}_\theta L^1{}_\phi + \epsilon_{0bc2}L^0{}_t L^b{}_r L^c{}_\theta L^2{}_\phi \\ &= \epsilon_{0231}r^2\sin^3(\theta)\sin^2(\phi) - \epsilon_{0321}r^2\cos^2(\theta)\sin(\theta)\sin^2(\phi) \\ &\quad - \epsilon_{0132}r^2\sin^3(\theta)\cos^2(\phi) + \epsilon_{0312}r^2\cos^2(\theta)\sin(\theta)\cos^2(\phi) \\ &= r^2\sin^3(\theta) + r^2\cos^2(\theta)\sin(\theta) \\ &= r^2\sin(\theta) \end{aligned}$$

Permuter les indices $tr\theta\phi$ revient à permuter les indices $abcd$ du tenseur de Levi-Civita dans la première ligne, Ainsi

$$\boxed{\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = r^2 \sin(\theta)[\mu\nu\rho\sigma]}$$

où $[\mu\nu\rho\sigma]$ est la signature de la permutation $\mu\nu\rho\sigma$.
Pour le tenseur $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$, on monte les indices avec le tenseur métrique inverse

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = -\frac{1}{r^4 \sin^2(\theta)} r^2 \sin(\theta)[\mu\nu\rho\sigma]$$

soit

$$\boxed{\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = -\frac{1}{r^2 \sin(\theta)}[\mu\nu\rho\sigma].}$$

Dans la base non holonome orthogonale, on obtient

$$\boxed{\epsilon_{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\rho}\hat{\sigma}} = [\mu\nu\rho\sigma]}$$

et

$$\boxed{\epsilon^{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\rho}\hat{\sigma}} = -[\mu\nu\rho\sigma].}$$

Exercice 2.6 (MTW 8.3, p.207)

a) On prend une base locale $e_{\hat{a}}$ et une base arbitraire

$$e_a = e_{\hat{a}} L^{\hat{a}}{}_a.$$

Le tenseur de Levi-Civita $\epsilon_{\hat{a}\hat{b}\hat{c}\hat{d}} = [\hat{a}\hat{b}\hat{c}\hat{d}]$ se transforme selon

$$\begin{aligned}
\epsilon_{abcd} &= L^{\hat{a}}{}_a L^{\hat{b}}{}_b L^{\hat{c}}{}_c L^{\hat{d}}{}_d \epsilon_{\hat{a}\hat{b}\hat{c}\hat{d}} \\
&= L^{\hat{a}}{}_a L^{\hat{b}}{}_b L^{\hat{c}}{}_c L^{\hat{d}}{}_d [\hat{a}\hat{b}\hat{c}\hat{d}] \\
&= \det\left((L^{\hat{a}}{}_a)\right)[abcd]
\end{aligned}$$

De plus

$$g_{ab} = L^{\hat{a}}{}_a L^{\hat{b}}{}_b g_{\hat{a}\hat{b}}$$

Ainsi

$$\det((g_{ab})) = \det(L)^2 \det(g_{\hat{a}\hat{b}}) = (-1)\det(L)^2$$

donc

$$\det((g_{ab}))\det(L^{-1})^2 = -1$$

et

$$\det(L^{-1}) = \frac{1}{\sqrt{-g}} = \frac{1}{\det(L)}$$

avec $g = \det(g_{ab})$.
Ainsi

$$\boxed{\epsilon_{abcd} = \sqrt{-g}[abcd].}$$

On monte les indices avec le tenseur métrique inverse et on obtient

$$\epsilon^{abcd} = (g^{-1})\sqrt{-g}[abcd],$$

soit

$$\boxed{\epsilon^{abcd} = -\frac{1}{\sqrt{-g}}[abcd].}$$

b)

Exercice 2.7 (MTW 8.5, p.213)

Avec

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\phi^2 = (\omega^r)^2 + r^2(\omega^\phi)^2$$

a) Avec

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix} = \mathrm{diag}(1, r^2)$$

On a

$$\Gamma^a{}_{bc} = \frac{1}{2} g^{ad}(\partial_b g_{dc} + \partial_c g_{bd} - \partial_d g_{bc}) = \frac{1}{2} g^{aa}(\partial_b g_{aa} + \partial_c g_{aa} - \partial_a g_{bb})$$

ainsi

$$\Gamma^r{}_{bc} = \frac{1}{2} g^{rr}(\partial_b g_{rc} + \partial_c g_{br} - \partial_r g_{bc})$$

dont le seul terme non nul est $\partial_r g_{\phi\phi}$ soit

$$\Gamma^r{}_{\phi\phi} = \frac{1}{2}(-2r) = -r$$

et pour

$$\Gamma^\phi{}_{bc} = \frac{1}{2} g^{\phi\phi}(\partial_b g_{\phi c} + \partial_c g_{b\phi} - \partial_\phi g_{bc})$$

pour lequel le dernier terme est toujours nul et les deux premiers termes sont non nuls uniquement si $b = r$ et $c = \phi$ ou le contraire, de sorte que

$$\Gamma^\phi{}_{r\phi} = \Gamma^\phi{}_{\phi r} = \frac{1}{2}\frac{1}{r^2}(2r) = \frac{1}{r}$$

et tous les autres symboles de Christoffel sont nuls.

b) Les équations géodésiques sont

$$\frac{d^2}{d\lambda^2} x^a + \Gamma^a{}_{bc} \frac{dx^b}{d\lambda}\frac{dx^c}{d\lambda} = 0$$

soit, avec $x^r = r$ et $x^\phi = \phi$,

$$\begin{cases} r'' - r(\phi')^2 &= 0 \qquad (1) \\ \phi'' + \frac{2}{r} r'\phi' &= 0 \qquad (2) \end{cases}$$

c) De (2) on a

$$\frac{\phi''}{\phi'} = -2\frac{r'}{r} \;\Leftrightarrow\; \ln\big(\frac{\phi'}{\phi'_0}\big) = -2\ln\big(\frac{r}{r_0}\big)$$

de sorte que

$$\phi' = \phi'_0 \frac{r_0^2}{r^2} \qquad (3)$$

dans (1)

$$r'' = (\phi'_0)^2 \frac{r_0^4}{r^3}$$

En posant $u(r) = r'(\lambda)$ on a $r'' = u'u$ et

$$uu' = (\phi'_0)^2 \frac{r_0^4}{r^3} \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{2}(u^2 - u_0^2) = -(\phi'_0)^2 \frac{r_0^4}{2}\big(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_0^2}\big)$$

d'où

$$u^2 = u_0^2 - (\phi'_0)^2 r_0^4 \big(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_0^2}\big)$$

soit

$$(r')^2 = (r'_0)^2 - (\phi'_0)^2 r_0^4 \big(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_0^2}\big)$$

ou encore

$$\frac{rr'}{\sqrt{(r'_0)^2 r^2 - (\phi'_0)^2 r_0^2 (r_0^2 - r^2)}} = 1$$

On trouve alors

$$\frac{1}{(r_0')^2+(\phi_0')^2r_0^2}\ \sqrt{r^2[(r_0')^2+(\phi_0')^2r_0^2]-(\phi_0')^2r_0^4}\Big|_{r_0}^{r}=\lambda-\lambda_0$$

Si $r_0'=0$, on a

$$\frac{1}{(\phi_0')^2r_0^2}\sqrt{r^2(\phi_0')^2r_0^2-(\phi_0')^2r_0^4}=\lambda-\lambda_0$$

$$\boxed{r^2=(\phi_0')^2r_0^2(\lambda-\lambda_0)^2+r_0^2}$$

Dans (3)

$$\phi'=\phi_0'\frac{1}{(\phi_0')^2(\lambda-\lambda_0)^2+1}$$

On obtient

$$\boxed{\phi-\phi_0=\arctan(\phi_0'(\lambda-\lambda_0))}$$

et

$$\tan(\phi-\phi_0)=\phi_0'(\lambda-\lambda_0)$$

Ainsi

$$r^2=\frac{r_0^2}{\cos^2(\phi-\phi_0)}\ \Leftrightarrow\ r\cos(\phi-\phi_0)=r_0$$

Mais

$$x_1=r\cos(\phi-\phi_0)=x\cos(\phi_0)+y\sin(\phi_0)$$

De plus

$$y_1=r\sin(\phi-\phi_0)=r_0\sqrt{1+(\phi_0')^2(\lambda-\lambda_0)^2}\frac{\phi_0'(\lambda-\lambda_0)}{\sqrt{1+(\phi_0')^2(\lambda-\lambda_0)^2}}$$

soit

$$y_1=r_0(\phi_0')(\lambda-\lambda_0)$$

Ainsi

$$\begin{cases}x_1 &= r_0=x\cos(\phi_0)+y\sin(\phi_0)\\ y_1 &= r_0\phi_0'(\lambda-\lambda_0)=y\cos(\phi_0)-x\sin(\phi_0)\end{cases}$$

En isolant x et y, on trouve

$$\begin{cases}x &= r_0\big(\cos(\phi_0)-\phi_0'(\lambda-\lambda_0)\sin(\phi_0)\big)=a+b\lambda\\ y &= r_0\big(\sin(\phi_0)+\phi_0'(\lambda-\lambda_0)\cos(\phi_0)\big)=c+d\lambda\end{cases}$$

d) Soit $e_{\hat r}=e_r=\partial_r$ et $e_{\hat\phi}=r^{-1}e_\phi=r^{-1}\partial_\phi$ et $\omega^{\hat r}=\omega^r=dr$ et $\omega^{\hat\phi}=r\omega^\phi=rd\phi$. On a clairement

$$<\omega^{\hat a},e_{\hat b}>=\delta^{\hat a}{}_{\hat b}$$

Dans la base chapeau, la métrique est $g=\mathrm{diag}(1,1)$. Calculons le commutateur

$$[e_{\hat r},e_{\hat\phi}]=-\frac{1}{r}e_{\hat\phi}$$

tous les autres étant nuls. Ainsi $c_{\hat r\hat\phi}{}^{\hat\phi}=-c_{\hat\phi\hat r}{}^{\hat\phi}=-r^{-1}$ et tous les autres sont nuls.
On peut calculer les coefficients de connexion à partir des constantes de structures.
On peut également utiliser la relation

$$\Gamma^{\hat a}{}_{\hat b\hat c}=<\omega^{\hat a},\nabla_{\hat c}e_{\hat b}>$$

On a ainsi

$$\begin{aligned}\Gamma^{\hat r}{}_{\hat\phi\hat\phi}&=<\omega^{\hat r},\nabla_{\hat\phi}e_{\hat\phi}>\\ &=<dr,\frac{1}{r}\nabla_\phi\left(\frac{1}{r}e_\phi\right)>\\ &=<dr,\frac{1}{r^2}\nabla_\phi\left(\frac{1}{r}e_\phi\right)>\\ &=\frac{1}{r^2}\Gamma^r{}_{\phi\phi}=-\frac{1}{r}\end{aligned}$$

On calcule de même

$$\begin{aligned}
\Gamma^{\hat\phi}{}_{\hat r\hat\phi} &= < \omega^{\hat\phi}, \nabla_{\hat\phi} e_{\hat r} > \\
&= < r d\phi, \frac{1}{r}\nabla_\phi e_r > \\
&= < d\phi, \nabla_\phi e_r > \\
&= \Gamma^{\phi}{}_{r\phi} = \frac{1}{r}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\Gamma^{\hat\phi}{}_{\hat\phi\hat r} &= < \omega^{\hat\phi}, \nabla_{\hat r} e_{\hat\phi} > \\
&= < d\phi, \nabla_r \left(\frac{1}{r} e_\phi\right) > \\
&= < d\phi, -\frac{1}{r^2} e_\phi + \frac{1}{r}\nabla_r e_\phi > \\
&= -\frac{1}{r^2} < d\phi, e_\phi > + \frac{1}{r}\Gamma^{\phi}{}_{r\phi} \\
&= -\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2} = 0
\end{aligned}$$

e) Dans le problème de Kepler de dimension 2, avec $v = \frac{de_{\hat r}}{dt} = \nabla_v e_{\hat r}$ et $a = \frac{dv}{dt} = \nabla_v v$, on peut calculer l'accélération a

$$\begin{aligned}
a &= \nabla_v v \\
&= v^{\hat r}\nabla_{\hat r} v + v^{\hat\phi}\nabla_{\hat\phi} v \\
&= v^{\hat r}\partial_{\hat r} v + v^{\hat\phi}\partial_{\hat\phi} v + v^{\hat r}\Gamma^{\hat a}{}_{\hat b\hat r} v^{\hat b} e_{\hat a} + v^{\hat\phi}\Gamma^{\hat a}{}_{\hat b\hat\phi} v^{\hat b} e_{\hat a}
\end{aligned}$$

or $\Gamma^{\hat a}{}_{\hat b\hat r} = 0$, ainsi

$$\begin{aligned}
a &= v^{\hat a}\partial_{\hat a} v + v^{\hat\phi}\Gamma^{\hat r}{}_{\hat\phi\hat\phi} v^{\hat\phi} e_{\hat r} + v^{\hat\phi}\Gamma^{\hat\phi}{}_{\hat r\hat\phi} v^{\hat r} e_{\hat\phi} \\
&= \frac{dv}{dt} - \frac{1}{r}(v^{\hat\phi})^2 e_{\hat r} + \frac{1}{r} v^{\hat r} v^{\hat\phi} e_{\hat\phi}
\end{aligned}$$

On en déduit, avec $v^{\hat r} = \dot r$ et $v^{\hat\phi} = r\dot\phi$

$$\begin{cases}
a^{\hat r} &= \dfrac{dv^{\hat r}}{dt} - \dfrac{1}{r}(r\dot\phi)^2 \\[2ex]
a^{\hat\phi} &= \dfrac{dv^{\hat\phi}}{dt} + \dfrac{1}{r}\dot r(r\dot\phi)
\end{cases}$$

soit

$$\begin{cases}
a^{\hat r} &= \dfrac{d^2 r}{dt^2} - r\left(\dfrac{d\phi}{dt}\right)^2 \\[2ex]
a^{\hat\phi} &= \dfrac{d}{dt}\left(r\dfrac{d\phi}{dt}\right) + \dfrac{dr}{dt}\dfrac{d\phi}{dt}
\end{cases}$$

Exercice 2.8 (MTW 8.6, p.213)

En coordonnées sphériques

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2\sin(\theta) d\phi^2$$

En posant

$$\omega^{\hat t} = \omega^t = dt, \quad \omega^{\hat r} = \omega^r = dr, \quad \omega^{\hat\theta} = r\omega^\theta = r d\theta, \quad \omega^{\hat\phi} = r\sin(\theta)\omega^\phi = r\sin(\theta) d\phi$$

on a $g_{\hat a\hat b} = \mathrm{diag}(-1,1,1,1)$, et la base associée est

$$e_{\hat t} = e_t = \partial_t, \quad e_{\hat r} = e_r = \partial_r, \quad e_{\hat\theta} = \frac{1}{r} e_\theta = \frac{1}{r}\partial_\theta, \quad e_{\hat\phi} = \frac{1}{r\sin(\theta)} e_\phi = \frac{1}{r\sin(\theta)}\partial_\phi.$$

a) Clairement $< \omega^{\hat{a}}, e_{\hat{b}} >= \delta^{\hat{a}}_{\hat{b}}$. Les commutateurs non nuls des vecteurs de cette nouvelle base sont

$$
\begin{aligned}
[e_{\hat{r}}, e_{\hat{\theta}}] &= -\frac{1}{r^2}\partial_\theta = -\frac{1}{r}e_{\hat{\theta}} \\
[e_{\hat{r}}, e_{\hat{\phi}}] &= [\partial_r, \frac{1}{r}\partial_\theta] = -\frac{1}{r^2}\frac{1}{\sin(\theta)}\partial_\phi = -\frac{1}{r}e_{\hat{\phi}} \\
[e_{\hat{\theta}}, e_{\hat{\phi}}] &= [\frac{1}{r}\partial_\theta, \frac{1}{r\sin(\theta)}\partial_\phi] = -\frac{1}{r^2}\frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\partial_\phi = -\frac{\cot(\theta)}{r}e_{\hat{\phi}}
\end{aligned}
$$

On en déduit les constantes de structure

$$
\begin{aligned}
c_{\hat{r}\hat{\theta}\hat{\theta}} &= -c_{\hat{\theta}\hat{r}\hat{\theta}} = -\frac{1}{r} \\
c_{\hat{r}\hat{\phi}\hat{\phi}} &= -c_{\hat{\phi}\hat{r}\hat{\phi}} = -\frac{1}{r} \\
c_{\hat{\theta}\hat{\phi}\hat{\phi}} &= -c_{\hat{\phi}\hat{\theta}\hat{\phi}} = -\frac{\cot(\theta)}{r}
\end{aligned}
$$

tous les autres étant nuls.
Les coefficients de connexion sont obtenus par

$$
\Gamma_{\hat{a}\hat{b}\hat{c}} = \frac{1}{2}(c_{\hat{a}\hat{b}\hat{c}} + c_{\hat{a}\hat{c}\hat{b}} - c_{\hat{b}\hat{c}\hat{a}})
$$

Ainsi, seuls sont non nulles les combinaisons pour lesquelles les constantes de structure sont non nulles

$$
\begin{aligned}
\Gamma^{\hat{r}}{}_{\hat{\theta}\hat{\theta}} &= \Gamma_{\hat{r}\hat{\theta}\hat{\theta}} = \frac{1}{2}(c_{\hat{r}\hat{\theta}\hat{\theta}} + c_{\hat{r}\hat{\theta}\hat{\theta}} - c_{\hat{\theta}\hat{\theta}\hat{r}}) = -\frac{1}{r} \\
\Gamma^{\hat{\theta}}{}_{\hat{r}\hat{\theta}} &= \Gamma_{\hat{\theta}\hat{r}\hat{\theta}} = \frac{1}{2}(c_{\hat{\theta}\hat{r}\hat{\theta}} + c_{\hat{\theta}\hat{\theta}\hat{r}} - c_{\hat{r}\hat{\theta}\hat{\theta}}) = \frac{1}{r} \\
\Gamma^{\hat{r}}{}_{\hat{\phi}\hat{\phi}} &= \Gamma_{\hat{r}\hat{\phi}\hat{\phi}} = \frac{1}{2}(c_{\hat{r}\hat{\phi}\hat{\phi}} + c_{\hat{r}\hat{\phi}\hat{\phi}} - c_{\hat{\phi}\hat{\phi}\hat{r}}) = -\frac{1}{r} \\
\Gamma^{\hat{\phi}}{}_{\hat{r}\hat{\phi}} &= \Gamma_{\hat{\phi}\hat{r}\hat{\phi}} = \frac{1}{2}(c_{\hat{\phi}\hat{r}\hat{\phi}} + c_{\hat{\phi}\hat{\phi}\hat{r}} - c_{\hat{r}\hat{\phi}\hat{\phi}}) = \frac{1}{r} \\
\Gamma^{\hat{\theta}}{}_{\hat{\phi}\hat{\phi}} &= \Gamma_{\hat{\theta}\hat{\phi}\hat{\phi}} = \frac{1}{2}(c_{\hat{\theta}\hat{\phi}\hat{\phi}} + c_{\hat{\theta}\hat{\phi}\hat{\phi}} - c_{\hat{\phi}\hat{\phi}\hat{\theta}}) = -\frac{\cot(\theta)}{r} \\
\Gamma^{\hat{\phi}}{}_{\hat{\theta}\hat{\phi}} &= \Gamma_{\hat{\phi}\hat{\theta}\hat{\phi}} = \frac{1}{2}(c_{\hat{\phi}\hat{\theta}\hat{\phi}} + c_{\hat{\phi}\hat{\phi}\hat{\theta}} - c_{\hat{\theta}\hat{\phi}\hat{\phi}}) = \frac{\cot(\theta)}{r}
\end{aligned}
$$

b) Avec

$$
< \omega^{\hat{a}}, \nabla_{\hat{b}} e_{\hat{c}} >= \Gamma^{\hat{a}}{}_{\hat{c}\hat{b}} \;\Leftrightarrow\; \nabla_{\hat{b}} e_{\hat{c}} = \Gamma^{\hat{a}}{}_{\hat{c}\hat{b}} e_{\hat{a}}.
$$

On déduit que seuls sont non nuls les cas où $\hat{b} \in \{\hat{\theta}, \hat{\phi}\}$

$$
\begin{aligned}
\nabla_{\hat{\theta}} e_{\hat{\theta}} &= \Gamma^{\hat{r}}{}_{\hat{\theta}\hat{\theta}} e_{\hat{r}} = -\frac{1}{r} e_{\hat{r}} \\
\nabla_{\hat{\theta}} e_{\hat{r}} &= \Gamma^{\hat{\theta}}{}_{\hat{r}\hat{\theta}} e_{\hat{\theta}} = \frac{1}{r} e_{\hat{\theta}} \\
\nabla_{\hat{\phi}} e_{\hat{r}} &= \Gamma^{\hat{\phi}}{}_{\hat{r}\hat{\phi}} e_{\hat{\phi}} = \frac{1}{r} e_{\hat{\phi}} \\
\nabla_{\hat{\phi}} e_{\hat{\theta}} &= \Gamma^{\hat{\phi}}{}_{\hat{\theta}\hat{\phi}} e_{\hat{r}} = \frac{\cot(\theta)}{r} e_{\hat{\phi}} \\
\nabla_{\hat{\phi}} e_{\hat{\phi}} &= \Gamma^{\hat{r}}{}_{\hat{\phi}\hat{\phi}} e_{\hat{r}} + \Gamma^{\hat{\theta}}{}_{\hat{\phi}\hat{\phi}} e_{\hat{\theta}} = -\frac{1}{r} e_{\hat{r}} - \frac{\cot(\theta)}{r} e_{\hat{\theta}}
\end{aligned}
$$

c) Soit un vecteur A. On a

$$
\nabla_{\hat{a}} A^{\hat{b}} = e_{\hat{a}} A^{\hat{b}} + \Gamma^{\hat{b}}{}_{\hat{c}\hat{a}} A^{\hat{c}},
$$

ainsi sa divergence est

$$
\begin{aligned}
\nabla \cdot A = \nabla_{\hat{a}} A^{\hat{a}} &= e_{\hat{a}} A^{\hat{a}} + \Gamma^{\hat{a}}{}_{\hat{b}\hat{a}} A^{\hat{b}} \\
&= \partial_t A^{\hat{t}} + \partial_r A^{\hat{r}} + \frac{1}{r}\partial_\theta A^{\hat{\theta}} + \frac{1}{r\sin(\theta)}\partial_\phi A^{\hat{\phi}} + \Gamma^{\hat{\theta}}{}_{\hat{r}\hat{\theta}} A^{\hat{r}} + \Gamma^{\hat{\phi}}{}_{\hat{r}\hat{\phi}} A^{\hat{r}} + \Gamma^{\hat{\phi}}{}_{\hat{\theta}\hat{\phi}} A^{\hat{\theta}} \\
&= \partial_t A^{\hat{t}} + \partial_r A^{\hat{r}} + \frac{2}{r} A^{\hat{r}} + \frac{1}{r}\partial_\theta A^{\hat{\theta}} + \frac{\cot(\theta)}{r} A^{\hat{\theta}} + \frac{1}{r\sin(\theta)}\partial_\phi A^{\hat{\phi}} \\
&= \partial_t A^{\hat{t}} + \frac{1}{r^2}\partial_r\big(r^2 A^{\hat{r}}\big) + \frac{1}{r\sin(\theta)}\partial_\theta\big(\sin(\theta) A^{\hat{\theta}}\big) + \frac{1}{r\sin(\theta)}\partial_\phi A^{\hat{\phi}}
\end{aligned}
$$

Exercice 2.9 (MTW 8.7, p.213)

Les vecteurs de bases dans une base holonome commutent et les constantes de structures sont tous nuls. Dans une base non holonome orthonormée, on a

$$[e_{\hat{\alpha}}, e_{\hat{\beta}}] = c_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}^{\ \ \hat{\gamma}} e_{\hat{\gamma}} \ \Leftrightarrow \ c_{\hat{\alpha}\hat{\beta}\hat{\gamma}} = -c_{\hat{\beta}\hat{\alpha}\hat{\gamma}}$$

Or

$$\Gamma_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2}(\partial_\beta g_{\alpha\gamma} + \partial_\gamma g_{\beta\alpha} - \partial_\alpha g_{\beta\gamma} + c_{\alpha\beta\gamma} + c_{\alpha\gamma\beta} - c_{\beta\gamma\alpha})$$

ou encore

$$\Gamma_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2}(g_{\alpha\beta,\gamma} + g_{\alpha\gamma,\beta} - g_{\beta\gamma,\alpha} + c_{\alpha\beta\gamma} + c_{\alpha\gamma\beta} - c_{\beta\gamma\alpha}).$$

Dans une base holonome on a

$$\Gamma_{\alpha\gamma\beta} = \frac{1}{2}(g_{\alpha\gamma,\beta} + g_{\alpha\beta,\gamma} - g_{\gamma\beta,\alpha}) = \Gamma_{\alpha\beta\gamma}$$

La dernière égalité découlant de la symétrie du tenseur métrique $g_{\beta\gamma} = g_{\gamma\beta}$. Ainsi

$$\boxed{\Gamma^\alpha_{\ [\beta\gamma]} = 0.}$$

Dans une base non holonome orthonormée, le tenseur métrique est constant, $g_{\hat{a}\hat{b}} = \eta_{\hat{a}\hat{b}}$, et ses dérivées nulles, ainsi

$$\Gamma_{\hat{\alpha}\hat{\beta}\hat{\gamma}} = \frac{1}{2}(c_{\hat{\alpha}\hat{\beta}\hat{\gamma}} + c_{\hat{\alpha}\hat{\gamma}\hat{\beta}} - c_{\hat{\beta}\hat{\gamma}\hat{\alpha}})$$

et

$$\Gamma_{\hat{\beta}\hat{\alpha}\hat{\gamma}} = \frac{1}{2}(c_{\hat{\beta}\hat{\alpha}\hat{\gamma}} + c_{\hat{\beta}\hat{\gamma}\hat{\alpha}} - c_{\hat{\alpha}\hat{\gamma}\hat{\beta}})$$

de sorte que

$$\Gamma_{\hat{\alpha}\hat{\beta}\hat{\gamma}} + \Gamma_{\hat{\beta}\hat{\alpha}\hat{\gamma}} = \frac{1}{2}(c_{\hat{\alpha}\hat{\beta}\hat{\gamma}} + c_{\hat{\beta}\hat{\alpha}\hat{\gamma}}) = \frac{1}{2}(c_{\hat{\alpha}\hat{\beta}\hat{\gamma}} - c_{\hat{\alpha}\hat{\beta}\hat{\gamma}}) = 0.$$

soit

$$\boxed{\Gamma_{\{\hat{\alpha}\hat{\beta}\}\hat{\gamma}}}$$

Exercice 2.10 (MTW 11.5, p.281)

Soit $f_1 = u \wedge v$ et $f_2 = u' \wedge v'$ coplanaire à f_1 avec

$$u' = a_1 u + b_1 v \quad \text{et} \quad v' = a_2 u + b_2 v$$

Alors

$$f_2 = (a_1 u + b_1 v) \wedge (a_2 u + b_2 v) = (a_1 b_2 - a_2 b_1) u \wedge v = \alpha f_1$$

avec $\alpha = (a_1 b_2 - a_2 b_1) = \det(a, b) = \det(\Lambda)$, où Λ est la matrice qui transforme (u, v) en (u', v').

La réciproque est évidente, si $f_2 = \alpha f_1$, les deux bivecteurs sont évidemment coplanaires.

Exercice 2.11 (MTW 13.9, p.326)

(a) Avec les symétries de base du tenseur de Riemann on a, dans un premier temps, par l'antisymétrie des deux derniers indices,

$$\mathcal{R}^\mu_{\nu\alpha\beta} = -\mathcal{R}^\mu_{\nu\beta\alpha}$$

il y a $4 \cdot 3/2$ cas différents possibles, et avec 4 possibilités pour μ et 4 encore pour ν, cela fait

$$\frac{4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3}{2} = 96$$

possibilités. Or l'antisymétrie des trois derniers indices

$$\mathcal{R}^\mu_{[\nu\alpha\beta]} = 0$$

fourni encore

$$\binom{4}{3} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{3!} = 4$$

relations possibles pour chacune des 4 possibilités de μ, soit 16 relations différentes.
ainsi le nombre total de composantes indépendantes à 4 dimensions est

$$96 - 16 = 80.$$

(b) En répétant les arguments précédents, on a

$$n^2 \cdot \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^3(n-1)}{2}$$

choix d'indices différents possibles sur la base de l'antisymétrie des deux derniers indices.
Le nombre d'équations provenant de l'antisymétrie des trois derniers indices est

$$\binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}$$

(nombre de choix différents de 3 indices parmi n) et ce pour chacun des n choix possibles de l'indice μ.
Il y a donc

$$\frac{n^3(n-1)}{2} - \frac{n^2(n-1)(n-2)}{3!} = \frac{n^2(n-1)}{2}\frac{3n-(n-2)}{3} = \frac{n^2(n^2-1)}{3}$$

composantes différentes possibles.

(c) Avec une métrique, on a encore une symétrie sur l'échange des paires (deux premiers et deux derniers indices en bloc). Cela fait une nombre de paire d'indices possibles de $6 = 4 \cdot 3/2$. Il y a ainsi $6 \cdot 6 = 36$ couples de paires d'indices différents à une symétrie près.
Par l'antisymétrie des trois derniers indices, on a 4 équations pour chaque valeur de μ soit $4 \cdot 4 = 16$ conditions. Ainsi le nombre de composantes indépendantes est

$$36 - 16 = 20.$$

(d) En dimension n, on a $n(n-1)/2$ paires d'indices différents, soit un nombre de couples de paires

$$\frac{n^2(n-1)^2}{4}$$

avec un nombre d'équations liant les trois derniers indices venant de l'antisymétrie des trois derniers indices

$$n\frac{n!}{3!(n-3)!} = \frac{n^2(n-1)(n-2)}{6}$$

Soit au total

$$\frac{n^2(n-1)^2}{4} - \frac{n^2(n-1)(n-2)}{6} = \frac{n^2(n-1)}{2}\frac{3(n-1)-2(n-2)}{6} = \frac{n^2(n^2-1)}{12}$$

composantes différentes possibles.

Exercice 2.12 (MTW 13.11, p.326)

Exercice 2.13 (MTW 13.12, p.326)

Exercice 2.14 (MTW 13.13, p.326)

Exercice 2.15 (MTW 13.14, p.332)

Exercice 2.16 (MTW 13.15, p.332)

Exercice 2.17 (MTW 14.1, p.334)

Exercice 2.18 (MTW 14.2, p.334)

Exercice 2.19 (MTW 14.3, p.343)

Exercice 2.20 (MTW 14.4, p.345)

Exercice 2.21 (MTW 14.5, p.358)

Partant de

$$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta - \alpha \wedge d\beta$$

pour des 1-formes α et β, par récurrence sur l'ordre des formes α et β, supposons que pour une p-forme α_p et une q-forme β_q on ait

$$\boxed{d(\alpha_p \wedge \beta_q) = d\alpha_p \wedge \beta_q + (-1)^p \alpha_p \wedge d\beta_q}$$

et calculons pour une $p+1$ forme α_{p+1}

$$\alpha_{p+1} = \alpha_{k_1,\dots,k_p,k_{p+1}} dx^{k_1} \dots \wedge dx^p \wedge dx^{k_{p+1}}$$

la différentielle

$$\begin{aligned}
d(\alpha_{p+1} \wedge \beta_q) &= d(\alpha_{k_1,\dots,k_{p+1}} \beta_{s_1,\dots,s_q}) dx^{k_1} \wedge \dots \wedge dx^{k_p} \wedge dx^{k_{p+1}} \wedge dx^{s_1} \wedge \dots dx^{s_q} \\
&= [(\partial_k \alpha_{k_1,\dots,k_{p+1}}) \beta_{s_1,\dots,s_q} + \alpha_{k_1,\dots,k_{p+1}} \partial_k \beta_{s_1,\dots,s_q}] dx^k \wedge dx^{k_1} \wedge \dots \wedge dx^{s_q} \\
&= (\partial_k \alpha_{k_1,\dots,k_{p+1}}) dx^k \wedge dx^{k_1} \wedge \dots \wedge dx^{k_{p+1}} \wedge \beta \\
&\quad + (-1)^p \alpha_{k_1,\dots,k_{p+1}} \partial_k \beta_{s_1,\dots,s_q} \wedge dx^{k_1} \wedge \dots \wedge dx^p \wedge dx^k \wedge dx^{k_{p+1}} \wedge dx^{s_1} \wedge \dots dx^{s_q} \\
&= d\alpha \wedge \beta + (-1)^p (-1) \alpha_{k_1,\dots,k_{p+1}} dx^{k_1} \wedge \dots \wedge dx^p \wedge dx^{k_{p+1}} \wedge dx^k \wedge dx^{s_1} \wedge \dots dx^{s_q} \partial_k \beta_{s_1,\dots,s_q} \\
&= d\alpha \wedge \beta + (-1)^{p+1} \alpha \wedge d\beta
\end{aligned}$$

La troisième égalité utilise l'hypothèse de récurrence sur les p-formes, et l'égalité suivante vient de la commutation $dx^k \wedge dx^{k_{p+1}} = -dx^{k_{p+1}} \wedge dx^k$.

Ainsi la formule est encore vraie pour les $(p+1)$-formes α.

Le cas des $(q+1)$-formes β est trivial et ne fait pas intervenir d'autre subtilité. Ainsi le résultat est vrai pour toute p-forme et q-forme α et β respectivement.

Exercice 2.22 (MTW 14.6, p.359)

Equation 14.21 reads

$$\langle d\alpha, u \wedge v \rangle = \partial_u \langle \alpha, v \rangle - \partial_v \langle \alpha, u \rangle - \langle \alpha, [u, v] \rangle$$

(a)

(b) With $\alpha = \alpha_k dx^k$, and

$$d\alpha = \alpha_{k,j} dx^j \wedge dx^k$$

and $u = \partial_k$ and $v = \partial_\ell$, then $[u, v] = [\partial_k, \partial_\ell] = 0$, so the right-hand side is

$$\begin{aligned}\partial_u\langle\alpha, v\rangle - \partial_v\langle\alpha, u\rangle &= \partial_k\langle\alpha_n dx^n, \partial_\ell\rangle - \partial_\ell\langle\alpha_n dx^n, \partial_k\rangle \\ &= \partial_k(\alpha_\ell) - \partial_\ell(\alpha_k) \\ &= \alpha_{\ell,k} - \alpha_{k,\ell}\end{aligned}$$

On the other hand, the left-hand side gives

$$\begin{aligned}\langle d\alpha, u \wedge v\rangle &= \alpha_{m,n}\langle dx^n \wedge dx^m, \partial_k \wedge \partial_\ell\rangle \\ &= \alpha_{m,n}\Big(\langle dx^n, \partial_k\rangle\langle dx^m \partial_\ell\rangle - \langle dx^m, \partial_k\rangle\langle dx^n \partial_\ell\rangle\Big) \\ &= \alpha_{m,n}(\delta^n_k\delta^m_\ell - \delta^m_k\delta^n_\ell) \\ &= \alpha_{\ell,k} - \alpha_{k,\ell}\end{aligned}$$

and so, we the equality is verified in a coordinate basis.

Exercice 2.23 (MTW 14.7, p.359)

(a) Equation 14.31a reads

$$d\omega^\mu + \omega^\mu{}_\nu \wedge \omega^\nu = 0$$

In a coordinate basis $\omega^\mu = dx^\mu$ and the equation reads

$$d^2x^\mu + \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}dx^\beta \wedge dx^\alpha = 0$$

and with $d^2x^\mu = 0$ and using the antisymmetry of the wedge product

$$0 = \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}dx^\beta \wedge dx^\alpha = \frac{1}{2}(\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} - \Gamma^\mu{}_{\beta\alpha})dx^\beta \wedge dx^\alpha$$

since

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} - \Gamma^\mu{}_{\beta\alpha})dx^\beta \wedge dx^\alpha &= \frac{1}{2}\Big(\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}dx^\beta \wedge dx^\alpha - \Gamma^\mu{}_{\beta\alpha}dx^\beta \wedge dx^\alpha\Big) \\ &= \frac{1}{2}\Big(\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}dx^\beta \wedge dx^\alpha + \Gamma^\mu{}_{\beta\alpha}dx^\alpha \wedge dx^\beta\Big) \\ &= \frac{1}{2}\Big(\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}dx^\beta \wedge dx^\alpha + \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}dx^\beta \wedge dx^\alpha\Big) \\ &= \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}dx^\beta \wedge dx^\alpha\end{aligned}$$

with a simple renaming of indexes in the last step.
So we must have

$$\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} - \Gamma^\mu{}_{\beta\alpha} = 0$$

that is

$$\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} = \Gamma^\mu{}_{\beta\alpha}$$

(b) Equation 14.31b reads

$$dg_{\mu\nu} = \omega_{\mu\nu} + \omega_{\nu\mu}$$

So in a coordinate basis

$$g_{\mu\beta,\alpha}dx^\alpha = (\Gamma_{\mu\beta\alpha} + \Gamma_{\beta\mu\alpha})dx^\alpha$$

and so

$$g_{\mu\nu,\alpha} = \Gamma_{\mu\beta\alpha} + \Gamma_{\beta\mu\alpha}.$$

We also have

$$g_{\alpha\mu,\beta} = \Gamma_{\alpha\mu\beta} + \Gamma_{\mu\alpha\beta}.$$

and

$$g_{\beta\alpha,\mu} = \Gamma_{\beta\alpha\mu} + \Gamma_{\alpha\beta\mu}.$$

Adding the first two and subtracting the last we get

$$g_{\mu\beta,\alpha} + g_{\alpha\mu,\beta} - g_{\beta\alpha,\mu} = 2\Gamma_{\mu\beta\alpha}$$

where we used the symmetry relation in the last two indexes of the Γs. So we can write

$$\Gamma_{\mu\beta\alpha} = \frac{1}{2}(g_{\mu\beta,\alpha} + g_{\alpha\mu,\beta} - g_{\beta\alpha,\mu})$$

and by rasing the first index

$$\Gamma^{\gamma}{}_{\beta\alpha} = \frac{1}{2}g^{\gamma\mu}(g_{\mu\beta,\alpha} + g_{\alpha\mu,\beta} - g_{\beta\alpha,\mu})$$

Exercice 2.24 (MTW 14.8, p.359)

Write equation 14.18 as

$$\mathcal{R}^{\mu}{}_{\nu} = d\omega^{\mu}{}_{\nu} + \omega^{\mu}{}_{\beta} \wedge \omega^{\beta}{}_{\nu}$$

With $\omega^{\mu}{}_{\nu} = \Gamma^{\mu}{}_{\nu\lambda}dx^{\lambda}$ we get

$$d\omega^{\mu}{}_{\nu} = d\Gamma^{\mu}{}_{\nu\lambda} \wedge dx^{\lambda} = \Gamma^{\mu}{}_{\nu\lambda,\alpha}dx^{\alpha} \wedge dx^{\lambda}$$

So

$$\mathcal{R}^{\mu}{}_{\nu} = \Gamma^{\mu}{}_{\nu\lambda,\alpha}dx^{\alpha} \wedge dx^{\lambda} + \Gamma^{\mu}{}_{\beta\alpha}\Gamma^{\beta}{}_{\nu\lambda}dx^{\alpha} \wedge dx^{\lambda}$$

and by restricting to $\alpha < \lambda$ we get

$$\mathcal{R}^{\mu}{}_{\nu\alpha\lambda} = \Gamma^{\mu}{}_{\nu\lambda,\alpha} - \Gamma^{\mu}{}_{\nu\alpha,\lambda} + \Gamma^{\mu}{}_{\beta\alpha}\Gamma^{\beta}{}_{\nu\lambda} - \Gamma^{\mu}{}_{\beta\lambda}\Gamma^{\beta}{}_{\nu\alpha}$$

which is the coordinate basis expression for the curvature tensor.

Exercice 2.25 (MTW 14.9, p.359)

Let $e = (e_1, \ldots, e_n)$ where e_k is the k-th basis vector and ω the column-vector of the dual basis 1-forms.

Let Ω the matrix of the 1-forms $\omega^{\mu}{}_{\nu}$ and $\mathcal{R}^{\mu}{}_{\nu}$ the square matrix of two-forms of curvatures. From $de_{\mu} = e_{\nu}\omega^{\nu}{}_{\mu}$ and the identity operator $d\mathcal{P} = e_{\mu}\omega^{\mu}$ we can write

$$de = (de_1 \ldots de_n) = e\Omega = (e_1 \ldots e_n)\begin{pmatrix} \omega^1{}_1 & \ldots & \omega^1{}_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega^n{}_1 & \ldots & \omega^n{}_n \end{pmatrix} = (e_k\omega^k_1 \ldots e_k\omega^k_n)$$

and

$$d\mathcal{P} = e\omega = (e_1 \ldots e_n)\begin{pmatrix} \omega^1 \\ \vdots \\ \omega^n \end{pmatrix}$$

(a) By taking the exterior derivative of the identity operator we get

$$0 = d^2\mathcal{P} = d(e\omega) = de \wedge \omega + ed\omega = e\Omega \wedge \omega + ed\omega = e(\Omega \wedge \omega + d\omega)$$

from which we conclude that [2]

$$\boxed{d\omega + \Omega \wedge \omega = 0.}$$

(b) Let's calculate

$$d^2e = d(de) = d(e\Omega) = de \wedge \Omega + ed\Omega = e\Omega \wedge \Omega + ed\Omega = e(\Omega \wedge \Omega + d\Omega) = e\mathcal{R}$$

with

$$\boxed{\mathcal{R} = d\Omega + \Omega \wedge \Omega.}$$

(c) We have then

$$0 = d^2\omega = d(d\omega) = -d(\Omega \wedge \omega) = -d\Omega \wedge \omega - \Omega \wedge d\omega = -(d\Omega + \Omega \wedge \Omega) \wedge \omega = -\mathcal{R} \wedge \omega$$

2. If there is torsion $\mathcal{T} = d^2\mathcal{P}$, then we get

$$d\omega + \Omega \wedge \omega = \mathcal{T}.$$

and so[3]

$$\boxed{\mathcal{R}\wedge\omega = 0.}$$

So we have

$$0 = \begin{pmatrix} \mathcal{R}^1{}_1 & \dots & \mathcal{R}^1{}_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{R}^n{}_1 & \dots & \mathcal{R}^n{}_n \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \omega^1 \\ \vdots \\ \omega^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{R}^1{}_k \wedge \omega^k \\ \vdots \\ \mathcal{R}^n{}_k \wedge \omega^k \end{pmatrix}$$

The nominal element is written

$$0 = \mathcal{R}^\mu{}_\nu \wedge \omega^\nu = \mathcal{R}^\mu{}_{\nu\alpha\beta}\omega^\alpha \wedge \omega^\beta \wedge \omega^\nu$$

If we order the dual basis vector so that $\alpha < \beta < \nu$, then we have

$$0 = \mathcal{R}^\mu{}_{[\nu\alpha\beta]}\omega^{|\alpha} \wedge \omega^\beta \wedge \omega^{\nu|}$$

from which we read

$$\boxed{\mathcal{R}^\mu{}_{[\nu\alpha\beta]} = 0.}$$

(d) We have

$$d\mathcal{R} = d(d\Omega + \Omega\wedge\Omega) = d^2\Omega + d\Omega\wedge\Omega - \Omega\wedge d\Omega = d\Omega\wedge\Omega - \Omega\wedge d\Omega$$

where we used $d^2\Omega = 0$, since

$$\begin{aligned} d^2\Omega &= \Big(d(d\omega^\mu{}_\nu)\Big) \\ &= \Big(d(d(\Gamma^\mu{}_{\nu\rho}\omega^\rho))\Big) \\ &= \Big(d(d\Gamma^\mu{}_{\nu\rho}\wedge\omega^\rho + \Gamma^\mu{}_{\nu\rho}d\omega^\rho)\Big) \\ &= \Big(d^2\Gamma^\mu{}_{\nu\rho}\wedge\omega^\rho - d\Gamma^\mu{}_{\nu\rho}\wedge d\omega^\rho + d\Gamma^\mu{}_{\nu\rho}\wedge d\omega^\rho + \Gamma^\mu{}_{\nu\rho}\wedge d^2\omega^\rho\Big) \\ &= 0 \end{aligned}$$

since the two middle terms cancel and the first and last are equal to zero.
Using $d\Omega = \mathcal{R} - \Omega\wedge\Omega$, the triple Ω vanish and we get

$$d\mathcal{R} = \mathcal{R}\wedge\Omega - \Omega\wedge\mathcal{R}$$

or

$$\boxed{d\mathcal{R} - \mathcal{R}\wedge\Omega + \Omega\wedge\mathcal{R} = 0.}$$

In that last expression we have

$$(d\mathcal{R})^\mu{}_\nu = d(R^\mu{}_{\nu\alpha\beta}\omega^\alpha\wedge\omega^\beta) = dR^\mu{}_{\nu\alpha\beta}\wedge\omega^\alpha\wedge\omega^\beta + R^\mu{}_{\nu\alpha\beta}d\omega^\alpha\wedge\omega^\beta - R^\mu{}_{\nu\alpha\beta}\omega^\alpha\wedge d\omega^\beta.$$

so, in a coordinate bases dx^μ we get, by relabeling α as ρ in the second term and β as ρ in the last

$$\begin{aligned} (d\mathcal{R})^\mu{}_\nu &= R^\mu{}_{\nu\alpha\beta,\gamma}dx^\gamma\wedge dx^\alpha\wedge dx^\beta - R^\mu{}_{\nu\rho\beta}\Gamma^\rho{}_{\alpha\gamma}dx^\gamma\wedge dx^\alpha\wedge dx^\beta + R^\mu{}_{\nu\alpha\rho}\Gamma^\rho{}_{\beta\gamma}dx^\alpha\wedge dx^\gamma\wedge dx^\beta \\ &= R^\mu{}_{\nu\alpha\beta,\gamma}dx^\alpha\wedge dx^\beta\wedge dx^\gamma - R^\mu{}_{\nu\rho\beta}\Gamma^\rho{}_{\alpha\gamma}dx^\alpha\wedge dx^\beta\wedge dx^\gamma - R^\mu{}_{\nu\alpha\rho}\Gamma^\rho{}_{\beta\gamma}dx^\alpha\wedge dx^\beta\wedge dx^\gamma \\ &= (R^\mu{}_{\nu\alpha\beta,\gamma} - R^\mu{}_{\nu\rho\beta}\Gamma^\rho{}_{\alpha\gamma} - R^\mu{}_{\nu\alpha\rho}\Gamma^\rho{}_{\beta\gamma})dx^\alpha\wedge dx^\beta\wedge dx^\gamma \end{aligned}$$

Then we also have

$$\begin{aligned} (\mathcal{R}\wedge\Omega)^\mu{}_\nu &= \mathcal{R}^\mu{}_\rho\wedge\omega^\rho{}_\nu \\ &= R^\mu{}_{\rho\alpha\beta}\Gamma^\rho{}_{\nu\gamma}dx^\alpha\wedge dx^\beta\wedge dx^\gamma \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} (\Omega\wedge\mathcal{R})^\mu{}_\nu &= \omega^\mu{}_\rho\wedge\mathcal{R}^\rho{}_\nu \\ &= \Gamma^\mu{}_{\rho\alpha}R^\rho{}_{\nu\beta\gamma}dx^\alpha\wedge dx^\beta\wedge dx^\gamma \end{aligned}$$

3. With torsion, the result becomes

$$\mathcal{R}\wedge\omega = d\mathcal{T} + \Omega\wedge\mathcal{T}.$$

So that

$$(d\mathcal{R} - \mathcal{R}\wedge\Omega + \Omega\wedge\mathcal{R})^\mu{}_\nu = (R^\mu{}_{\nu\alpha\beta,\gamma} - R^\mu{}_{\nu\rho\beta}\Gamma^\rho{}_{\alpha\gamma} - R^\mu{}_{\nu\alpha\rho}\Gamma^\rho{}_{\beta\gamma} - R^\mu{}_{\rho\alpha\beta}\Gamma^\rho{}_{\nu\gamma} + \Gamma^\mu{}_{\rho\alpha}R^\rho{}_{\nu\beta\gamma})dx^\alpha\wedge dx^\beta\wedge dx^\gamma$$
$$= R^\mu{}_{\nu\alpha\beta;\gamma}dx^\alpha\wedge dx^\beta\wedge dx^\gamma$$

So the vanishing of that last expression gives the Bianchi identity

$$\boxed{R^\mu{}_{\nu[\alpha\beta;\gamma]} = 0.}$$

(e) With v a column of functions $v = (v^\mu)$ we get a vector field $\tilde{v} = ev = e_\mu v^\mu$. We have then

$$d\tilde{v} = d(ev) = (de)v + edv = e\Omega v + edv = e(\Omega v + dv)$$

and

$$d^2\tilde{v} = d(d\tilde{v}) = d(e(\Omega v + dv)) = de\wedge(\Omega v + dv) + e(d\Omega\, v - \Omega dv + d^2 v)$$

that is, since $d^2 v = 0$

$$d^2\tilde{v} = e\Omega\wedge(\Omega v + dv) + e(d\Omega\, v - \Omega v) = e(\Omega\wedge\Omega v + d\Omega\, v + \Omega dv - \Omega dv)$$

which reads

$$d^2\tilde{v} = e(\Omega\wedge\Omega + d\Omega)v = e\mathcal{R}v$$

or $d\tilde{v} = e_\mu\mathcal{R}^\mu{}_\nu v^\nu$.

Exercice 2.26 (MTW 14.10, p.359)

Set $e' = eA$ for $e_{\mu'} = e_\nu A^\nu_{\mu'}$ and $\omega' = A^{-1}\omega$ a change of frame.
We have then

$$d\mathcal{P} = e\omega = e(AA^{-1})\omega = e'\omega'.$$

With $e' = eA$ and $de' = e'\Omega'$ we have

$$de' = (de)A + edA = e\Omega A + edA = e(\Omega A + dA) = e'\Omega'$$

so

$$e(\Omega A + dA) = eA\Omega'$$

and

$$\Omega A + dA = A\Omega' \Rightarrow \boxed{\Omega' = A^{-1}\Omega A + A^{-1}dA}.$$

This can be written, with $(A^{-1})^{\mu'}_\nu = A^{\mu'}_\nu$ and $A = (A^\mu{}_{\nu'})$

$$\omega^{\mu'}_{\nu'} = A^{\mu'}_\alpha\omega^\alpha{}_\beta A^\beta_{\nu'} + A^{\mu'}_\alpha\partial_\gamma A^\alpha{}_{\nu'}\omega^\gamma$$

Substituting with the connexion coefficients, we have

$$\Gamma^{\mu'}_{\nu'\rho'}\omega^{\rho'} = \Gamma^{\mu'}_{\nu'\rho'}A^{\rho'}_\rho\omega^\rho = A^{\mu'}_\alpha\Gamma^\alpha{}_{\beta\rho}A^\beta_{\nu'}\omega^\rho + A^{\mu'}_\alpha\partial_\rho A^\alpha{}_{\nu'}\omega^\rho$$

so that, by multiplying both sides with $A^\rho{}_{\sigma'}$ we get

$$\boxed{\Gamma^{\mu'}_{\nu'\sigma'} = A^{\mu'}_\alpha\Gamma^\alpha{}_{\beta\rho}A^\beta_{\nu'}A^\rho{}_{\sigma'} + A^{\mu'}_\alpha\partial_\rho A^\alpha{}_{\nu'}A^\rho{}_{\sigma'}.}$$

Exercice 2.27 (MTW 14.11, p.360)

If geodesics are straight lines

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} = 0$$

then the connexions are zero $\Gamma^\mu{}_{\nu\sigma} = 0$ and so is the curvature $\mathcal{R} = 0$.
Suppose now the curvature is zero $\mathcal{R} = 0$.

The transformation of basis A from ω^μ to $\omega^{\mu'}$ obeys the differential equation

$$A\Omega' = \Omega A + dA.$$

The new connexions vanishes, $\Omega' = 0$, if

$$dA + \Omega A = 0$$

and by differentiating again

$$d^2 A + d\Omega A - \Omega \wedge dA = 0$$

since $d^2 A = 0$, using the expression for dA,

$$(d\Omega + \Omega \wedge \Omega)A = 0.$$

But this is

$$\mathcal{R}A = 0$$

and if $\mathcal{R} = 0$ the last relation is automatically verified.

Now, if $\mathcal{R} = 0$, then $\Omega' = 0$ and straight lines are geodesics.

In the new coordinates, we have then

$$0 = d\omega' + \Omega' \wedge \omega' = d\omega'$$

which means that

$$d\omega^{\mu'} = 0$$

and so there exists f^μ such that $\omega^{\mu'} = \partial_\nu f^\mu dx^\nu$, which can also be written as

$$\omega' = df.$$

We can then take those f^μ as a new system of coordinate in which

$$\omega^{\mu'} = df^\mu,$$

or, by renamig $x^{\mu'} = f^{\mu'}$,

$$\omega^{\mu'} = dx^{\mu'}.$$

Exercice 2.28 (MTW 14.12, p.360)

According to eq (8.14)

$$[e_\mu, e_\nu] = c_{\mu\nu}{}^{\alpha} e_\alpha$$

eq.(14.32)

$$d\omega^\mu = -c^{\alpha}_{|\mu\nu|}\omega^\mu \wedge \omega^\nu$$

eq.(14.33)

$$\omega_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(c_{\mu\nu\alpha} + c_{\mu\alpha\nu} - c_{\nu\alpha\mu})\omega^\alpha$$

equations (14.31), which say

$$d\omega^\mu + \omega^\mu{}_\nu \wedge \omega^\nu = 0$$
$$\omega_{\mu\nu} + \omega_{\nu\mu} = dg_{\mu\nu}$$

Exercice 2.29 (MTW 14.13, p.360)

Tkae the Schwarzschild metric

$$ds^2 = e^{2\phi}dt^2 - e^{e\Lambda}dr^2 - r^2 d^2\Omega$$

in the basis

$$\omega^t = e^\phi dt, \quad \omega^r = e^\Lambda dr, \quad \omega^\theta = r d\theta, \quad \omega^\phi = r\sin(\theta)d\phi$$

the metric component is $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$, so that

$$\omega_{\mu\nu} + \omega_{\nu\mu} = 0$$

which shows that $\omega^{\mu}{}_{\mu} = \omega_{\mu\mu} = 0$ (not summed on μ).

Using the defining relation

$$d\omega^{\mu} + \omega^{\mu}{}_{\nu} \wedge \omega^{\nu} = 0$$

we can recover the $\omega^{\mu}{}_{\nu}$.

Let's begin with (prime denotes derivative according to r)

$$\begin{aligned} d\omega^t &= d(e^{\phi}dt) \\ &= \phi' e^{\phi} dr \wedge dt \\ &= \phi' e^{-\Lambda} \omega^r \wedge \omega^t \\ &= -\omega^t{}_r \wedge \omega^r \end{aligned}$$

which shows that

$$\boxed{\omega^t{}_r = \phi' e^{-\Lambda} \omega^t = \omega^r{}_t}$$

From

$$\begin{aligned} d\omega^r &= d(e^{\Lambda}dr) \\ &= \Lambda' e^{\Lambda} dr \wedge dr \\ &= 0 \end{aligned}$$

we can't recover anything.

Next

$$\begin{aligned} d\omega^{\theta} &= d(r d\theta) \\ &= dr \wedge d\theta \\ &= \frac{e^{-\Lambda}}{r} \omega^r \wedge \omega^{\theta} \\ &= -\omega^{\theta}{}_r \wedge \omega^r \end{aligned}$$

so that

$$\boxed{\omega^{\theta}{}_r = \frac{e^{-\Lambda}}{r} \omega^{\theta} = -\omega^r{}_{\theta}}$$

Finally

$$\begin{aligned} d\omega^{\phi} &= d(r\sin(\theta)d\phi) \\ &= \sin(\theta) dr \wedge d\phi + r\cos(\theta) d\theta \wedge d\phi \\ &= \frac{e^{-\Lambda}}{r} \omega^r \wedge \omega^{\phi} + \frac{\cot(\theta)}{r} \omega^{\theta} \wedge \omega^{\phi} \\ &= -\omega^{\phi}{}_r \wedge \omega^r - \omega^{\phi}{}_{\theta} \wedge \omega^{\theta} \end{aligned}$$

which shows that

$$\boxed{\omega^{\phi}{}_r = \frac{e^{-\Lambda}}{r} \omega^{\phi} = -\omega^r{}_{\phi}}$$

and

$$\boxed{\omega^{\phi}{}_{\theta} = \frac{\cot(\theta)}{r} \omega^{\phi} = -\omega^{\theta}{}_{\phi}}$$

The curvature tensor 2-form is then calculated using

$$\mathcal{R}^{\mu}{}_{\nu} = d\omega^{\mu}{}_{\nu} + \omega^{\mu}{}_{\rho} \wedge \omega^{\rho}{}_{\nu}$$

The tt component

$$\mathcal{R}^t{}_t = d\omega^t{}_t + \omega^t{}_{\alpha} \wedge \omega^{\alpha}_t = 0$$

since $\omega^t{}_t = 0$ and the only non-zero $\omega^t{}_{\alpha}$ is for $\alpha = r$ but $\omega^t{}_r \wedge \omega^r{}_t = 0$ as this is proportional to $\omega^t \wedge \omega^t$.

Next the tr component

$$\mathcal{R}^t{}_r = d\omega^t{}_r + \omega^t{}_{\alpha} \wedge \omega^{\alpha}_r = d\omega^t{}_r$$

that is

$$\mathcal{R}^t{}_r = d(\phi' e^{-\Lambda} \omega^t) = d(\phi' e^{\phi - \Lambda} dt) = (\phi'' + \phi'(\phi' - \Lambda')) e^{\phi - \Lambda} dr \wedge dt.$$

so

$$\boxed{\mathcal{R}^t{}_r = (\phi'' + \phi'^2 - \phi'\Lambda')e^{-2\Lambda}\omega^r \wedge \omega^t = -\mathcal{R}^{tr} = \mathcal{R}^{rt}}$$

We also have

$$\mathcal{R}^t{}_\theta = \omega^t{}_r \wedge \omega^r{}_\theta, \quad \text{and} \quad \mathcal{R}^t{}_\phi = \omega^t{}_r \wedge \omega^r{}_\phi$$

since $\omega^t{}_r$ is the only non vanishing $\omega^t{}_\alpha$. These expression furnish

$$\boxed{\mathcal{R}^t{}_\theta = -\phi'\frac{e^{-2\Lambda}}{r}\omega^t \wedge \omega^\theta = -\mathcal{R}^{t\theta} = \mathcal{R}^{\theta t}}, \quad \text{and} \quad \boxed{\mathcal{R}^t{}_\phi = -\phi'\frac{e^{-2\Lambda}}{r}\omega^t \wedge \omega^\phi = -\mathcal{R}^{t\phi} = \mathcal{R}^{\phi t}}$$

Then, we have

$$\mathcal{R}^r{}_\theta = d\omega^r{}_\theta + \omega^r{}_\phi \wedge \omega^\phi{}_\theta = d\omega^r{}_\theta, \quad \text{and} \quad \mathcal{R}^r{}_\phi = d\omega^r{}_\phi + \omega^r{}_\theta \wedge \omega^\theta{}_\phi$$

that is

$$\mathcal{R}^r{}_\theta = -d(e^{-\Lambda}d\theta) = \Lambda' e^{-\Lambda} dr \wedge d\theta = \frac{\Lambda' e^{-2\Lambda}}{r}\omega^r \wedge \omega^\theta,$$

and

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}^r{}_\phi &= -d(\sin(\theta)e^{-\Lambda}d\phi) - \frac{e^{-\Lambda}}{r}\omega^\theta \wedge (-\frac{\cot(\theta)}{r})\omega^\phi \\
&= -(\cos(\theta)d\theta - \Lambda'\sin(\theta)dr)e^{-\Lambda} \wedge d\phi + \frac{\cot(\theta)e^{-\Lambda}}{r^2}\omega^\theta \wedge \omega^\phi \\
&= \frac{\Lambda' e^{-2\Lambda}}{r}\omega^r \wedge \omega^\phi
\end{aligned}$$

so

$$\boxed{\mathcal{R}^r{}_\theta = \frac{\Lambda' e^{-2\Lambda}}{r}\omega^r \wedge \omega^\theta = -\mathcal{R}^{r\theta} = \mathcal{R}^{\theta r}} \quad \boxed{\mathcal{R}^r{}_\phi = \frac{\Lambda' e^{-2\Lambda}}{r}\omega^r \wedge \omega^\phi = -\mathcal{R}^{r\phi} = \mathcal{R}^{\phi r}}$$

Finally

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}^\theta{}_\phi &= d\omega^\theta{}_\phi + \omega^\theta{}_\alpha \wedge \omega^\alpha{}_\phi \\
&= d(-\cos(\theta)d\phi) + \omega^\theta{}_r \wedge \omega^r{}_\phi \\
&= \sin(\theta)d\theta \wedge d\phi - \frac{e^{-\Lambda}}{r}\frac{e^{-\Lambda}}{r}\omega^\theta \wedge \omega^\phi \\
&= \frac{1 - e^{-2\Lambda}}{r^2}\omega^\theta \wedge \omega^\phi
\end{aligned}$$

so that

$$\boxed{\mathcal{R}^\theta{}_\phi = \frac{1 - e^{-2\Lambda}}{r^2}\omega^\theta \wedge \omega^\phi = -\mathcal{R}^{\theta\phi} = \mathcal{R}^{\phi\theta}}$$

To summarize

$$\boxed{\begin{array}{lcll}
\mathcal{R}^{tr} = -\mathcal{R}^{rt} & = & (\phi'' + \phi'^2 - \phi'\Lambda')e^{-2\Lambda}\omega^t \wedge \omega^r & = E\omega^t \wedge \omega^r \\
\mathcal{R}^{t\theta} = -\mathcal{R}^{\theta t} & = & \phi'\dfrac{e^{-2\Lambda}}{r}\omega^t \wedge \omega^\theta & = \bar{E}\omega^t \wedge \omega^\theta \\
\mathcal{R}^{t\phi} = -\mathcal{R}^{\phi t} & = & \phi'\dfrac{e^{-2\Lambda}}{r}\omega^t \wedge \omega^\phi & = \bar{E}\omega^t \wedge \omega^\phi \\
\mathcal{R}^{r\theta} = -\mathcal{R}^{\theta r} & = & -\dfrac{\Lambda' e^{-2\Lambda}}{r}\omega^r \wedge \omega^\theta & = \bar{F}\omega^r \wedge \omega^\theta \\
\mathcal{R}^{r\phi} = -\mathcal{R}^{\phi r} & = & -\dfrac{\Lambda' e^{-2\Lambda}}{r}\omega^r \wedge \omega^\phi & = \bar{F}\omega^r \wedge \omega^\phi \\
\mathcal{R}^{\theta\phi} = -\mathcal{R}^{\phi\theta} & = & -\dfrac{1 - e^{-2\Lambda}}{r^2}\omega^\theta \wedge \omega^\phi & = F\omega^\theta \wedge \omega^\phi
\end{array}}$$

The Ricci tensor can then be calculated as follows. For the diagonal elements we have

$$\begin{aligned}
R^{tt} &= R^{\alpha t}{}_{\alpha t} = R^{rt}{}_{rt} + R^{\theta t}{}_{\theta t} + R^{\phi t}{}_{\phi t} = E + 2\bar{E} \\
R^{rr} &= R^{\alpha r}{}_{\alpha r} = R^{tr}{}_{tr} + R^{\theta r}{}_{\theta r} + R^{\phi r}{}_{\phi r} = E + 2\bar{F} \\
R^{\theta\theta} &= R^{\alpha\theta}{}_{\alpha\theta} = R^{t\theta}{}_{t\theta} + R^{r\theta}{}_{r\theta} + R^{\phi\theta}{}_{\phi\theta} = \bar{E} + \bar{F} + F \\
R^{\phi\phi} &= R^{\alpha\phi}{}_{\alpha\phi} = R^{t\phi}{}_{t\phi} + R^{r\phi}{}_{r\phi} + R^{\theta\phi}{}_{\theta\phi} = \bar{E} + \bar{F} + F
\end{aligned}$$

so the scalar curvature is

$$R = 2(E + F + 2\bar{E} + 2\bar{F}).$$

The off-diagonal elements are then

$$R^{tr} = -R^{\alpha t}{}_{\alpha r} = 0$$

and likewise

$$R^{t\theta} = R^{t\phi} = R^{r\theta} = R^{r\phi} = R^{\theta\phi} = 0.$$

The Einstein tensor $G^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R$ is then

$$\begin{aligned}
G^{tt} &= E + 2\bar{E} - (E + F + 2\bar{E} + 2\bar{F}) = -(F + 2\bar{F}) \\
G^{rr} &= -(F + 2\bar{E}) \\
G^{\theta\theta} &= G^{\phi\phi} = -(E + \bar{F} + \bar{E})
\end{aligned}$$

and the off-diagonal elements are then

$$G^{tr} = G^{t\theta} = G^{t\phi} = G^{r\theta} = G^{r\phi} = G^{\theta\phi} = 0.$$

Exercice 2.30 (MTW 14.14, p.360)

Exercice 2.31 (MTW 14.15, p.361)

Exercice 2.32 (MTW 14.16, p.361)

Exercice 2.33 (MTW 14.17, p.362)

Exercice 2.34 (MTW 14.18, p.362)

Chapitre 3

Gravitation

3.1 Principe d'équivalence

Le principe d'équivalence affirme que l'on peut toujours trouver un *référentiel local d'inertie* [1] dans lequel un corps en chute libre suit un mouvement rectiligne uniforme défini par [2]

$$\frac{d^2}{d\tau^2} z^\mu = 0, \quad \text{avec} \quad d\tau^2 = \eta_{\mu\nu} dz^\mu dz^\nu.$$

Dans un repère non inertiel, dans lequel on définit les coordonnées x^μ, les coordonnées inertielles z^μ sont dépendantes des x^μ et les équations du mouvement précédentes deviennent alors

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial z^\mu}{\partial x^\alpha}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\right) = 0, \quad \text{avec} \quad d\tau^2 = \eta_{\mu\nu}\frac{\partial z^\mu}{\partial x^\alpha}\frac{\partial z^\nu}{\partial x^\beta} dx^\alpha dx^\beta$$

soit

$$\frac{\partial^2 z^\mu}{\partial x^\beta \partial x^\alpha}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau} + \frac{\partial z^\mu}{\partial x^\alpha}\frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} = 0, \quad \text{avec} \quad d\tau^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta.$$

En multipliant par $\dfrac{\partial x^\gamma}{\partial z^\mu}$ et en sommant sur μ (on multiplie les équations par la matrice jacobienne inverse de la transformation $x \mapsto z$) on obtient, après avoir utilisé $\frac{\partial x^\gamma}{\partial z^\mu}\frac{\partial z^\mu}{\partial x^\alpha} = \delta^\gamma{}_\alpha$

$$\frac{d^2 x^\gamma}{d\tau^2} + \frac{\partial x^\gamma}{\partial z^\mu}\frac{\partial^2 z^\mu}{\partial x^\beta \partial x^\alpha}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau} = 0.$$

Ainsi, dans un référentiel non-inertiel local, on doit écrire l'équation du mouvement sous la forme

$$\boxed{\frac{d^2 x^\gamma}{d\tau^2} + \Gamma^\gamma{}_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau} = 0}, \quad \text{avec} \quad \boxed{d\tau^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta}$$

où

$$\boxed{g_{\alpha\beta} = \eta_{\mu\nu}\frac{\partial z^\mu}{\partial x^\alpha}\frac{\partial z^\nu}{\partial x^\beta}}$$

et les *coefficients de connexion*

$$\boxed{\Gamma^\gamma{}_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^\gamma}{\partial z^\mu}\frac{\partial^2 z^\mu}{\partial x^\beta \partial x^\alpha}}$$

On a clairement la symétrie des coefficients de connexion sur les deux derniers indices inférieurs

$$\Gamma^\gamma{}_{\alpha\beta} = \Gamma^\gamma{}_{\beta\alpha}.$$

L'équation du mouvement

$$\frac{d^2 x^\gamma}{d\tau^2} + \Gamma^\gamma{}_{\beta\gamma}\frac{dx^\beta}{d\tau}\frac{dx^\gamma}{d\tau} = 0$$

est connue en géométrie différentielle sous le nom d'*équation géodésique* . Elle définit la trajectoire extrémale (généralement de longueur minimale) liant deux points dans une variété différentielle.

1. Typiquement un référentiel qui est en chute libre avec le corps étudié. Après un intervalle de temps plus ou moins court, il faudra prendre un nouveau référentiel, afin que les effets de marée restent négligeables.
2. Ce paragraphe suit la démarche de S. Weinberg [SW] dans Gravitation et cosmology, chapitre 4.

Ainsi, l'application du principe d'équivalence conduit à décrire les phénomènes gravitationnels par des trajectoires géodésiques dans un espace-temps définit par une métrique qui joue le rôle de potentiel de la force gravitationnelle donnée par les coefficients de connexion.

En abaissant l'indice supérieur du coefficient de connexion

$$\Gamma_{\alpha\beta\gamma} = g_{\alpha\rho}\Gamma^{\rho}{}_{\beta\gamma} = \eta_{\mu\nu}\frac{\partial z^{\mu}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial^2 z^{\nu}}{\partial x^{\beta}\partial x^{\gamma}}$$

on conçoit que $\Gamma_{\alpha\beta\gamma}$ dépend directement du tenseur métrique $g_{\mu\nu}$ et de ses premières dérivées.

En dérivant les composantes du tenseur métrique on obtient

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\gamma}} = \eta_{\mu\nu}\frac{\partial^2 z^{\mu}}{\partial x^{\gamma}\partial x^{\alpha}}\frac{\partial z^{\nu}}{\partial x^{\beta}} + \eta_{\mu\nu}\frac{\partial z^{\mu}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial^2 z^{\nu}}{\partial x^{\gamma}\partial x^{\beta}}$$

soit

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\gamma}} = \Gamma_{\beta\gamma\alpha} + \Gamma_{\alpha\gamma\beta}$$

En calculant les permutations circulaires sur les indices, on peut isoler

$$\Gamma_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2}(\partial_{\beta}g_{\alpha\gamma} + \partial_{\gamma}g_{\alpha\beta} - \partial_{\alpha}g_{\beta\gamma})$$

et

$$\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma} = \frac{1}{2}g^{\alpha\rho}(\partial_{\beta}g_{\rho\gamma} + \partial_{\gamma}g_{\rho\beta} - \partial_{\rho}g_{\beta\gamma})$$

3.2 Limite newtonienne

Pour des faibles vitesses (en posant $c = 1$) on a

$$d\tau^2 = dt^2\left(g_{\mu\nu}\frac{dx^{\mu}}{dt}\frac{dx^{\nu}}{dt}\right)$$

et pour $\frac{dx^i}{dt} = v^i \ll 1$, on peut négliger les termes spatiaux et il reste $d\tau^2 \simeq dt^2 g_{00}$ et donc $\frac{dt}{d\tau} = g_{00}^{-1/2}$.

De même, dans l'équation géodésique, les termes avec les coefficients de connexion contenant les vitesses sont négligeables devant les termes d'indice $\mu = 0$ et il reste

$$\frac{d^2x^{\alpha}}{d\tau^2} + \Gamma^{\alpha}{}_{00}\frac{dx^0}{d\tau}\frac{dx^0}{d\tau} = 0$$

soit, en considlrant les composantes spatiales $\alpha = k$ et en passant à la variable t

$$\frac{1}{g_{00}}\frac{d^2x^k}{dt^2} + \Gamma^{k}{}_{00}\frac{1}{g_{00}} = 0.$$

Avec un champ faible, la métrique est quasi-minkowskienne $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, avec $h_{\mu\nu} \ll 1$, et on obtient

$$\Gamma^{k}{}_{00} = \frac{1}{2}\eta^{k\rho}(2\partial_0 g_{\rho 0} - \partial_{\rho}g_{00}) = -\frac{1}{2}\eta^{k\rho}\partial_{\rho}h_{00}$$

Ainsi, avec $\eta = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$

$$\frac{d^2x^k}{dk^2} + \frac{1}{2}\partial_k h_{00} = 0$$

Expressions à comparer à l'expression newtonienne

$$\frac{d^2x^k}{dt^2} = -\frac{GM}{r^3}x^k$$

où $r^2 = \sum_{k=1}^{3}(x^k)^2$ et x^k représente le vecteur liant M au corps étudié.

On en déduit que l'équation géodésique prend la forme newtonienne si

$$-\frac{1}{2}\partial_k h_{00} = -\Gamma^{k}{}_{00} = -\frac{GM}{r^3}x^k$$

ou, plus généralement

$$-\frac{1}{2}\partial_k h_{00} = -\Gamma^{k}{}_{00} = -\partial_k\phi$$

où ϕ est le potentiel gravitationnel (dans le cas d'une masse M sphérique homogène $\phi = -\frac{GM}{r}$).

On a alors

$$h_{00} = 2\phi$$

et

$$\boxed{g_{00} = 1 + 2\phi.}$$

On retrouve ainsi la dynamique newtonienne avec la métrique

$$g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1 + 2\phi, -1, -1, -1).$$

3.3 Tenseurs

Sous un changement de coordonnées $x \to x'$, les vecteurs de base se transforment de la manière suivante

$$e_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \frac{\partial}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu} = e_{\mu'} \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu}.$$

La métrique se transforme selon

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial z^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial z^\beta}{\partial x^\nu} = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial z^\alpha}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial z^\beta}{\partial x^{\nu'}} \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu}$$

soit

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu'\nu'} \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu}$$

Ainsi, la métrique se transforme de manière linéaire lors d'un changement de coordonnées, on dit que c'est un *tenseur*. La métrique est un tenseur *covariant* de rang 2, raison pour laquelle ses indices sont en bas, comme les vecteurs de base.

Le vecteur dual dx^μ est *contravariant*, car il se transforme selon

$$dx^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} dx^{\mu'}$$

Les vecteurs (de rang 1) et tenseurs (de rang supérieur à 1) contravariant portent leurs indices en haut. Les vecteurs sont des tenseurs de rang 1 et les fonctions des tenseurs de rang 0 (zéro).

Les coefficients de connexion ne sont pas des tenseurs

$$\Gamma_{\alpha\beta\gamma} = \eta_{\mu\nu} \frac{\partial z^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial^2 z^\nu}{\partial x^\beta \partial x^\gamma} = \eta_{\mu\nu} \frac{\partial z^\mu}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial}{\partial x^\beta} \left(\frac{\partial z^\nu}{\partial x^{\gamma'}} \frac{\partial x^{\gamma'}}{\partial x^\gamma} \right)$$

soit

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\alpha\beta\gamma} &= \eta_{\mu\nu} \frac{\partial z^\mu}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha} \left(\frac{\partial^2 z^\nu}{\partial x^\beta \partial x^{\gamma'}} \frac{\partial x^{\gamma'}}{\partial x^\gamma} + \frac{\partial z^\nu}{\partial x^{\gamma'}} \frac{\partial^2 x^{\gamma'}}{\partial x^\beta \partial x^\gamma} \right) \\
&= \eta_{\mu\nu} \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^{\beta'}}{\partial x^\beta} \frac{\partial x^{\gamma'}}{\partial x^\gamma} \frac{\partial z^\mu}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial^2 z^\nu}{\partial x^{\beta'} \partial x^{\gamma'}} + \eta_{\mu\nu} \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial z^\mu}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial z^\nu}{\partial x^{\gamma'}} \frac{\partial^2 x^{\gamma'}}{\partial x^\beta \partial x^\gamma} \\
&= \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^{\beta'}}{\partial x^\beta} \frac{\partial x^{\gamma'}}{\partial x^\gamma} \Gamma_{\alpha'\beta'\gamma'} + g_{\alpha'\gamma'} \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial^2 x^{\gamma'}}{\partial x^\beta \partial x^\gamma}
\end{aligned}$$

La présence du deuxième terme montre que les coefficients de connexion ne se transforme pas linéairement et ne sont pas des tenseurs.

On a ainsi

$$\boxed{\Gamma^\alpha_{\ \beta\gamma} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial x^{\beta'}}{\partial x^\beta} \frac{\partial x^{\gamma'}}{\partial x^\gamma} \Gamma^{\alpha'}_{\ \beta'\gamma'} + \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial^2 x^{\alpha'}}{\partial x^\beta \partial x^\gamma}}$$

qui n'est clairement pas un tenseur, à cause de la présence du dernier terme.

La dérivée partielle d'un vecteur n'est pas non plus un tenseur

$$\frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\beta} = \frac{\partial}{\partial x^\beta} \left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}} V^{\alpha'} \right) = \frac{\partial V^{\alpha'}}{\partial x^{\beta'}} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial x^{\beta'}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x^{\beta'} \partial x^{\alpha'}} \frac{\partial x^{\beta'}}{\partial x^\beta} V^{\alpha'}$$

La présence du deuxième terme rend effectivement la transformation non linéaire.

En remarquant que

$$\frac{\partial}{\partial x^\beta}\left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}}\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\gamma}\right)=\frac{\partial}{\partial x^\beta}\delta^\alpha{}_\gamma=0$$

on obtient

$$\begin{aligned}0&=\frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x^\beta\partial x^{\alpha'}}\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\gamma}+\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}}\frac{\partial^2 x^{\alpha'}}{\partial x^\beta\partial x^\gamma}\\&=\frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x^{\beta'}\partial x^{\alpha'}}\frac{\partial x^{\beta'}}{\partial x^\beta}\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\gamma}+\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}}\frac{\partial^2 x^{\alpha'}}{\partial x^\beta\partial x^\gamma}\end{aligned}$$

et donc

$$\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}}\frac{\partial^2 x^{\alpha'}}{\partial x^\beta\partial x^\gamma}=-\frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x^{\beta'}\partial x^{\alpha'}}\frac{\partial x^{\beta'}}{\partial x^\beta}\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\gamma}.$$

Ainsi la transformation des coefficients de connexions lors d'un changement de coordonnées peut s'écrire

$$\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}=\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}}\frac{\partial x^{\beta'}}{\partial x^\beta}\frac{\partial x^{\gamma'}}{\partial x^\gamma}\Gamma^{\alpha'}{}_{\beta'\gamma'}-\frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x^{\beta'}\partial x^{\alpha'}}\frac{\partial x^{\beta'}}{\partial x^\beta}\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\gamma}.$$

En contractant cette expression avec V^γil vient

$$\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}V^\gamma=\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}}\frac{\partial x^{\beta'}}{\partial x^\beta}\frac{\partial x^{\gamma'}}{\partial x^\gamma}\Gamma^{\alpha'}{}_{\beta'\gamma'}V^\gamma-\frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x^{\beta'}\partial x^{\alpha'}}\frac{\partial x^{\beta'}}{\partial x^\beta}\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\gamma}V^\gamma$$

soit

$$\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}V^\gamma=\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}}\frac{\partial x^{\beta'}}{\partial x^\beta}\Gamma^{\alpha'}{}_{\beta'\gamma'}V^{\gamma'}-\frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x^{\beta'}\partial x^{\alpha'}}\frac{\partial x^{\beta'}}{\partial x^\beta}V^{\alpha'}$$

On voit que le dernier terme annule exactement le dernier terme de la dérivée partielle de V^γ et ainsi l'expression

$$\frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\beta}+\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}V^\gamma$$

se transforme de manière linéaire : c'est un tenseur

$$\boxed{\frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\beta}+\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}V^\gamma=\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}}\frac{\partial x^{\beta'}}{\partial x^\beta}\left[\frac{\partial V^{\alpha'}}{\partial x^{\beta'}}+\Gamma^{\alpha'}{}_{\beta'\gamma'}V^{\gamma'}\right].}$$

On appelle *dérivée covariante* du vecteur V^γ l'expression

$$\boxed{\nabla_\beta V^\alpha=V^\alpha_{;\beta}=\frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\beta}+\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}V^\gamma.}$$

On montre de la même manière (ou sinon par contraction avec un vecteur contravariant ce qui donne un scalaire, pour lequel la dérivée covariante correspond à la dérivée partielle simple) que la dérivée covariante d'un vecteur covariant s'écrit

$$\boxed{\nabla_\beta v_\alpha=v_{\alpha;\beta}=\frac{\partial v_\alpha}{\partial x^\beta}-\Gamma^\gamma{}_{\alpha\beta}v_\gamma.}$$

Les dérivées covariantes d'un tenseur de rang quelconque et mixte s'écrit de même avec autant de correctifs avec les coefficients de connexion qu'il y a d'indice. Le signe des termes correctifs est positif pour les indices contravariant et négatif pour les indices covariants.

3.4 Équations d'Einstein

Nous avons vu que le principe d'équivalence conduit à interpréter le tenseur métrique comme le potentiel gravitationnel. La force de gravitation est donnée, quant à elle, par les coefficients de connexion et l'équation du mouvement est l'équation géodésique définie par les coefficients de connexion. Ainsi, si l'on connaît la métrique, on peut déterminer le mouvement des corps sous l'effet de la gravitation.

La question est alors de déterminer le tenseur métrique. En physique newtonienne, c'est la distribution des masses qui définit le potentiel gravitationnel selon l'équation de poisson

$$\vec g=\frac{\vec F}{m}=-\nabla\phi=-G\frac{M}{r^2}\hat r\quad\text{où}\quad-\triangle\phi=4\pi\rho$$

Or selon l'approximation newtonienne on a

$$\Gamma^k{}_{00} = \frac{1}{2}\partial_k g_{00} = \partial_k \phi$$

ainsi, l'approximation newtonienne indique

$$-\partial_k \Gamma^k_{00} = 4\pi G\rho$$

ce qui tend à montrer que la relation entre la métrique et la distribution de 'charge-source' est du deuxième ordre en la métrique, ou du premier ordre dans les coefficients de connexion.

Les seuls tenseurs de rang 2 qui sont du second ordre dans la métrique sont le tenseur de Ricci $R_{\mu\nu}$ et la courbure scalaire multipliée par la métrique $Rg_{\mu\nu}$.

Aussi, en général, on cherche un tenseur de rang 2 de la forme $c_1 R_{\mu\nu} + c_2 g_{\mu\nu} R$.

Le membre de droite est lié à la densité de matière-énergie et donc au tenseur de densité d'énergie-impulsion $T_{\mu\nu}$. Or ce dernier obéit à un principe de conservation $T_{\mu\nu;\rho} = 0$ et la seule combinaison des tenseurs de courbure qui suit une loi de conservation de ce type est le tenseur d'Einstein

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R.$$

On en vient ainsi à poser comme équation des champs

$$G_{\mu\nu} = K T_{\mu\nu}.$$

Si l'on demande encore à obtenir l'approximation newtonienne, on obtient le facteur de proportionnalité $K = \frac{8\pi G}{c^4}$. La relation cherchée entre source et champ est alors

$$\boxed{G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}}$$

C'est l'équation qui définit le tenseur métrique, en fonction de la distribution d'énergie et de matière dans l'Univers.

La distribution de matière-énergie définit la métrique de l'espace-temps, et la métrique de l'espace-temps détermine les mouvement de la matière dans l'espace-temps.

3.5 Solution homogène et isotrope

Dans le cas d'un univers homogène, les coefficients du tenseur métrique ne peuvent pas dépendre de la direction, ni de la position. Ainsi, on doit avoir un tenseur métrique de la forme

$$ds^2 = A^2 dt^2 - B^2(dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

ou, en coordonnée sphériques, avec $d\ell^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = dr^2 + r^2 d\Omega$

$$ds^2 = A^2 dt^2 - B^2(dr^2 + r^2 d\Omega)$$

Exemple 1

Considérons une métrique qui est spatialement euclidienne, mais dont le facteur d'échelle dépend du temps

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)(dr^2 + r^2 d^2\Omega).$$

Plaçons-nous dans une base orthonormée avec $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ et

$$\omega^t = dt, \quad \omega^r = adr, \quad \omega^\theta = ard\theta, \quad \omega^\phi = ar\sin(\theta)d\phi.$$

Utilisons la notation compacte $\omega = (\omega^t, \omega^r, \omega^\theta, \omega^\phi)$ et déterminons Ω telle que

$$d\omega + \Omega \wedge \omega = 0.$$

On a clairement

$$d\omega = \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{a}\, dt \wedge dr \\ \dot{a}r\, dt \wedge d\theta + a\, dr \wedge d\theta \\ \dot{a}r \sin(\theta)\, dt \wedge d\phi + a \sin(\theta)\, dr \wedge d\phi + ar\cos(\theta) d\theta \wedge d\phi \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} d\omega^t \\ d\omega^r \\ d\omega^\theta \\ d\omega^\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\dot{a}}{a}\, \omega^t \wedge \omega^r \\ \frac{\dot{a}}{a}\, \omega^t \wedge \omega^\theta + \frac{1}{ar}\, \omega^r \wedge \omega^\theta \\ \frac{\dot{a}}{a}\, \omega^t \wedge \omega^\phi + \frac{1}{ar}\, \omega^r \wedge \omega^\phi + \frac{\cot(\theta)}{ar} \omega^\theta \wedge \omega^\phi \end{pmatrix} = -\Omega \wedge \omega = -(\omega^\mu{}_\nu \wedge \omega^\nu)$$

We retrieve thus

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{\dot{a}}{a}\, \omega^r & \dfrac{\dot{a}}{a}\, \omega^\theta & \dfrac{\dot{a}}{a}\, \omega^\phi \\ \dfrac{\dot{a}}{a}\, \omega^r & 0 & -\frac{1}{ar}\, \omega^\theta & -\frac{1}{ar}\, \omega^\phi \\ \dfrac{\dot{a}}{a}\, \omega^\theta & \frac{1}{ar}\, \omega^\theta & 0 & -\frac{\cot(\theta)}{ar} \omega^\phi \\ \dfrac{\dot{a}}{a}\, \omega^\phi & \frac{1}{ar}\, \omega^\phi & \frac{\cot(\theta)}{ar} \omega^\phi & 0 \end{pmatrix} = (\omega^\mu{}_\nu)$$

The curvature two-form is then given by

$$\mathcal{R} = d\Omega + \Omega \wedge \Omega$$

with

$$d\Omega = \begin{pmatrix} 0 & + & + & + \\ \frac{\ddot{a}}{a} \omega^t \wedge \omega^r & 0 & 0 & - \\ \frac{\ddot{a}}{a} \omega^t \wedge \omega^\theta + \frac{\dot{a}}{a^2 r} \omega^r \wedge \omega^\theta & 0 & 0 & - \\ \frac{\ddot{a}}{a} \omega^t \wedge \omega^\phi + \frac{\dot{a}}{a^2 r} \omega^r \wedge \omega^\phi + \frac{\dot{a}}{a^2 r} \cot(\theta) \omega^\theta \wedge \omega^\phi & \frac{\cot(\theta)}{a^2 r^2} \omega^\theta \wedge \omega^\phi & -\frac{1}{a^2 r^2} \omega^\theta \wedge \omega^\phi & 0 \end{pmatrix}$$

and

$$\Omega \wedge \Omega = \begin{pmatrix} 0 & 0 & + & + \\ 0 & 0 & - & - \\ \frac{\dot{a}}{a^2 r} \omega^\theta \wedge \omega^r & \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 \omega^\theta \wedge \omega^r & 0 & - \\ \frac{\dot{a}}{a^2 r} \omega^\phi \wedge \omega^r + \frac{\dot{a}}{a^2 r} \cot(\theta) \omega^\phi \wedge \omega^\theta & \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 \omega^\phi \wedge \omega^r + \frac{\cot(\theta)}{a^2 r^2} \omega^\phi \wedge \omega^\theta & \left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{1}{a^2 r^2}\right) \omega^\phi \wedge \omega^\theta & 0 \end{pmatrix}$$

So that the curvature2-form is

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} 0 & + & + & + \\ -\frac{\ddot{a}}{a} \omega^r \wedge \omega^t & 0 & - & - \\ -\frac{\ddot{a}}{a} \omega^\theta \wedge \omega^t & \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 \omega^\theta \wedge \omega^r & 0 & - \\ -\frac{\ddot{a}}{a} \omega^\phi \wedge \omega^t & \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 \omega^\phi \wedge \omega^r & \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 \omega^\phi \wedge \omega^\theta & 0 \end{pmatrix}$$

The Ricci tensor is then

$$R_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(-3\frac{\ddot{a}}{a}, -\frac{\ddot{a}}{a} + 2\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2, -\frac{\ddot{a}}{a}, -\frac{\ddot{a}}{a} - 2\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2)$$

and the scalar curvature

$$R = 0,$$

Which is clear since the 3-space is euclidean and the factor a is just a time-dependent scale factor.

So the Einstein tensor is equal to the Ricci tensor

$$G = (G^{\mu}{}_{\nu}) = (R^{\mu}{}_{\nu}) = \begin{pmatrix} -3\frac{\ddot{a}}{a} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\ddot{a}}{a} - 2\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\ddot{a}}{a} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\ddot{a}}{a} + 2\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 \end{pmatrix}$$

The values of these matrix elements are then related to the energy-momentum tensor. In a homogeneous fluid filled space of mean density ρ we have

$$-3\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{8\pi G}{c^4}\rho c^2$$

and we can write it as

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \kappa\rho.$$

In empty space, we have, the tt component vanishes and we are left with

$$-\frac{\ddot{a}}{a} = 0$$

from which we have

$$a = kt + a_0.$$

If ρ is a constant instead we get

$$-3\frac{\ddot{a}}{a} = \kappa\rho \;\Leftrightarrow\; \ddot{a} + \frac{\kappa\rho}{3}a = 0$$

of which the solution is of the form

$$a(t) = a_{\max}\cos\left(\sqrt{\frac{\kappa\rho}{3}}t + \phi_0\right).$$

3.5.1 Métrique de Friedmann-Robertson-Walker-Lemaître

$$ds^2 = c^2dt^2 - R^2(t)\left(\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\Omega\right)$$

avec $k \in \{-1, 0, 1\}$.

On peut évaluer la taille de l'Univers en calculant son rayon

$$s(a,b) = \int_a^b \sqrt{\gamma_{ij}dx^i dx^j} = R(t)\int_a^b \frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}}$$

Si $k \in \{-1, 0\}$ (univers ouvert ou de courbure nulle), alors $r \in [0, \infty]$ et l'intégration du rayon peut se faire de $a = 0$ à $b = \infty$. L'univers est de taille infinie $s(0, \infty) = \infty$.

Si $k = 1$ (univers fermé), alors la variable $r \in [0, 1[$ et $s(0, 1) = \pi R(t)$, l'univers est de taille finie, mais sans bord. La géométrie spatiale est celle d'une 3-sphère S_3.

3.6 Solutions à courbure constante (espaces de De Sitter)

Les espaces de courbure constante se divisent en trois catégories. Les espaces de courbure positive (de De Sitter), les espaces de courbure négative (anti-De Sitter) et les espaces de courbure nulle.

3.7 Energy-Momentum Tensor

Le tenseur d'énergie impulsion $T^{\mu\nu}$ détermine la courbure de l'espace-temps via les équations d'Einstein

$$G^{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T^{\mu\nu}.$$

En résolvant cette équation pour $g^{\mu\nu}$, on obtient la métrique (qui généralise le potentiel gravitationnel de la mécanique newtonienne).

3.8 Équations linéarisées et ondes gravitationnelles

On considère que la métrique est quasi-minkowskienne (quasi plate)

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$$

avec $h_{\mu\nu} \ll 1$ en unités naturelles et on développe les résultats au premier ordre en h.

En particulier, les coefficients de connexion sont donnés par

$$\Gamma_{\gamma\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(\partial_\beta h_{\alpha\gamma} + \partial_\alpha h_{\beta\gamma} - \partial_\gamma h_{\alpha\beta}\right)$$

et $\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta} = \eta^{\mu\gamma}\Gamma_{\gamma\alpha\beta}$.

3.9 Solution de Schwartzschild

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)dt^2 - \frac{1}{1 - \frac{2M}{r}}dr^2 - r^2 d^2\Omega$$

3.10 Solution de Kerr

3.11 Solution de Kerr-Newman

Bibliographie

[LL] L.D. Landau and E. Lifchitz. *Physique théorique : tome 6. Théorie des champs.* MIR Moscou, 1990.

Abstract : Grand classique de physique théorique. Le texte met en évidence des relations peu fréquentes dans les autres ouvrages.

[MTW] Charles Misner, Kip S. Thorne, and John Archibald Wheeler. *Gravitation.* Freeman, 1973.

Abstract : Bon bouquin intermédiaire à avancé. Excellent livre pour continuer après un livre d'introduction. De nombreux exercices complètent ce livre.

[SW] Steven Weinberg. *Gravitation and Cosmology.* Wiley, 1972.

Abstract : Excellent ouvrage. Une première approche à la relativité permet de mieux apprécier ce livre, qui ne fait pas de concessions à la rigueur et donne une approche calculatoire, fondée sur le principe d'équivalence et les changements de coordonnées, de la relativité générale. Aucun exercice.

[Wald] Robert Wald. *General Relativity.* Chicago University Press, 1984.

Abstract : Très dense et profond. Définitivement pas adapté à une première approche, mais intéressant et met bien l'accent sur le côté local de la définition des tenseurs.

Index