Mesure de $\gamma = \frac{c_p}{c_V}$

Guglielmo Pasa

10 décembre 2015

Table des matières

1 Introduction

Une transformation adiabatique d'un gaz est donnée par la formule :

$$pV^{\gamma} = \text{cste},$$

où $\gamma = \frac{c_p}{c_V}$. Dans le cas d'un gaz parfait on a :

$$\gamma = \frac{5}{3}.$$

On utilise un grand réservoir de volume V_0 auquel est relié un tube en verre. On y glisse une bille de masse m et de diamètre juste inférieur à celui du tube.

Á l'équilibre on a (sur un axe vertical Ox dirigé vers le haut) :

$$-mg - p_{\text{at}}S + p_0 S = 0 \tag{1}$$

Lorsque la bille est en x :

$$-mg - p_{\text{at}}S + pS = m\ddot{x}. \tag{2}$$

De (1) :

$$p_{\text{at}}S = p_0 - mg.$$

Dans (2) :

$$-mg - p_0 S + mg + pS = m\ddot{x}$$

soit :

$$(p - p_0)S = m\ddot{x}.$$

il faut maintenant exprimer $p(x)$ la pression dans le réservoir lorsque la bille est en x.

La transformation étant adiabatique on a :

$$p(x)V^\gamma = p_0 V_0^\gamma,$$

soit :

$$p(x)(V_0 + xS)^\gamma = p_0 V_0^\gamma.$$

d'où, en posant $l_0 = \frac{V_0}{S}$:

$$p(x) = p_0 \left(\frac{l_0}{l_0 + x}\right)^\gamma,$$

ou encore :

$$p(x) = p_0 \frac{1}{(1 + \frac{x}{l_0})^\gamma}.$$

Ainsi l'équation du mouvement de la bille est :

$$\ddot{x} = p_0 \frac{S}{m} \left(\frac{1}{(1 + \frac{x}{l_0})^\gamma} - 1\right). \tag{3}$$

2 linéarisation

Si nous choisissons un réservoir suffisament grand on a $l_0 >> x$ et on peut écrire :

$$\frac{1}{1 + \frac{x}{l_0}} \simeq 1 - \frac{x}{l_0},$$

de telle sorte que :

$$\frac{1}{(1 + \frac{x}{l_0})^\gamma} \simeq (1 - \frac{x}{l_0})^\gamma \simeq 1 - \gamma \frac{x}{l_0}.$$

Dans (3) :

$$\ddot{x} = -p_0 \frac{S}{m} \gamma \frac{x}{l_0},$$

ou encore :

$$\ddot{x} = -\gamma \frac{p_0 S}{m l_0} x.$$

C’est un mouvement oscillatoire harmonique de pulsation

$$\omega = \sqrt{\frac{\gamma p_0 S}{m l_0}} = \sqrt{\frac{\gamma S^2 p_0}{m V_0}}.$$

La période du mouvement est donnée par :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{S}\sqrt{\frac{m V_0}{p_0 \gamma}}.$$

La période est facilement mesurable. On peut alors calculer γ :

$$\gamma = 4\pi^2 \frac{V_0}{S^2} \frac{m}{p_0 T^2}.$$