# Exercises from Shapiro,Teukolsky

## *Black Holes, White Dwarfs & Neutron Stars The Physics of Compact Objects*

(3 mars 2016)

G. Pasa

# Table des matières

# Chapitre 1

# Star Death and the Formation of Compact Objects

**Exercice 1.1**

**Exercice 1.2**

**Exercice 1.3**

# Chapitre 2

# Cold Equation of State Below Neutron Drip

## Exercice 2.1

Les transformations de Lorentz donnent, avec les axes orientés convenablement,

$$\begin{cases} ct' &= \gamma(ct - \beta x) \\ x' &= \gamma(x - vt) \\ y' &= y \\ z' &= z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} cdt' &= \gamma(cdt - \beta dx) \\ dx' &= \gamma(dx - vdt) \\ dy' &= y \\ dz' &= z \end{cases}$$

et pour $dt = 0$, on a

$$d^3x' = \gamma d^3x$$

Pour l'impulsion, on a

$$\begin{cases} E' &= \gamma(E - \beta cp_x) \\ cp'_x &= \gamma(cp_x - \beta E) \\ p'_y &= p_y \\ p'_z &= p_z \end{cases}$$

d'où

$$\frac{E'}{\gamma} + \beta cp_x = E$$

dans $cp'_x$

$$cp'_x = \gamma cp_x - \beta\gamma(\frac{E'}{\gamma} + \beta cp_x) = \gamma(1-\beta^2)cp_x - \beta E'$$

et

$$\begin{cases} cdp'_x &= \frac{1}{\gamma}cdp_x - \beta dE' \\ dp'_y &= dp_y \\ dp'_z &= dp_z \end{cases}$$

Or dans le référentiel $\mathcal{R}'$, le volume de l'espace des impulsions est pris à énergie constante $E' = $ cste. Une surface d'énergie donnée dans l'espace des impulsion de $\mathcal{R}'$ ne correspond pas à une énergie constante de $\mathcal{R}$. Aussi a-t-on $dE' = 0$, bien que $dE \neq 0$. Il s'agit du même volume de l'espace de phase, mais qui ne correspond pas à la même surface d'énergie constante. [1], de sorte que

$$d^3p' = \frac{1}{\gamma} d^3p$$

Ainsi

$$d^3x' d^3p' = d^3x d^3p.$$

---

## Exercice 2.2

Soit

$$\begin{aligned}
\phi(x) &= \frac{1}{8\pi^2}(x\sqrt{1+x^2}(\frac{2}{3}x^2 - 1) + \ln(x + \sqrt{1+x^2})) \\
\chi(x) &= \frac{1}{8\pi^2}(x\sqrt{1+x^2}(2x^2 + 1) - \ln(x + \sqrt{1+x^2}))
\end{aligned}$$

1. Pour le cas non relativiste, $x \ll 1$ et on a

$$\sqrt{1+x^2} = 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + \frac{x^6}{16} - \frac{5}{128}x^8 + O(x^{10})$$

et

$$\begin{aligned}
x\sqrt{1+x^2}(\frac{2}{3}x^2 - 1) &= -x + \frac{x^3}{6} + \frac{11}{24}x^5 - \frac{7}{48}x^7 + \frac{31}{384}x^9 + O(x^{10}) \\
x\sqrt{1+x^2}(2x^2 + 1) &= x + \frac{5}{2}x^3 + \frac{7}{8}x^5 - \frac{3}{16}x^7 + \frac{11}{128}x^9 + O(x^{10})
\end{aligned}$$

enfin

$$\ln(x + \sqrt{1+x^2}) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{3}{40}x^5 - \frac{5}{112}x^7 + \frac{35}{1152}x^9 + O(x^{10})$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\phi(x) &= \frac{1}{8\pi^2}\left(\frac{8}{15}x^5 - \frac{4}{21}x^7 + \frac{1}{9}x^9 + O(x^{10})\right) \\
\chi(x) &= \frac{1}{8\pi^2}\left(\frac{16}{6}x^3 + \frac{4}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{18}x^9 + O(x^{10})\right)
\end{aligned}$$

Soit

$$\begin{aligned}
\phi(x) &= \frac{1}{15\pi^2}\left(x^5 - \frac{5}{14}x^7 + \frac{5}{24}x^9 + O(x^{10})\right) \\
\chi(x) &= \frac{1}{3\pi^2}\left(x^3 + \frac{3}{10}x^5 - \frac{3}{56}x^7 + \frac{1}{48}x^9 + O(x^{10})\right)
\end{aligned}$$

1. Dans la littérature, on avance l'argument que "dans le référentiel de la particule", $dE' = 0$. Or, lors d'une transformation de Lorentz quelconque, le nouveau référentiel n'est généralement pas le référentiel de la particule considérée. Ainsi, on ne peut pas affirmer que $dE' = 0$, lorsque l'on passe d'un référentiel $\mathcal{R}$ vers un référentiel $\mathcal{R}'$ pour cette raison. En effet, il n'y aurait alors pas plus de raison pour que $dE' = 0$ que pour $dE = 0$.

2. Pour le cas ultrarelativiste, $x \to \infty$ et on a

$$\ln(x + \sqrt{1+x^2}) \simeq \ln(2x)$$

et avec

$$\sqrt{1+x^2} = x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} \simeq x(1 + \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{8x^4} + O(x^{-6}))$$

$$x\sqrt{1+x^2}\big(\frac{2}{3}x^2 - 1\big) \simeq (x^2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{8x^2})\big(\frac{2}{3}x^2 - 1\big) \simeq \frac{2}{3}x^4 - \frac{2}{3}x^2$$
$$x\sqrt{1+x^2}(2x^2+1) \simeq (x^2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{8x^2})(2x^2+1) \simeq 2x^4 + 2x^2$$

d'où

$$\phi(x) = \frac{1}{12\pi^2}\big(x^4 - x^2 + \frac{3}{2}\ln(2x)\big)$$
$$\chi(x) = \frac{1}{4\pi^2}\big(x^4 + x^2 - \frac{1}{2}\ln(2x)\big)$$

---

Si

$$P = K\rho^\Gamma = \frac{mc^2}{\lambda^3}\phi(x) = \frac{mc^2(mc)^3}{\hbar^3}\phi(x) \qquad (2.3.21)$$

avec $\rho = nm_u\mu_e$ et $n = \frac{x^3}{3\pi\lambda^3}$, on a

$$K\left(\frac{m_u\mu_e x^3}{3\pi^2\lambda^3}\right)^\Gamma = \frac{mc^2}{\kappa\pi^2\lambda^3}x^n$$

avec dans le cas non relativiste $n = 5$ et $\kappa = 15$ et dans le cas relativiste $n = 4$ et $\kappa = 12$. On a ainsi

(a) cas non-relativiste : $3\Gamma = 5$ (donc $\Gamma = \frac{5}{3}$) et avec $m = m_e$

$$K\left(\frac{m_u\mu_e}{3\pi^2\lambda^3}\right)^{\frac{5}{3}} = \frac{mc^2}{15\pi^2\lambda^3} \;\Leftrightarrow\; K = \frac{3^{\frac{2}{3}}\pi^{\frac{4}{3}}}{5}\frac{\hbar^2}{m_e m_u^{\frac{5}{3}}\mu_e^{\frac{5}{3}}}$$

(b) cas relativiste : $3\Gamma = 4$ (donc $\Gamma = \frac{4}{3}$) et avec $m = m_e$

$$K\left(\frac{m_u\mu_e}{3\pi^2\lambda^3}\right)^{\frac{4}{3}} = \frac{mc^2}{12\pi^2\lambda^3} \;\Leftrightarrow\; K = \frac{3^{\frac{1}{3}}\pi^{\frac{2}{3}}}{4}\frac{c\hbar}{m_u^{\frac{4}{3}}\mu_e^{\frac{4}{3}}}$$

## Exercice 2.3

De l'équation (2.1.7) on a

$$P = n^2\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\epsilon}{n}\right)$$

et de (2.3.4)

$$n = \frac{1}{3\pi\lambda^3}x^3 \quad \Leftrightarrow \quad dx = \frac{\pi\lambda^3}{x^2}dn$$

Ainsi

$$\partial_n = \partial_n(x)\partial_x = \frac{\pi\lambda^3}{x^2}\partial_x$$

Enfin avec (2.3.7) on a

$$\epsilon = \frac{mc^2}{\lambda^3}\chi$$

et

$$\chi = \frac{1}{8\pi^2}\left(x\sqrt{1+x^2}(1+2x^2) - \ln(x+\sqrt{1+x^2})\right)$$

et

$$\frac{\epsilon}{n} = \frac{3\pi mc^2}{x^3}\chi$$

On trouve alors

$$\begin{aligned}
\partial_n(\frac{\epsilon}{n}) &= \frac{\pi\lambda^3}{x^2}\partial_x\left(\frac{3\pi mc^2}{x^3}\chi\right) \\
&= \frac{3\pi^2\lambda^3 mc^2}{x^6}(x\chi' - 3\chi).
\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}
\chi' &= \frac{1}{8\pi^2}\big(\sqrt{1+x^2}(1+2x^2) + 4x^2\sqrt{1+x^2} + \frac{2x^2(1+2x^2)}{2\sqrt{1+x^2}} - \frac{1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}\big) \\
&= \frac{1}{8\pi^2}\big(\sqrt{1+x^2}(1+6x^2) + \frac{x^2+2x^4-1}{\sqrt{1+x^2}}\big) \\
&= \frac{1}{8\pi^2}\big(\sqrt{1+x^2}(1+6x^2) + \frac{(2x^2-1)(x^2+1)}{\sqrt{1+x^2}}\big) \\
&= \frac{1}{8\pi^2}\big(\sqrt{1+x^2}(1+6x^2+2x^2-1)\big) \\
&= \frac{1}{8\pi^2}8x^2\sqrt{1+x^2}
\end{aligned}$$

De sorte que

$$\begin{aligned}
x\chi - 3\chi &= \frac{1}{8\pi^2}\big(x\sqrt{1+x^2}(2x^2-3) + 3\ln(x+\sqrt{1+x^2}\big) \\
&= \frac{3}{8\pi^2}\big(x\sqrt{1+x^2}(\frac{2}{3}x^2-1) + \ln(x+\sqrt{1+x^2}\big) \\
&= 3\phi(x)
\end{aligned}$$

Ainsi

$$P = \left(\frac{1}{3\pi\lambda^3}x^3\right)^2 \frac{3\pi^2\lambda^3 mc^2}{x^6}3\phi(x)$$

soit

$$P = \frac{mc^2}{\lambda^3}\phi(x).$$

---

## Exercice 2.4

On a

$$\begin{aligned}\epsilon + P &= \frac{mc^2}{\lambda^3}(\chi(x)+\phi(x)) \\ &= \frac{mc^2}{8\pi^2\lambda^3}\sqrt{1+x^2}\frac{8}{3}x^3 \\ &= mc^2\sqrt{1+x^2}\frac{x^3}{3\pi^2\lambda^3} \\ &= nmc^2\sqrt{1+x^2}\end{aligned}$$

or

$$x = \frac{p_F}{mc} \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{1+x^2} = \sqrt{1+\frac{p_F^2}{m^2c^2}} = \frac{1}{mc}\sqrt{m^2c^2+p_F^2} = \frac{E_F}{mc^2}$$

Ainsi, on a bien

$$\frac{\epsilon + P}{n} = E_F.$$

---

## Exercice 2.5

Le nombre d'électron par nucléon pour l'hydrogène est $Y_H \simeq 1$ et pour les autres éléments $Y \simeq \frac{1}{2}$. Ainsi, si $X$ est la proportion d'hydrogène et $1-X$ celle des autres éléments, la masse molaire moyenne par électron est alors

$$\mu_e = \frac{\frac{m_B}{m_u}}{XY_H + (1-X)Y} \simeq \frac{1}{X + (1-X)\frac{1}{2}} = \frac{2}{X+1}.$$

---

## Exercice 2.6

(a) Dans le cas non relativiste, on a $E = \frac{p^2}{2m}$ et

$$\epsilon = \frac{4\pi g}{h^3}\int_0^{p_F}\frac{p^2}{2m}p^2dp = \frac{4\pi g}{5h^3}\frac{p_F^5}{2m}$$

De plus, on a

$$n = \frac{4\pi g}{h^3}\int_0^{p_F}p^2dp = \frac{4\pi g}{3h^3}p_F^3$$

Ainsi, l'énergie moyenne par électron est

$$E = \frac{\epsilon}{n} = \frac{3}{5}\frac{p_F^2}{2m}$$

soit

$$\boxed{E = \frac{3}{5}E_F.}$$

(b) Dans le cas relativiste, on a

$$\epsilon = \frac{4\pi g}{h^3}\int_0^{p_F}(\sqrt{p^2c^2+m^2c^4}-mc^2)p^2dp = \frac{4\pi g}{h^3}(mc^2)(mc)^3\int_0^{x_F}x^2(\sqrt{x^2+1}-1)dx$$

## Exercice 2.7

(a) La distribution de Boltzman est

$$f(E) = e^{\beta(\mu - E - mc^2)}$$

(b) On a

$$\frac{\epsilon + P}{n} - Ts = \mu$$

or, du point précédent

$$\epsilon = n(mc^2 + \frac{3}{2}kT) \quad \text{et} \quad P = nkT$$

Ainsi

$$\frac{\epsilon + P}{n} = mc^2 + \frac{5}{2}kT.$$

On obtient alors

$$\frac{\epsilon + P}{n} - Ts = \mu \quad \Leftrightarrow \quad \frac{5}{2}kT - Ts = \mu - mc^2$$

et en divisant par $kT$

$$\frac{5}{2} - \frac{s}{k} = \frac{\mu - mc^2}{kT}.$$

Or

$$n = g\left(\frac{mkT}{2\pi\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}} e^{\beta(\mu - mc^2)}$$

Ainsi

$$\frac{mc^2 - \mu}{kT} = \ln\left[\frac{g}{n}\left(\frac{mkT}{2\pi\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}}\right]$$

de sorte que

$$\boxed{\frac{5}{2} = \frac{s}{k} + \ln\left[\frac{g}{n}\left(\frac{mkT}{2\pi\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}}\right]}$$

---

## Exercice 2.8

## Exercice 2.9

On a

$$n = g\frac{4\pi}{h^3}e^{\beta\mu}\int_0^\infty p^2 e^{-\beta E(p)}dp$$

avec

$$\begin{cases} \text{relativiste :} & E = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} \\ \text{non relativiste :} & E = \frac{p^2}{2m} \end{cases}$$

En posant

$$\begin{cases} u & = e^{-\beta E} \\ dv & = p^2 dp \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du & = -\beta\frac{dE}{dp}e^{-\beta E} \\ v & = \frac{1}{3}p^3 \end{cases}$$

On obtient

$$n = \frac{1}{3}\beta K \int_0^\infty p^3 \frac{dE}{dp} e^{-\beta E} dp$$

Or, $\frac{dE}{dp} = v$ dans le cas relativiste et non relativiste,

$$\begin{cases} \text{relativiste :} & \frac{dE}{dp} = \frac{pc^2}{\sqrt{p^2c^2+m^2c^4}} = \frac{pc^2}{E} = v \\ \text{non relativiste :} & \frac{dE}{dp} = \frac{2p}{2m} = v \end{cases}$$

ainsi

$$nkT = \frac{1}{3}K \int_0^\infty pve^{-\beta E} p^2 \, dp = P$$

---

## Exercice 2.10

## Exercice 2.11

## Exercice 2.12

## Exercice 2.13

## Exercice 2.14

## Exercice 2.15

## Exercice 2.16

## Exercice 2.17

## Exercice 2.18

## Exercice 2.19

## Exercice 2.20

## Exercice 2.21

**Exercice 2.24**

# Chapitre 3

# White Dwarfs

## 3.1 A bit of thermodynamics

Le premier principe de la thermodynamique, pour un gaz s'écrit (dans cette section $p$ est la pression du gaz)

$$dU = Tds - pdV$$

Avec $\epsilon = nU$ on a

$$dU = \frac{d\epsilon}{n} - \frac{\epsilon}{n^2}dn \;\Leftrightarrow\; d\epsilon = ndU + \frac{\epsilon}{n}dn$$

De plus, avec $dV = d(\frac{1}{n}) = -\frac{dn}{n^2}$, on obtient d'où

$$d\epsilon = nTds\frac{p}{n}dn + \frac{\epsilon}{n}dn \;\Leftrightarrow\; \boxed{d\epsilon = nTds + \frac{p+\epsilon}{n}dn.}$$

L'enthalpie $h = U + pV = \frac{\epsilon}{n} + \frac{p}{n} = \frac{\epsilon+p}{n}$ s'écrit

$$h = U + pV \;\Leftrightarrow\; dh = dU + pdV + Vdp = dU - \frac{p}{n^2}dn + \frac{dp}{n}$$

On trouve alors

$$\begin{aligned} dh &= \frac{d\epsilon}{n} - \frac{\epsilon}{n^2}dn - \frac{p}{n^2}dn + \frac{dp}{n} \\ &= Tds + \frac{p+\epsilon}{n^2}dn - \frac{\epsilon}{n^2}dn - \frac{p}{n^2}dn + \frac{dp}{n} \end{aligned}$$

soit

$$dh = Tds + \frac{dp}{n}$$

## 3.2 Equilibre des étoiles

Avec

$$m(r) = \int_0^r 4\pi y^2 \rho\, dy \;\Leftrightarrow\; \boxed{\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho}$$

Soit une coquille sphérique mince d'épaisseur $dr$ et de rayon $r$. La pression $p(r)$ en $r$ est donnée par

$$p(r) = p(r+dr) + \frac{dF}{dA}$$

où $dF$ est la force exercée par un petit cylindre de base $dA$ et de hauteur $dr$ de densité $\rho$

$$dF = \frac{Gm(r)dm}{r^2} \quad \Leftrightarrow \quad dm = \rho\, dA\, dr$$

d'où

$$p(r) = p(r+dr) + \frac{Gm\rho}{r^2}dr \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\frac{dP}{dr} = -\frac{Gm\rho}{r^2}}$$

En isolant $m$ et en dérivant, on obtient

$$-\frac{r^2}{\rho}\frac{dP}{dr} = Gm \quad \Leftrightarrow \quad G\frac{dm}{dr} = -\frac{d}{dr}\left(\frac{r^2}{\rho}\frac{dP}{dr}\right)$$

que l'on peut récrire

$$4\pi Gr^2\rho = -\frac{d}{dr}\left(\frac{r^2}{\rho}\frac{dP}{dr}\right)$$

**Exemple 1 (Densité constante)**

Si $\rho = $ cste on obtient

$$4\pi Gr^2\rho^2 = -2rP' - r^2P'' \;\Leftrightarrow\; rP'' + 2P' + 4\pi Gr\rho^2 = 0$$

Avec les conditions $P(R) = 0$ et $P(0) \in \mathbb{R}$, on peut résoudre le problène en posant $u = P'$ l'équation homogène devient

$$ru' + 2u = 0 \;\Leftrightarrow\; u = \frac{K}{r^2}$$

et en variant la constante

$$u' = \frac{K'r^2 - 2Kr}{r^4} = \frac{K'r - 2K}{r^3}$$

dans l'équation avec second membre

$$\frac{K'r - 2K}{r^2} + 2u + 4\pi Gr\rho^2 = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{K'}{r} = -4\pi Gr\rho^2$$

de sorte que

$$K = -\frac{4\pi G\rho^2}{3}r^3 + C$$

Ainsi

$$u(r) = P' = \frac{C}{r^2} - \frac{4}{3}\pi G\rho^2 r$$

et on obtient

$$P = \frac{C_1}{r} - \frac{2}{3}\pi G\rho^2r^2 + C_2$$

Avec $P(0) \in \mathbb{R}$ on a $C_1 = 0$ et avec $P(R) = 0$

$$C_2 = \frac{2}{3}\pi G\rho^2R^2$$

Ainsi
$$\boxed{P = \frac{2}{3}\pi G\rho^2(R^2 - r^2).}$$

De
$$P = n^2\partial_n\left(\frac{\epsilon}{n}\right) = n\partial_n\epsilon - \epsilon$$
avec $\epsilon' = \epsilon - nmc^2$ on a
$$P = n\partial_n\epsilon' - \epsilon'$$
et
$$U = 4\pi\int_0^R \epsilon' r^2 dr$$
or
$$\epsilon' = \frac{P}{\Gamma - 1}$$
Ainsi
$$U = 4\pi\int_0^R \frac{P}{\Gamma - 1} r^2 dr$$
Mais comme
$$W = -3\pi\int_0^R P4\pi r^2 dr$$
On peut écrire
$$U = \frac{W}{-3(\Gamma - 1)} \Leftrightarrow \boxed{W = -3(\Gamma - 1)U}$$

## Exercice 3.1

En statistique de Boltzmann, on a, pour les trois degrés de libertés de translation
$$\epsilon'_B = \frac{3}{2}nkT$$
D'autre part
$$\epsilon' = \frac{P}{\Gamma - 1}$$
et $P = nkT$ en statistique de Boltzmann. Ainsi, on a
$$U = 4\pi\int_0^R \frac{nkT}{\Gamma - 1} r^2 dr = \frac{4}{3}\pi R^3 \frac{nkT}{\Gamma - 1} = V\frac{nkT}{\Gamma - 1}.$$
Ainsi
$$u = \frac{U}{V} = \frac{nkT}{\Gamma - 1} \Leftrightarrow (\Gamma - 1)u = nkT$$
donc
$$\epsilon'_B = \frac{3}{2}(\Gamma - 1)u$$
et en multipliant les deux membres par le volume du gaz
$$\boxed{E_T = \frac{3}{2}(\Gamma - 1)U.}$$

Ensuite, avec

$$W = -3(\Gamma - 1)U \iff (\Gamma - 1)U = \frac{-W}{3}$$

on a

$$\boxed{E_T = \frac{3}{2}\frac{-W}{3} = -\frac{1}{2}W.}$$

---

Avec $P = K\rho^\Gamma$ on a

$$dP = K\Gamma\rho^{\Gamma-1}d\rho \iff d\rho = \frac{dP}{K\Gamma\rho^{\Gamma-1}}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dr}\left(\frac{P}{\rho}\right) &= \frac{1}{\rho}\frac{dP}{dr} - \frac{P}{\rho^2}\frac{d\rho}{dr} \\
&= \frac{1}{\rho}\frac{dP}{dr} - \frac{P}{\rho^2}\frac{1}{K\Gamma\rho^{\Gamma-1}}\frac{dP}{dr} \\
&= \frac{1}{\rho}\frac{dP}{dr}\left(1 - \frac{P}{\Gamma P}\right) \\
&= -\frac{Gm}{r^2}\frac{\Gamma-1}{\Gamma}
\end{aligned}$$

d'où

$$\boxed{d\left(\frac{P}{\rho}\right) = \frac{\Gamma-1}{\Gamma}Gm\, d(\frac{1}{r}).}$$

## Exercice 3.2

Avec

$$W = \int_0^R \frac{dP}{dr}4\pi r^3\, dr = -3\int_0^R 4\pi r^2 P\, dr$$

et

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi\rho r^2 \iff dm = 4\pi\rho r^2\, dr$$

et enfin

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{Gm\rho}{r^2}$$

on trouve, en intégrant par parties et avec $M(0) = 0$ et $P(R) = 0$

$$W = 3\int_0^R m\, d\left(\frac{P}{\rho}\right) = 3\frac{\Gamma-1}{\Gamma}G\int_0^R m^2\, d(\frac{1}{r})$$

En intégrant par parties, on obtient

$$W = 3\frac{\Gamma-1}{\Gamma}G\left[\frac{m^2}{r}\bigg|_0^R - 2\int_0^R \frac{m}{r}dm\right]$$

Ainsi

$$
\begin{aligned}
W &= 3\frac{\Gamma-1}{\Gamma}\frac{GM^2}{R} - 6\frac{\Gamma-1}{\Gamma}G\int_0^R \frac{m}{r}4\pi\rho r^2 dr \\
&= 3\frac{\Gamma-1}{\Gamma}\frac{GM^2}{R} - 6\frac{\Gamma-1}{\Gamma}G\int_0^R m\rho 4\pi r dr \\
&= 3\frac{\Gamma-1}{\Gamma}\frac{GM^2}{R} - 6\frac{\Gamma-1}{\Gamma}G\int_0^R \frac{dP}{dr}\frac{r^2}{-G}4\pi r dr \\
&= 3\frac{\Gamma-1}{\Gamma}\frac{GM^2}{R} + 6\frac{\Gamma-1}{\Gamma}\int_0^R \frac{dP}{dr}4\pi r^3 dr \\
&= 3\frac{\Gamma-1}{\Gamma}\frac{GM^2}{R} + 6\frac{\Gamma-1}{\Gamma}W
\end{aligned}
$$

On a alors

$$W\left(1-6\frac{\Gamma-1}{\Gamma}\right) = 3\frac{\Gamma-1}{\Gamma}\frac{GM^2}{R}$$

d'où

$$\boxed{W = -3\frac{\Gamma-1}{5\Gamma-6}\frac{GM^2}{R}.} \qquad (3.2.11)$$

Chapitre 4

# Cooling of White Dwarfs

# Chapitre 5

# General Relativity

## Exercice 5.1

## Exercice 5.2

## Exercice 5.3

## Exercice 5.4

## Exercice 5.5

Si la masse volumique est constante, on a

$$M = \frac{4\pi}{3} R^3 \rho \;\Leftrightarrow\; m = \frac{4\pi}{3} r^3 = \frac{M}{R^3} r^3$$

L'équation de la pression (Oppenheimer-Volkoff) s'écrit

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{\rho m}{r^2} \left(1 + \frac{P}{\rho}\right) \left(1 + \frac{4\pi P r^3}{m}\right) \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} \tag{5.7.6}$$

soit

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{P}{\rho}\right) = -\frac{M}{R^3} r \left(1 + \frac{P}{\rho}\right) \left(1 + 3\frac{P}{\rho}\right) \left(1 - \frac{2M}{R^3} r^2\right)^{-1}.$$

En posant $\kappa = \frac{P}{\rho}$, on obtient

$$\frac{d\kappa}{(1+\kappa)(1+3\kappa)} = -\frac{M}{R^3} \frac{r}{1 - \frac{2M}{R^3} r^2} dr$$

et avec $\frac{1}{(1+\kappa)(1+3\kappa)} = \frac{1}{2}(-\frac{1}{1+\kappa} + \frac{3}{1+3\kappa})$, on obtient, en intégrant de $r$ à $R$

$$-\ln\left(\frac{1+3\kappa}{1+\kappa}\right) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1 - \frac{2M}{R}}{1 - \frac{2M}{R^3} r^2}\right)$$

où l'on a utilisé $P(R) = 0$, soit $\kappa(R) = 0$. Ainsi

$$\frac{1+\kappa}{1+\kappa} = \sqrt{\frac{1 - \frac{2M}{R}}{1 - \frac{2M}{R^3} r^2}}$$

et en isolant $\kappa$

$$(1+\kappa)\sqrt{1-\frac{2M}{R^3}r^2} = (1+3\kappa)\sqrt{1-\frac{2M}{R}}.$$

on obtient

$$\boxed{\kappa = \frac{P}{\rho} = \frac{\sqrt{1-\frac{2Mr^2}{R^3}} - \sqrt{1-\frac{2M}{R}}}{3\sqrt{1-\frac{2M}{R}} - \sqrt{1-\frac{2Mr^2}{R^3}}}.} \qquad (5.7.11)$$

Enfin partant de l'équation

$$\frac{d\phi}{dr} = -\frac{d}{dr}\left(\frac{P}{\rho}\right)\left(1+\frac{P}{\rho}\right)^{-1} \qquad (5.7.7)$$

avec $\kappa = \frac{P}{\rho}$ on a

$$d\phi = -d\kappa(1+\kappa)^{-1}$$

d'où, avec $\kappa(R) = 0$

$$\phi(R) - \phi(r) = \ln(1+\kappa) \ \Leftrightarrow e^{-\phi} = e^{-\phi(R)}(1+\kappa).$$

En utilisant la relation

$$\phi(R) = \frac{1}{2}\ln\left(1-\frac{2M}{R}\right) \ \Leftrightarrow \ e^{\phi(R)} = \sqrt{1-\frac{2M}{R}} \quad (5.7.10)$$

Or

$$\begin{aligned} 1+\kappa &= 1 + \frac{\sqrt{1-\frac{2Mr^2}{R^3}} - \sqrt{1-\frac{2M}{R}}}{3\sqrt{1-\frac{2M}{R}} - \sqrt{1-\frac{2Mr^2}{R^3}}} \\ &= \frac{2\sqrt{1-\frac{2M}{R}}}{3\sqrt{1-\frac{2M}{R}} - \sqrt{1-\frac{2Mr^2}{R^3}}} \end{aligned}$$

ainsi

$$e^{-\phi(R)}(1+\kappa) = \frac{2}{3\sqrt{1-\frac{2M}{R}} - \sqrt{1-\frac{2Mr^2}{R^3}}}$$

de sorte que

$$\boxed{e^{\phi} = \frac{3}{2}\sqrt{1-\frac{2M}{R}} - \frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{2Mr^2}{R^3}}} \qquad (5.7.12)$$

Finalement, en posant

$$\left.\frac{P}{\rho}\right|_{r=0} < \infty \ \Leftrightarrow \ \frac{3\sqrt{1-\frac{2M}{R}} - 1}{1-\sqrt{1-\frac{2M}{R}}} > 0$$

on obtient

$$\begin{aligned} \frac{R}{2M}\left(3\sqrt{1-\frac{2M}{R}} - 1\right)\left(1+\sqrt{1-\frac{2M}{R}}\right) &> 0 \\ 2\sqrt{1-\frac{2M}{R}} &> 1 - 3\left(1-\frac{2M}{R}\right) \\ \sqrt{1-\frac{2M}{R}} &> \frac{3M}{R} - 1 \end{aligned}$$

En élevant au carré

$$1-\frac{2M}{R}>\frac{9M^2}{R^2}-\frac{6M}{R}+1$$

on trouve

$$\frac{4M}{R}>\frac{9M^2}{R^2}\;\Leftrightarrow\;\boxed{\frac{8}{9}>\frac{2M}{R}.}$$

---

Chapitre 6

# The Equilibrium and Stability of Fluid Configurations

Chapitre 7

# Rotation and Magnetic Fields

# Annexe A

# Rappels

## A.1 Statistique 1D

Dans une longueur $L$ les vecteurs d'état pour des états propres qui s'annulent aux extrémités sont

$$k_j = \frac{\pi}{L} j, \quad \forall j \in \mathbb{N}$$

et les impulsions

$$p_j = \hbar k_j = \frac{h}{2L} j = j \Delta p$$

avec $\Delta p = \frac{h}{2L}$.

De plus, $E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$ et dans le régime non relativiste

$$E = mc^2 + \frac{p^2}{2m} + \dots.$$

Ainsi $pc = \sqrt{E^2 - m^2c^4}$ et dans le régime non relativiste

$$p = \sqrt{2m(E - mc^2)}, \text{ avec } E \in [mc^2, +\infty[.$$

On a alors

$$dp = \sqrt{2m} \frac{dE}{2\sqrt{E - mc^2}}$$

La densité d'état entre $p$ et $p + dp$ est

$$dn(p) = \frac{dN}{L} = \frac{1}{L} \frac{dp}{\Delta p} = \frac{2}{h} dp$$

et en fonction de l'énergie

$$dn(E) = \frac{\sqrt{2m}}{h} \frac{dE}{\sqrt{E - mc^2}}$$

1. **Statistique de Fermi-Dirac** Si chaque état est dégénéré $g$ fois, et que le nombre total de particules est $N$ et la densité de particule $n = \frac{N}{L}$, alors, pour des fermions d'énergie de Fermi $E_F$ à $T = 0$ avec une distribution

$$f(E) = \begin{cases} 1 & \text{si } E < \mu - mc^2 \\ 0 & \text{si } E > \mu - mc^2 \end{cases}$$

et ave $\mu = E_F + mc^2$, pour $T = 0$, on trouve

$$n_F = g\frac{\sqrt{2m}}{h}\int_{mc^2}^{E_F}\frac{dE}{\sqrt{E-mc^2}}$$

soit

$$\boxed{n_F = 2g\frac{\sqrt{2m}}{h}\sqrt{E_F - mc^2}.}$$

La densité d'énergie pour des fermions à $T = 0$

$$\epsilon_F = \int_{mc^2}^{E_F} E\, dn(E) = \frac{2g}{h}\int_0^{p_F}(mc^2 + \frac{p^2}{2m})\, dp$$

soit

$$\boxed{\epsilon_F = \frac{2g}{3h}(E_F + 2mc^2)\sqrt{2m(E_F - mc^2)}.}$$

2. **Statistique de Boltzman** Pour une statistique de Boltzman, la distribution de Boltzman s'écrit

$$f(E) = e^{\beta(\mu - E)} = e^{\beta(\mu - mc^2 - \frac{p^2}{2m})}$$

on obtient, avec $\beta = \frac{1}{kT}$ et avec $K = \frac{p^2}{2m}$

$$n_B = g\frac{\sqrt{2m}}{h}\int_{mc^2}^{\infty}\frac{e^{\beta(\mu - mc^2 - K)}}{\sqrt{E - mc^2}}dE = g\frac{\sqrt{2m}}{h}e^{\beta(\mu - mc^2)}\int_0^{\infty}\frac{e^{-\beta K}}{\sqrt{K}}dK$$

en posant $t = \sqrt{K}$ on a

$$\int_0^{\infty}\frac{e^{-\beta K}}{\sqrt{K}}dK = \int_0^{\infty}\frac{e^{-\beta t^2}}{t}2t\, dt = 2\sqrt{\frac{\pi}{\beta}} = 2\sqrt{\pi kT}$$

Ainsi

$$\boxed{n_B = \frac{2g}{h}\sqrt{2\pi mkT}e^{\beta(\mu - mc^2)}.}$$

Enfin pour la densité d'énergie

$$\begin{aligned}\epsilon_B &= \int_{mc^2}^{\infty} E\, dn(E)\\ &= g\frac{\sqrt{2m}}{h}e^{\beta(\mu - mc^2)}\int_0^{\infty}(mc^2 + K)\frac{e^{-\beta K}}{\sqrt{K}}dK\\ &= g\frac{\sqrt{2m}}{2h}e^{\beta(\mu - mc^2)}\sqrt{\pi kT}(4mc^2 + kT)\end{aligned}$$

soit

$$\boxed{\epsilon_B = g\frac{\sqrt{2\pi mkT}}{2h}(4mc^2 + kT)e^{\beta(\mu - mc^2)}}$$

et

$$\frac{\epsilon_B}{n_B} = \frac{1}{4}(4mc^2 + kT) = mc^2 + \frac{1}{4}kT$$

## A.2 Statistique 2D

Avec $p_2 = \hbar k_2 = \hbar \frac{\pi}{L}(n_x, n_y)$, pour $\{n_x, n_y\} \subset \mathbb{N}$ on a

$$p^2 = \hbar^2 k^2 = \frac{h^2}{4L}(n_x^2 + n_y^2) = \frac{h^2}{4L} n^2.$$

Le nombre d'état correspondant à une valeur entre $n$ et $n + dn$ est

$$dN = \frac{1}{4} 2\pi n \, dn = \frac{1}{4} 2\pi \frac{2L}{h} p \frac{2L}{h} \, dp = \pi \frac{2A}{h^2} p \, dp$$

soit une densité d'état

$$dn(p) = \frac{2\pi}{h^2} p \, dp$$

En prenant en compte la dégénérescence $g$ des états et le taux d'occupation $f(p)$

$$dn(p) = g \frac{2\pi}{h^2} p f(p) \, dp$$

et

$$dn(E) = g \frac{4\pi m}{h^2} f(E) \, dE$$

## A.3 Statistique 3D

Avec $p = \hbar k$ et $k = \frac{\pi}{L}(n_x, n_y, n_z)$ on a

$$p^2 = \frac{h^2}{4L^2} n^2$$

et le nombre d'état entre $n$ et $n + dn$

$$dN = \frac{1}{8} 4\pi n^2 dn = \frac{1}{8} 4\pi \frac{8L^3}{h^3} p^2 dp$$

d'où une densité d'état

$$dn(p) = \frac{4\pi}{h^3} p^2 dp$$

En prenant en compte la dégénérescence des niveaux et le taux d'occupation, on a

$$dn(p) = \frac{4\pi}{h^3} g f(p) p^2 dp$$

et

$$dn(E) = g \frac{2\pi}{h^3} (2m)^{\frac{3}{2}} \sqrt{E - mc^2} f(E) dE$$

1. **Statistique de Fermi-Dirac.** La densité de particules $T = 0$ devient

$$n_F = g \frac{4\pi}{h^3} m \int_0^{p_F} p^2 dp$$

soit

$$\boxed{n_F = g \frac{4\pi}{3h^3} p_F^3 = g \frac{4\pi}{3h^3} \left(2m(E_F - mc^2)\right)^{\frac{3}{2}}}$$

et la densité d'énergie

$$\epsilon_F = g\frac{2\pi}{h^3}(2m)^{\frac{3}{2}}\int_{mc^2}^{E_F} E\sqrt{E-mc^2}dE$$

d'où

$$\epsilon_F = g\frac{2\pi}{h^3}(2m)^{\frac{3}{2}}\frac{2}{15}(E_F-mc^2)^{\frac{3}{2}}(3E_F+2mc^2)$$

soit

$$\epsilon_F = g\frac{4\pi}{15h^3}(2m)^{\frac{3}{2}}(E_F-mc^2)^{\frac{3}{2}}(3E_F+2mc^2)$$

et

$$\boxed{\frac{\epsilon_F}{n_F} = \frac{2}{5}mc^2 + \frac{3}{5}E_F.}$$

2. **Statistique de Boltzman.** On obtient la densité de particules

$$n_B = g\frac{2\pi}{h^3}(2m)^{\frac{3}{2}}\int_0^\infty \sqrt{K}e^{\beta(\mu-mc^2-K)}dK$$

soit

$$n_B = g\frac{2\pi}{h^3}(2m)^{\frac{3}{2}}e^{\beta(\mu-mc^2)}\frac{1}{2}kT\sqrt{\pi kT}$$

$$\boxed{n_B = g\left(\frac{mkT}{2\pi\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}}e^{\beta(\mu-mc^2)}}$$

et la densité d'énergie

$$\epsilon_B = g\frac{2\pi}{h^3}(2m)^{\frac{3}{2}}\int_0^\infty (mc^2+K)\sqrt{K}e^{\beta(\mu-mc^2-K)}dK$$

et par intégrations par parties on obtient

$$\epsilon_B = g\frac{2\pi}{h^3}(2m)^{\frac{3}{2}}\frac{1}{2}kT\sqrt{\pi kT}(mc^2+\frac{3}{2}kT)e^{\beta(\mu-mc^2)}$$

soit

$$\boxed{\epsilon_B = g\left(\frac{mkT}{2\pi\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}}(mc^2+\frac{3}{2}kT)e^{\beta(\mu-mc^2)}}$$

d'où

$$\boxed{\frac{\epsilon_B}{n_B} = mc^2 + \frac{3}{2}kT.}$$

Calculons encore la pression

$$P = \frac{g}{3}\frac{4\pi}{mh^3}e^{\beta(\mu-mc^2)}\int_0^\infty p^4 e^{-\beta\frac{p^2}{2m}}dp$$

d'où

$$P = g\frac{4\pi}{3mh^3}e^{\beta(\mu-mc^2)}\frac{3}{8}4m^2k^2T^2\sqrt{2\pi mkT}$$
$$= g\left(\frac{mkT}{2\pi\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}}kTe^{\beta(\mu-mc^2)}$$

soit

$$\boxed{P = nkT.}$$

3. **Cas relativiste** Dans ce cas, on a

$$E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$$

de sorte que

$$pc = \sqrt{E^2 - m^2c^4} = mc^2\sqrt{x^2 - 1}$$

et

$$dp = \frac{E\,dE}{\sqrt{E^2 - m^2c^4}} = mc^2\frac{x\,dx}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

avec $x = \frac{E}{mc^2}$. On trouve alors

$$dn(x) = g\frac{4\pi}{c^2h^3}(mc^2)^3\sqrt{x^2 - 1}x\,dx$$