

# Gravitation newtonienne

Guglielmo Pasa

Le 18 février 2013  
rév.: 10 décembre 2015

## Table des matières

<b>1</b>	<b>La théorie newtonienne de la gravitation</b>	<b>3</b>
1.1	Cas de deux masses ponctuelles . . . . .	3
1.2	Cas de plusieurs masses ponctuelles . . . . .	3
1.3	Cas d'un corps continu et d'une masse ponctuelle . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Cas particuliers</b>	<b>5</b>
2.1	Anneau sur un point de son axe $C_\infty$ . . . . .	5
2.2	Disque sur un point de son axe $C_\infty$ . . . . .	6
2.3	Plan infini . . . . .	6
2.4	Sphère . . . . .	7
2.5	Boule . . . . .	9
2.6	Barre sur un point de son axe $C_2$ . . . . .	10
2.7	Barre infinie . . . . .	12
<b>3</b>	<b>Problème à deux corps</b>	<b>13</b>
3.1	Coordonnées relatives . . . . .	13
<b>4</b>	<b>Formule de Binet</b>	<b>15</b>
4.1	Coordonnées polaires . . . . .	15
4.2	Nouvelle variable radiale . . . . .	15
4.3	Constante du mouvement . . . . .	16
4.4	Équation de la trajectoire . . . . .	16
<b>5</b>	<b>Gravitation</b>	<b>18</b>
5.1	Trajectoire conique . . . . .	18
5.2	Première loi de Képler . . . . .	22
<b>6</b>	<b>Troisième loi de Képler</b>	<b>22</b>

<b>7</b>	<b>Problème à trois corps</b>	<b>24</b>
7.1	Problème simplifié . . . . .	24
7.2	Référentiel tournant . . . . .	25
7.3	Les points de Lagrange . . . . .	26

# 1 La théorie newtonienne de la gravitation

## 1.1 Cas de deux masses ponctuelles

Soit deux masses ponctuelles de masse  $m_1$ , située en un point  $r_1$ , et  $m_2$ , en  $r_2$ , séparés par une distance  $d = |r_2 - r_1|$ .

La masse  $m_2$  est responsable d'une force sur le corps de masse  $m_1$  données par

$$F = G \frac{m_1 m_2}{d^2}$$

dirigée de  $m_1$  vers  $m_2$ .

Si  $\vec{r}_{12} = r_2 - r_1$  est le vecteur position relative de  $m_2$  par rapport à  $m_1$  on a

$$\vec{F} = G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}}$$

soit

$$\vec{F} = G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^3} \vec{r}_{12}.$$

## 1.2 Cas de plusieurs masses ponctuelles

Soit des masses ponctuelles de masse  $m_1, \dots, m_N$  situées en  $r_1, \dots, r_N$  respectivement. Les masses  $m_2, \dots, m_N$  exercent une force

$$\vec{F} = \sum_{i=2}^N G \frac{m_1 m_i}{r_{i1}^3} \vec{r}_{i1}$$

où  $\vec{r}_{i1} = r_i - r_1$  et  $r_{i1} = |\vec{r}_{i1}|$ . On peut encore écrire

$$\vec{F} = m_1 G \sum_{i=2}^N \frac{m_i}{r_{i1}^3} \vec{r}_{i1} = m_1 \vec{g}$$

où

$$\vec{g} = G \sum_{i=2}^N \frac{m_i}{r_{i1}^3} \vec{r}_{i1}$$

est l'accélération de la pesanteur exercée par les masses  $m_2, \dots, m_N$ .

## 1.3 Cas d'un corps continu et d'une masse ponctuelle

Pour une distribution de masse  $\rho(\vec{r})$ , on peut généraliser la somme par une intégrale

$$\vec{g}(\vec{r}) = G \int_V \frac{dm(\vec{r}')}{r'^3} \vec{r}'$$

où  $V$  est le volume dans lequel se trouve la distribution de masse,  $dm(\vec{r}')$  est la masse d'un élément de volume  $d^3r'$  situé autour du point  $\vec{r}'$ , à savoir

$$dm(\vec{r}') = \rho(\vec{r}')d^3r'.$$

On obtient alors

$$\vec{g}(\vec{r}) = \int_V \rho(\vec{r}') \frac{\vec{r}'}{r'^3} d^3r'$$

## 2 Cas particuliers

### 2.1 Anneau sur un point de son axe $C_\infty$

Soit une masse ponctuelle située à l'origine d'un repère ortho-normé et soit une distribution de masse continue disposée sous la forme d'un cercle de rayon  $R$ , dans un plan orthogonal à l'axe  $Ox$  et de centre  $C(d, 0, 0)$ .

On se propose de calculer  $\vec{g}$  que subit la masse ponctuelle à l'origine.

Commençons par paramétrer le cercle par

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} d \\ R \cos(\theta) \\ R \sin(\theta) \end{pmatrix}, \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

Un élément de cercle est alors donné par

$$d\vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ -R \sin(\theta) \\ R \cos(\theta) \end{pmatrix} d\theta$$

qui est de norme

$$dr = R d\theta.$$

La masse d'un élément de cercle est alors

$$dm = \rho R d\theta \quad \text{avec } \rho = \frac{M}{2\pi R}$$

et où  $M$  est la masse du cercle.

Pour des raisons de symétrie,  $\vec{g}$  est dirigé selon  $Ox$ , aussi il suffit de calculer les composantes selon  $Ox$  des accélérations  $d\vec{g}$  de chaque élément de cercle

$$dg_x = G \frac{dm}{r^2} \frac{d}{r} = G \rho R d \frac{d\theta}{r^3}$$

où  $r = |\vec{r}|$  et le dernier quotient n'est autre que le rapport de projection sur  $Ox$ .

Ainsi

$$\begin{aligned} g &= G \rho R d \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{r^3} \\ &= G \rho R d \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(R^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= G \rho R d \frac{2\pi}{(R^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

Finalement, on peut écrire le résultat à l'aide de la masse totale du cercle

$$g(d) = \frac{GMd}{(d^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Remarquons que si  $d = 0$ , alors  $g = 0$ . Mais est-ce un point d'équilibre stable ?

## 2.2 Disque sur un point de son axe $C_\infty$

Pour le cas du disque, on reprend le résultat de l'anneau.

Soit un disque de rayon  $R$  contenu dans un plan orthogonal à l'axe  $Ox$  et centré en  $C(d, 0, 0)$ . On décompose le disque en anneaux concentriques de rayon  $x$ , avec  $0 \leq x \leq R$ .

La masse d'un anneau de rayon  $x$  et de largeur  $dx$  est

$$dm(x) = \rho(2\pi x)dx, \quad \text{où } \rho = \frac{M}{\pi R^2}.$$

L'accélération de la pesanteur générée par cet anneau est

$$dg(x) = \frac{Gd dm(x)}{(d^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} = 2\pi\rho Gd \frac{x dx}{(d^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} g(d) &= 2\pi\rho Gd \int_0^R \frac{x dx}{(d^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= 2\pi\rho Gd \left[ -\frac{1}{(d^2 + x^2)^{\frac{1}{2}}} \right]_0^R \\ &= 2\pi\rho Gd \left[ \frac{1}{d} - \frac{1}{(d^2 + R^2)^{\frac{1}{2}}} \right] \end{aligned}$$

En écrivant ce résultat avec la masse du disque  $M = \rho\pi R^2$ , on obtient

$$g(d) = GM \left[ \frac{2d}{R^2} \left( \frac{1}{d} - \frac{1}{(d^2 + R^2)^{\frac{1}{2}}} \right) \right].$$

Notons que dans le cas où  $d \rightarrow 0$  on obtient le cas limite

$$g(0) = \frac{2GM}{R^2}.$$

Clairement, il s'agit du cas où le disque est très près de  $O$  et non du cas où  $O$  est confondu avec le centre du disque, car alors on aurait  $g = 0$  pour des raisons de symétrie.

## 2.3 Plan infini

Le cas du plan infini s'obtient du cas du disque en prenant la limite  $R \rightarrow \infty$ . Le deuxième quotient tend alors vers zéro et on obtient

$$g^\infty(d) = \frac{2GM}{R^2}.$$

Notons que la valeur de  $g$  est indépendante de la distance à laquelle se trouve le plan.

## 2.4 Sphère

Soit une sphère de rayon  $R$  de centre  $C(d, 0, 0)$ . Un point  $P$  de la sphère dans le plan  $Oxz$  est défini par

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} d + R \cos(\theta) \\ 0 \\ R \sin(\theta) \end{pmatrix} \quad \text{avec } \theta \in [0, \pi]$$

pour un point de côte  $z \geq 0$ .

Considérons une tranche de la sphère comprise entre deux plans  $x = a$  et  $x = a + dx$  dans laquelle se trouve le point  $P$ . L'arc de cercle défini par les deux plans et la sphère et le plan  $Oxz$  correspond à une variation d'angle  $d\theta$  au centre du cercle avec

$$d\vec{R} = R \begin{pmatrix} -\sin(\theta) \\ 0 \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

d'où la longueur de l'arc

$$dR = R d\theta.$$

Avec la masse totale  $M$  de la sphère, la masse surfacique est

$$\rho = \frac{M}{4\pi R^2}$$

et la masse d'une tranche de sphère vaut

$$dm(\theta) = \rho(2\pi h dR)$$

où  $h$  est la côte du point  $P$

$$dm(\theta) = 2\pi\rho R \sin(\theta) dR.$$

L'accélération de la pesanteur en  $O$  exercée par cette tranche est

$$\begin{aligned} dg(\theta) &= G \frac{dm(\theta)}{r^2} \frac{d + R \cos(\theta)}{r} \\ &= 2\pi G \rho R \frac{\sin(\theta)(d + R \cos(\theta))}{r^3} R d\theta. \end{aligned}$$

où la deuxième fraction est le facteur de Thalès pour la projection sur l'axe  $Ox$ . Les composantes verticale et latérale sont nulles pour des raisons de symétrie.

Ainsi on obtient l'accélération totale

$$\begin{aligned}
g &= \int_0^\pi dg(\theta) \\
&= 2\pi G\rho R^2 \int_0^\pi \frac{\sin(\theta)(d + R \cos(\theta))}{((d + R \cos(\theta))^2 + R^2 \sin^2(\theta))^{\frac{3}{2}}} d\theta \\
&= 2\pi G\rho R^2 \int_0^\pi \frac{d + R \cos(\theta)}{(d^2 + R^2 + 2dR \cos(\theta))^{\frac{3}{2}}} d(-\cos(\theta)) \\
&= 2\pi G\rho R^2 \int_{-1}^1 \frac{d - Rz}{(d^2 + R^2 - 2dRz)^{\frac{3}{2}}} dz
\end{aligned}$$

En posant  $y = d - Rz$  et  $dy = -R dz$ , on calcule

$$d^2 + R^2 - 2dRz = d^2 + R^2 - 2d(d - y) = R^2 - d^2 + 2dy$$

et on obtient

$$\begin{aligned}
g &= 2\pi G\rho R \int_{d-R}^{d+R} \frac{y}{(R^2 - d^2 + 2dy)^{\frac{3}{2}}} dy \\
&= \pi G\rho \frac{R}{2d^2} \int_{2d(d-R)}^{2d(d+R)} \frac{x}{(R^2 - d^2 + x)^{\frac{3}{2}}} dx
\end{aligned}$$

avec  $x = 2dy$ . Une intégration par parties en posant

$$\begin{cases} u &= x \\ dv &= (R^2 - d^2 + x)^{-\frac{3}{2}} dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du &= dx \\ v &= -2(R^2 - d^2 + x)^{-\frac{1}{2}} \end{cases}$$

permet d'obtenir

$$\begin{aligned}
g &= \pi G\rho \frac{R}{2d^2} \left( \left[ -2x(R^2 - d^2 + x)^{-\frac{1}{2}} \right]_{2d(d-R)}^{2d(d+R)} + 2 \int_{2d(d-R)}^{2d(d+R)} (R^2 - d^2 + x)^{-\frac{1}{2}} dx \right) \\
&= \pi G\rho \frac{R}{d^2} \left[ -x(R^2 - d^2 + x)^{-\frac{1}{2}} + 2(R^2 - d^2 + x)^{\frac{1}{2}} \right]_{2d(d-R)}^{2d(d+R)} \\
&= \pi G\rho \frac{R}{d^2} \left[ -2d(d+R)(R^2 + d^2 + 2dR)^{-\frac{1}{2}} + 2d(d-R)(R^2 + d^2 - 2dR)^{-\frac{1}{2}} \right. \\
&\quad \left. + 2(R^2 + d^2 + 2dR)^{\frac{1}{2}} - 2(R^2 + d^2 - 2dR)^{\frac{1}{2}} \right] \\
&= \pi G\rho \frac{R}{d^2} \left[ -2d \frac{(d+R)}{|d+R|} + 2d \frac{(d-R)}{|d-R|} + 2|d+R| - 2|d-R| \right] \\
&= 2\pi G\rho \frac{R}{d^2} \left[ -d + d \frac{(d-R)}{|d-R|} + d + R - |d-R| \right].
\end{aligned}$$

À ce stade, il convient de distinguer deux cas



1<sup>er</sup> cas :  $d > R$  Dans ce cas, on a

$$|d - R| = d - R$$

et on obtient

$$g = 2\pi G\rho \frac{R}{d^2} [-d + d + d + R - (d - R)] = 4\pi G\rho \frac{R^2}{d^2}$$

et en fonction de la masse de la sphère

$$g = \frac{GM}{d^2}.$$

2<sup>e</sup> cas :  $d < R$  Dans ce cas, on a

$$|d - R| = R - d$$

et on obtient

$$g = 2\pi G\rho \frac{R}{d^2} [-d - d + d + R - (R - d)],$$

soit

$$g = 0.$$

Ces deux cas correspondent au théorème de Newton

### Théorème 2.1

L'accélération de la pesanteur exercée par une coquille sphérique de masse  $M$  est nulle sur un point situé à l'intérieur de la coquille et est égale à celle d'une masse ponctuelle  $M$  située au centre de la sphère, pour un point à l'extérieur de la sphère situé à une distance  $d$

$$g = \begin{cases} \frac{GM}{d^2} & \text{à une distance } d > R \text{ du centre de la sphère} \\ 0 & \text{à l'intérieur de la sphère.} \end{cases}$$

## 2.5 Boule

Soit une boule (sphère pleine) de rayon  $R$  de centre  $C(d, 0, 0)$ . Pour calculer l'accélération de la pesanteur exercée par la boule en  $O$ , l'origine, on décompose la boule en couches sphériques concentriques de rayon  $r$  et d'épaisseur  $dr$ .

La masse volumique de la boule est

$$\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

où  $M$  est la masse de la sphère.

Une couche sphérique a une masse

$$dm(r) = \rho 4\pi r^2 dr \quad \text{où } 0 \leq r \leq R.$$

Par le théorème de Newton, cette couche exerce en  $O$  une accélération

$$dg(r) = \frac{G dm(r)}{d^2} = \frac{4\pi\rho G}{d^2} r^2 dr$$

si  $d > r$  et

$$dg(r) = 0$$

si  $d < R$ .

Ainsi, on voit que seules les couches avec un rayon inférieur à  $d$  contribuent à  $g$ .

Soit  $\gamma = \min(d, R)$ . L'accélération en  $O$  est alors

$$\begin{aligned} g &= \int_0^\gamma dg(r) \\ &= \frac{4\pi\rho G}{d^2} \int_0^\gamma r^2 dr \\ &= \frac{4\pi\rho G}{d^2} \frac{1}{3} \gamma^3 \end{aligned}$$

En posant  $m = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi\gamma^3$  la masse de la boule de rayon inférieure à  $d$  (soit toute la boule, si  $R < d$  ou la partie intérieure de la boule jusqu'à  $O$ , si  $d < R$ ), on obtient

$$\boxed{g = \frac{Gm}{d^2}.}$$

## 2.6 Barre sur un point de son axe $C_2$

Pour terminer, voici un cas académique d'une barre orthogonale à  $Ox$ , disposée avec son milieu  $C$  sur  $Ox$ , à une distance  $d$  de  $O$ . L'origine  $O$  est alors sur la médiatrice de la barre. Soit  $L$  la longueur totale de la barre. Sa masse linéique est alors

$$\rho = \frac{M}{L}$$

où  $M$  est la masse de la barre.

Soit  $0 \leq x \leq \frac{L}{2}$  et soit les deux éléments de barres de longueur  $dx$  situés à la distance  $x$  du centre  $C$ . La masse de ces deux éléments est

$$dm(x) = 2\rho dx.$$

La distance commune de ces points à l'origine  $O$  est

$$r = \sqrt{d^2 + x^2}.$$

Ainsi, l'accélération de la pesanteur due à ces deux éléments de longueur est

$$dg(x) = \frac{Gdm(x)}{r^2} \frac{d}{r} = 2Gd\rho \frac{dx}{(d^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

L'accélération de la pesanteur en  $O$  due à la barre est alors

$$g = 2Gd\rho \int_0^{\frac{L}{2}} \frac{dx}{(d^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

En posant

$$x = d\operatorname{sh}(t) \Leftrightarrow dx = d\operatorname{ch}(t) dt$$

on obtient, avec  $t_0 = \ln\left(\frac{L}{2d} + \sqrt{\frac{L^2}{4d^2} + 1}\right)$

$$\begin{aligned} g &= 2Gd\rho \int_0^{t_0} \frac{d\operatorname{ch}(t)}{(d^2 + d^2\operatorname{sh}^2(t))^{\frac{3}{2}}} dt \\ &= 2Gd\rho \int_0^{t_0} \frac{d\operatorname{ch}(t)}{d^3\operatorname{ch}^3(t)} dt \\ &= 2\frac{G\rho}{d} \int_0^{t_0} \frac{dt}{\operatorname{ch}^2(t)} \end{aligned}$$

Or

$$\operatorname{ch}^2(t) = \frac{e^{2t} + e^{-2t} + 2}{4} = \frac{(e^{2t} + 1)^2}{e^{2t}}.$$

et en posant

$$u = e^{2t} \Leftrightarrow du = 2u dt,$$

on obtient, avec  $u_0 = \frac{(L + \sqrt{L^2 + 4d^2})^2}{4d^2}$

$$\begin{aligned} g &= 2\frac{G\rho}{d} \int_1^{u_0} \frac{u du}{2u(u+1)^2} \\ &= \frac{G\rho}{d} \int_1^{u_0} \frac{du}{(u+1)^2} \\ &= \frac{G\rho}{d} \left[ -\frac{1}{u+1} \right]_1^{u_0} \\ &= \frac{G\rho}{d} \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{u_0+1} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{G\rho}{d} \frac{u_0 + 1 - 2}{2(u_0 + 1)} \\
&= \frac{G\rho}{2d} \frac{u_0 - 1}{u_0 + 1} \\
&= \frac{G\rho}{2d} \frac{(L + \sqrt{L^2 + 4d^2})^2 - 4d^2}{(L + \sqrt{L^2 + 4d^2})^2 + 4d^2} \\
&= \frac{G\rho}{2d} \frac{(L^2 + 2L\sqrt{L^2 + 4d^2} + L^2 + 4d^2) - 4d^2}{(L^2 + 2L\sqrt{L^2 + 4d^2} + L^2 + 4d^2) + 4d^2} \\
&= \frac{G\rho}{2d} \frac{2L^2 + 2L\sqrt{L^2 + 4d^2}}{2L^2 + 2L\sqrt{L^2 + 4d^2} + 8d^2} \\
&= \frac{GL\rho}{2d} \frac{L + \sqrt{L^2 + 4d^2}}{L^2 + 4d^2 + L\sqrt{L^2 + 4d^2}} \\
&= \frac{GL\rho}{2d} \frac{L + \sqrt{L^2 + 4d^2}}{(\sqrt{L^2 + 4d^2} + L)\sqrt{L^2 + 4d^2}}
\end{aligned}$$

soit

$$g = \frac{GL\rho}{2d\sqrt{L^2 + 4d^2}} = \frac{GM}{2d\sqrt{L^2 + 4d^2}}.$$

## 2.7 Barre infinie

Le cas de la barre infinie s'obtient du cas précédent en prenant  $L \rightarrow \infty$ , et on obtient

$$g^\infty(d) = \frac{G\rho}{2d}.$$

### 3 Problème à deux corps

Dans le problème à deux corps est défini par l'interaction de deux corps massifs de masse  $m_1$  et  $m_2$  respectivement et de vecteur position  $\vec{r}_1$  et  $\vec{r}_2$  respectivement. La force  $\vec{F}_{21}$  exercée par le corps 2 sur le corps 1 est donnée par la loi de la gravitation universelle de Newton

$$\vec{F}_{21} = Gm_1m_2 \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{\|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\|^3} = -\vec{F}_{12}$$

La deuxième loi de Newton pour les corps 1 et 2 s'écrit ainsi

$$m_1\vec{a}_1 = \vec{F}_{21} \quad \text{et} \quad m_2\vec{a}_2 = \vec{F}_{12}$$

#### 3.1 Coordonnées relatives

Le centre de masse du système binaire est donné par le vecteur position

$$M\vec{R} = m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2$$

En utilisant les équations du mouvement ci-dessus et en dérivant deux fois par rapport au temps la position du centre de masse, on trouve, avec  $M = m_1 + m_2$  la masse totale du système,

$$M\ddot{\vec{R}} = \vec{0}.$$

Ainsi

$$\vec{R} = \vec{V}_0 t + \vec{R}_0$$

Ce qui montre que le centre du système suit un MRU.

Sans diminuer la généralité de l'exposé, on peut choisir un référentiel lié au centre de masse, de sorte que

$$\vec{R} = \vec{0}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

On a alors

$$\boxed{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 = \vec{0}.} \quad (1)$$

La *position relative* de la masse 2 par rapport à la masse 1 (qui pointe de 1 vers 2) est le vecteur

$$\boxed{\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1.} \quad (2)$$

On peut exprimer  $\vec{r}_1$  et  $\vec{r}_2$  à partir des équations (1) et (2) pour obtenir

$$\boxed{\vec{r}_1 = -\frac{1}{1+\nu}\vec{r} \quad \text{et} \quad \vec{r}_2 = \frac{\nu}{1+\nu}\vec{r},} \quad (3)$$

où  $\nu = \frac{m_1}{m_2}$ .

Enfin l'équation du mouvement relatif s'obtient en calculant

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}_2 - \ddot{\vec{r}}_1 = \frac{1}{m_2}\vec{F} + \frac{1}{m_1}\vec{F}$$

avec

$$\vec{F} = -Gm_1m_2 \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{\|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\|^3} = -Gm_1m_2 \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|^3}.$$

On obtient

$$\ddot{\vec{r}} = -Gm_1m_2 \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|^3}$$

soit

$$\ddot{\vec{r}} = -G(m_1 + m_2) \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|^3} = -GM \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|^3}$$

En définissant la *masse réduite*  $\mu = \frac{m_1m_2}{M}$

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}.$$

Il est aisé de vérifier que la masse réduite  $\mu$  est plus petite que la plus petite des masses entre  $m_1$  et  $m_2$ .

On trouve

$$\boxed{\mu \ddot{\vec{r}} = -GM \mu \frac{\vec{r}}{r^3}.} \quad (4)$$

On constate que la force est égale à  $\vec{F}$ , car  $m_1m_2 = M\mu$ .

L'équation (4) décrit le mouvement d'une masse  $\mu$  autour d'une masse  $M$  fixe. On a ainsi réduit le mouvement relatif de deux corps massifs autour de leur centre de masse commun au mouvement d'une masse réduite  $\mu$  autour d'une masse fixe  $M$ . Autrement dit, le problème à deux corps se réduit au problème à un corps dans le système de coordonnées relative lié au centre de masse du système.

## 4 Formule de Binet

### 4.1 Coordonnées polaires

En coordonnées polaires, les coordonnées d'un point matériel de masse  $m$  sont définies par le couple  $(r, \theta)$  et permettent de repérer ce point par le vecteur

$$\vec{r} = r e_r$$

où

$$e_r = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad e_\theta = \begin{pmatrix} -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

avec  $\theta = \theta(t)$  et  $r = r(t)$  des fonctions 2 fois dérivables du temps  $t$ . On a également

$$\dot{e}_r = \dot{\theta} \begin{pmatrix} -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix} = \dot{\theta} e_\theta \quad \text{et} \quad \dot{e}_\theta = -\dot{\theta} \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix} = -\dot{\theta} e_r$$

où  $\dot{x} = \frac{d}{dt}x$  représente la dérivée temporelle.

On trouve alors, par dérivation

$$\vec{v} = \dot{r} e_r + r \dot{\theta} e_\theta$$

et

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) e_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) e_\theta.$$

### 4.2 Nouvelle variable radiale

En posant  $u(t) = \frac{1}{r(t)}$  on a

$$\vec{r} = \frac{1}{u} e_r.$$

Et en appliquant la règle des dérivées composées et en notant  $u' = \frac{d}{d\theta}u$  on obtient

$$\vec{v} = -\frac{1}{u^2} u' \dot{\theta} e_r + \frac{1}{u} \dot{\theta} e_\theta.$$

car  $\dot{u} = u' \dot{\theta}$ .

Enfin, on trouve

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \left( 2 \frac{u'^2}{u^3} \dot{\theta}^2 - \frac{1}{u^2} u'' \dot{\theta}^2 - \frac{1}{u^2} u' \ddot{\theta} \right) e_r - \frac{1}{u^2} u' \dot{\theta}^2 e_\theta \\ &\quad + \left( -\frac{1}{u^2} u' \dot{\theta}^2 + \frac{1}{u} \ddot{\theta} \right) e_\theta - \frac{1}{u} \dot{\theta}^2 e_r \\ &= a_r e_r + a_\theta e_\theta \end{aligned}$$

avec

$$a_r = 2 \frac{u'^2}{u^3} \dot{\theta}^2 - \frac{1}{u^2} u'' \dot{\theta}^2 - \frac{1}{u^2} u' \ddot{\theta} - \frac{1}{u} \dot{\theta}^2$$

et

$$a_\theta = -2 \frac{1}{u^2} u' \dot{\theta}^2 + \frac{1}{u} \ddot{\theta} = u \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{u^2} \dot{\theta} \right).$$

### 4.3 Constante du mouvement

Si le point matériel subit une force centrale dirigée dans la direction de  $\vec{r}$

$$\vec{F} = F e_r,$$

alors

$$a_\theta = 0$$

et

$$\frac{\ell}{m} = \frac{1}{u^2} \dot{\theta}$$

est une constante du mouvement ( $\ell = m r^2 \dot{\theta}$  est le moment cinétique du point matériel, avec  $[\ell] = \text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$ ).

En définissant la vitesse aréolaire, comme la surface couverte par le rayon  $\vec{r}$  par unité de temps

$$\dot{A}(t) = \frac{1}{2} \vec{r} \times \vec{v} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} (e_r \times e_\theta)$$

on voit que

$$\dot{A}(t) = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} = \frac{\ell}{2m} = \text{cste.}$$

Le cas gravitationnel correspond au cas des planètes autour du Soleil. La gravitation générée par une masse  $M$  sur la masse  $m$  qui nous intéresse est une force centrale dirigée de  $m$  vers  $M$ .

On obtient ainsi la *deuxième loi de Képler*, pour le cas particulier des planètes autour du Soleil :

*La vitesse aréolaire des planète autour du Soleil est constante.*

ou encore

*Le rayon vecteur Soleil–Planète balaie des aires égales en des temps égaux.*

On constate ainsi que cette *loi des aires* est valable pour toute force centrale.

### 4.4 Équation de la trajectoire

On a alors

$$\dot{\theta} = \frac{\ell u^2}{m}$$

et

$$\ddot{\theta} = 2u u' \dot{\theta} \frac{\ell}{m} = 2u u' \frac{\ell^2 u^2}{m^2} = 2 \frac{\ell^2 u^3 u'}{m^2}.$$



On obtient alors

$$\begin{aligned} a_r &= \left( 2\frac{u'^2}{u^3} - \frac{1}{u^2}u'' - \frac{1}{u} \right) \dot{\theta}^2 - \frac{1}{u^2}u'\ddot{\theta} \\ &= \left( 2\frac{u'^2}{u^3} - \frac{1}{u^2}u'' - \frac{1}{u} \right) \frac{\ell^2 u^4}{m^2} - 2\frac{1}{u^2}u' \frac{\ell^2 u^3 u'}{m^2} \\ &= \frac{\ell^2}{m^2} (2uu'^2 - u^2u'' - u^3 - 2uu'^2) \\ &= \frac{\ell^2}{m^2} (u'' + u) u^2 \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient finalement

$$F(u) = m \frac{\ell^2}{m^2} (u'' + u) u^2,$$

soit

$$\boxed{F(u) = \frac{\ell^2}{m} (u'' + u) u^2.}$$

## 5 Gravitation

Selon la loi de la gravitation, on a

$$F(r) = -\frac{GMm}{r^2}e_r$$

que l'on peut écrire

$$F(u) = -GMmu^2e_r.$$

Ainsi, l'équation de la trajectoire est

$$-\frac{\ell^2}{m}(u'' + u)u^2 = -GMmu^2$$

ce qui donne l'équation de la trajectoire en coordonnées polaires modifiées  $u = \frac{1}{r}$

$$u'' + u = \frac{GMm^2}{\ell^2}$$

que l'on peut écrire, avec  $\gamma = \frac{GMm^2}{\ell^2}$  (remarquons que  $\gamma$  est l'inverse d'une distance  $[\gamma] = m^{-1}$ )

$$u'' + u = \gamma.$$

Soit

$$u'' = \gamma - u$$

- Si  $\gamma = 0$  Dans ce cas la solution générale est

$$u = A \cos(\theta + B).$$

- Si  $\gamma \neq 0$  La dérivée seconde est invariante sous l'addition d'un terme linéaire

$$u = a\theta + b + A \cos(\theta + B)$$

et en remplaçant dans l'équation de la trajectoire, on obtient  $a = 0$  et  $b = \gamma$  Ainsi, la solution générale est

$$u = \gamma + A \cos(\theta + B)$$

d'où

$$r = \frac{1}{\gamma + A \cos(\theta + B)}.$$

### 5.1 Trajectoire conique

En supposant que le dénominateur ne s'annule pas, on voit que

$$r_{\min} = \frac{1}{\gamma + A} \quad \text{et} \quad r_{\max} = \frac{1}{\gamma - A}$$

Posons

$$2\alpha = r_{\min} + r_{\max} = \frac{2\gamma}{\gamma^2 - A^2}$$

soit

$$\alpha = \frac{\gamma}{\gamma^2 - A^2}.$$

On a alors

$$\gamma^2 - A^2 = \frac{\gamma}{\alpha}$$

et

$$A = \sqrt{\gamma^2 - \frac{\gamma}{\alpha}} = \gamma \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma\alpha}}$$

L'équation de la trajectoire devient ainsi

$$r = \frac{\frac{1}{\gamma}}{1 + e \cos(\theta + B)}.$$

où

$$e = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma\alpha}}.$$

C'est l'équation d'une conique d'excentricité  $e$  et de demi latus rectum

$$l = \frac{b^2}{a} = \frac{1}{\gamma}$$

où  $a$  et  $b$  sont le demi grand-axe et le demi petit-axe de la conique.

En posant  $c^2 = a^2 \pm b^2$  (Le signe  $+$  correspond au cas de l'hyperbole et le signe  $-$  au cas de l'ellipse. Dans le cas de la parabole cette relation n'est pas définie et  $e = 1$ .) et en utilisant l'égalité précédente du latus rectum, on peut identifier  $a$  et  $\alpha$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 \pm b^2}}{a} = \sqrt{1 \pm \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 \pm \frac{1}{\gamma a}}.$$

En utilisant les paramètres physiques

$$l = \frac{1}{\gamma} = \frac{\ell^2}{GMm^2}$$

et

$$e = \sqrt{1 \pm \frac{1}{\gamma a}} = \sqrt{1 \pm \frac{\ell^2}{aGMm^2}}.$$

De cette dernière expression, pour une valeur de  $a$  donnée, on voit que l'excentricité dépend du moment cinétique.

Calculons l'énergie de la masse  $m$  donnée par

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r}.$$

Si l'on s'intéresse au cas de distance minimale, on voit clairement que

$$r_{\min} = \frac{1}{\gamma(1+e)}$$

étant donné que le cosinus est compris entre  $-1$  et  $+1$ . Dans ce cas, on a  $\dot{r} = 0$  et

$$v_{\min} = r_{\min}\dot{\theta}.$$

( $v_{\min}$  n'est pas la vitesse minimale, mais la vitesse à la distance minimale ; il s'agit en fait de la vitesse maximale). Comme le moment cinétique est une constante du mouvement on a

$$\ell = r_{\min}mv_{\min}$$

d'où

$$v_{\min} = \frac{\ell}{mr_{\min}} = \frac{\ell\gamma(1+e)}{m}.$$

L'énergie mécanique est également une constante du mouvement et on peut la calculer en  $r_{\min}$

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}mv_{\min}^2 - \frac{GMm}{r_{\min}} \\ &= \frac{1}{2}m \frac{\ell^2\gamma^2(1+e)^2}{m^2} - GMm\gamma(1+e) \\ &= m\gamma(1+e) \left( \frac{1}{2} \frac{\ell^2\gamma(1+e)}{m^2} - GM \right) \end{aligned}$$

En exprimant le facteur  $\gamma$  dans le premier terme de la parenthèse, on obtient

$$\begin{aligned} E &= m\gamma(1+e) \left( \frac{1}{2} \ell^2 \frac{GMm^2}{m^2\ell^2} (1+e) - GM \right) \\ &= GMm\gamma(1+e) \left( \frac{1}{2}(1+e) - 1 \right) \\ &= \frac{1}{2}GMm\gamma(1+e)(e-1) \end{aligned}$$

que l'on peut récrire

$$E = \frac{1}{2} \frac{G^2 M^2 m^3}{\ell^2} (1+e)(e-1).$$

On distingue alors les différents cas

1.  $\bullet \mathbf{e} = \mathbf{0}$  L'orbite est un **cercle** de rayon  $R = a$ . L'énergie mécanique du mouvement est négative et vaut

$$E = -\frac{1}{2} \frac{G^2 M^2 m^3}{\ell^2} = -\frac{1}{2} \frac{GMm}{R}.$$

Ce cas correspond à un moment cinétique

$$\ell^2 = GMm^2R$$

soit

$$m^2 R^2 v^2 = GMm^2 R$$

d'où une vitesse orbitale constante

$$\frac{v^2}{R} = \frac{GM}{R^2}$$

qui vaut

$$v = \sqrt{\frac{GM}{R}}.$$

2. •  $0 \leq e < 1$  L'orbite est une **ellipse**. L'énergie mécanique est négative et vaut

$$E = -\frac{1}{2} \frac{G^2 M^2 m^3}{\ell^2} (1 - e^2).$$

Ces deux cas sont des *systèmes liés*. En effet, la distance entre  $m$  et  $M$  ne peut pas excéder une valeur limite  $r_{\max}$ , car

$$E = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{GMm}{r_{\max}}$$

doit rester négatif et égal à l'expression ci-dessus. Or on voit bien que si  $r$  devient trop grand, le deuxième terme devient petit et la différence devient alors positive, car le premier terme est strictement positif (car sinon le moment cinétique est nul). Aussi,  $m$  restera dans un voisinage autour de  $M$ . D'où l'expression de système lié. La valeur de  $r_{\max}$  est clairement

$$r_{\max} = \frac{1}{\gamma(1 - e)}$$

3. •  $e = 1$  L'orbite est une **parabole**. Dans ce cas, on a

$$E = 0.$$

C'est le cas d'un système asymptotiquement libre. Lorsque  $r \rightarrow \infty$ , on a  $v \rightarrow 0$ . La masse  $m$  peut quitter la masse  $M$  et elle pourra arriver à l'infini avec une vitesse nulle. C'est le cas limite du cas libre. Avec un petit peu moins d'énergie, le système reste lié, avec un peu plus, la masse  $m$  peut encore conserver une vitesse non nulle après avoir quitté  $M$ . De l'équation de la trajectoire,  $r \rightarrow \infty$  lorsque  $\cos(\theta) = -1$ , c'est-à-dire pour  $\theta = \pi$ .

La valeur minimale est, quant à elle donnée par  $\cos(\theta) = 1$  ce qui donne

$$r_{\min} = \frac{1}{2\gamma} = \frac{\ell^2}{2GMm^2} = \frac{2GM}{v_{\min}^2}$$

où  $v_{\min}$  est la vitesse au point le plus proche, à savoir la vitesse maximale.

4. •  $e > 1$  La trajectoire est une **hyperbole**. Dans ce cas l'énergie du système est strictement positive

$$E = \frac{1}{2} \frac{G^2 M^2 m^3}{\ell^2} (e^2 - 1).$$

Le système est libre, dans le sens que même à l'infini, la masse  $m$  aura toujours une vitesse non négligeable. La masse  $m$  s'éloigne indéfiniment dans la direction qui correspond à  $\cos(\theta_l) = -\frac{1}{e}$ . Les solutions de cette équation donnent les directions des asymptotes à la trajectoire.

Le point le plus proche de  $M$  est

$$r_{\min} = \frac{1}{\gamma(1+e)} \frac{\ell^2}{(1+e)GMm^2} = \frac{(1+e)GM}{v_{\min}}$$

## 5.2 Première loi de Képler

La première observation de Képler qui résulte de l'étude des mesures des positions des planètes est que les planètes ont des trajectoires elliptiques autour du Soleil

*La trajectoire des planètes autour du Soleil est une ellipse, dont le Soleil occupe l'un des foyers.*

## 6 Troisième loi de Képler

Nous avons vu que le moment cinétique est conservé dans un mouvement centrale. La troisième loi de Képler concerne le cas des orbites fermées, donc des ellipses.

La loi des aires

$$\dot{A} = \frac{l}{2m}$$

donne par intégration sur une période, de  $t = 0$  à  $t = T$ , l'aire de l'ellipse, qui peut également s'écrire avec le moment cinétique (qui est constant)

$$A = \int_0^T \frac{\ell}{2m} dt$$

soit

$$A = \frac{\ell}{2m} T.$$

Sur un intervalle de temps de une période, l'aire couverte par le rayon vecteur est égale à l'aire de l'ellipse. Or, l'aire d'une ellipse est

$$A = \pi ab$$

où  $a$  est le demi grand-axe et  $b$  le demi petit-axe. Si  $c$  est la demi distance entre les foyers et  $e = \frac{c}{a}$  l'excentricité de l'ellipse, on a

$$a^2 = b^2 + c^2$$

d'où

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = a\sqrt{1 - e^2}.$$

Ainsi, on obtient

$$\pi a^2 \sqrt{1 - e^2} = \frac{\ell}{2m} T.$$

et

$$\sqrt{1 - e^2} = \frac{\ell}{m} \frac{1}{\sqrt{GMa}}$$

On obtient finalement

$$\pi a^2 \frac{\ell}{m} \frac{1}{\sqrt{GMa}} = \frac{\ell}{2m} T$$

soit

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{\sqrt{GM}}{2\pi}$$

que l'on peut récrire

$$\boxed{\frac{a^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2}}.$$

C'est le contenu de la troisième loi de Képler

*Le rapport du cube du demi grand-axe au carré de la période de révolution est le même pour toutes les planètes.*

## 7 Problème à trois corps

Le problème à trois corps est la généralisation triviale du problème à deux corps. Trois masses ponctuelles  $m_1$ ,  $m_2$  et  $m_3$  sont en interaction gravitationnelle et on a

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{\vec{r}}_1 &= \vec{F}_{21} + \vec{F}_{31} \\ m_2 \ddot{\vec{r}}_2 &= \vec{F}_{12} + \vec{F}_{32} \\ m_3 \ddot{\vec{r}}_3 &= \vec{F}_{13} + \vec{F}_{23} \end{aligned}$$

avec

$$\vec{F}_{ij} = Gm_i m_j \frac{\vec{r}_i - \vec{r}_j}{\|\vec{r}_i - \vec{r}_j\|^3}, \quad i \neq j.$$

### 7.1 Problème simplifié

Une simplification du problème est obtenue lorsque  $m_3 \lll m_1$  et  $m_3 \lll m_2$ , la masse d'un des corps,  $m_3$  est nettement inférieure à celle des deux autres. On peut alors considérer que l'effet de  $m_3$  sur le mouvement de  $m_1$  et  $m_2$  est négligeable.

Ainsi  $m_1$  et  $m_2$  suivent un mouvement à deux corps et le mouvement de  $m_3$  est dicté par la dynamique dans un système mobile par la loi du mouvement

$$m_3 \ddot{\vec{r}}_3 = \vec{F}_{13} + \vec{F}_{23}$$

où les mouvements de  $m_1$  et  $m_2$  sont déterminés. En reprenant la description du mouvement du problème à deux corps, dans le cas d'un mouvement circulaire on a

$$\vec{r}_1 = -r_1 \begin{pmatrix} \cos(\theta(t)) \\ \sin(\theta(t)) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{r}_2 = r_2 \begin{pmatrix} \cos(\theta(t)) \\ \sin(\theta(t)) \end{pmatrix}$$

avec  $r_1 = \frac{1}{1+\nu}$  et  $r_2 = \frac{\nu}{1+\nu}$ ,  $\nu = \frac{m_1}{m_2}$  et  $\theta(t) = \theta_0 + \Omega t$ , où

$$\Omega^2 r = \frac{GM}{r^2} \Leftrightarrow \Omega = \sqrt{\frac{GM}{r^3}}$$

où  $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$  et  $M = m_1 + m_2 = (1 + \nu)m_2$ .

On peut simplifier encore le problème en choisissant des unités simplifiées pour lesquelles les grandeurs suivantes sont adimensionnelles

$$Gm_2 = 1, \quad r = \|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\| = 1$$

On a alors

$$r_1 = \frac{1}{1+\nu}, \quad r_2 = \frac{\nu}{1+\nu}, \quad \Omega = \sqrt{1+\nu}.$$

Une masse  $m_3$  de coordonnées  $(x, y)$  dans le référentiel inertiel du centre de masse de  $m_1$  et  $m_2$  a une évolution déterminée par le lagrangien

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m_3 \dot{\vec{r}}_3^2 + Gm_3 \left( \frac{m_1}{\|\vec{r}_1 - \vec{r}_3\|} + \frac{m_2}{\|\vec{r}_2 - \vec{r}_3\|} \right)$$



En laissant tomber l'indice 3 et en utilisant les conventions d'unité précédentes on obtient

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + m_3 \left( \frac{\nu}{\|\vec{r}_1 - \vec{r}\|} + \frac{1}{\|\vec{r}_2 - \vec{r}\|} \right)$$

Posons

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \|\vec{r}_1 - \vec{r}\| = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} \\ \rho_2 &= \|\vec{r}_2 - \vec{r}\| = \sqrt{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2} \end{aligned}$$

les distances de  $m$  avec  $m_1$  et  $m_2$  respectivement. On peut écrire

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + m \left( \frac{\nu}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right)$$

## 7.2 Référentiel tournant

Prenons un référentiel lié au centre de masse, mais tournant en même temps que les masses  $m_1$  et  $m_2$  de sorte que ces masses demeurent sur l'axe  $Ox'$  en  $x_1 = -\frac{1}{1+\nu}$  et  $x_2 = \frac{\nu}{1+\nu}$  respectivement. Les coordonnées  $(x'_1, y'_1)$  de  $m_1$  et  $(x'_2, y'_2)$  de  $m_2$  restent ainsi fixes, avec  $y'_1 = y'_2 = 0$ .

Le référentiel tourne avec une vitesse angulaire  $\Omega$  et si les coordonnées de la masse  $m$  dans le référentiel initial sont  $(r, \phi)$  en coordonnées polaires, elles s'expriment maintenant avec

$$\begin{cases} x' &= r \cos(\phi - \Omega t) = r \cos(\phi) \cos(\Omega t) + r \sin(\phi) \sin(\Omega t) \\ y' &= r \sin(\phi - \Omega t) = r \sin(\phi) \cos(\Omega t) - r \cos(\phi) \sin(\Omega t) \end{cases}$$

soit, en coordonnées cartésiennes

$$\vec{r}' : \begin{cases} x' &= x \cos(\Omega t) + y \sin(\Omega t) \\ y' &= -x \sin(\Omega t) + y \cos(\Omega t) \end{cases} \Leftrightarrow \vec{r} : \begin{cases} x &= x' \cos(\Omega t) - y' \sin(\Omega t) \\ y &= x' \sin(\Omega t) + y' \cos(\Omega t) \end{cases}$$

On peut exprimer le vecteur vitesse dans le nouveau référentiel

$$\dot{\vec{r}}' : \begin{cases} \dot{x} &= \dot{x}' \cos(\Omega t) - \dot{y}' \sin(\Omega t) + \Omega(-x' \sin(\Omega t) - y' \cos(\Omega t)) \\ \dot{y} &= \dot{x}' \sin(\Omega t) + \dot{y}' \cos(\Omega t) + \Omega(x' \cos(\Omega t) - y' \sin(\Omega t)) \end{cases}$$

soit

$$\dot{\vec{r}}' : \begin{cases} \dot{x} &= (\dot{x}' - \Omega y') \cos(\Omega t) + (\dot{y}' + \Omega x') \sin(\Omega t) \\ \dot{y} &= (\dot{x}' - \Omega y') \sin(\Omega t) + (\dot{y}' + \Omega x') \cos(\Omega t) \end{cases}$$

Le Lagrangien du système dans le nouveau référentiel est ainsi

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m((\dot{x}' - \Omega y')^2 + (\dot{y}' + \Omega x')^2) + m \left( \frac{\nu}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right)$$

que l'on peut récrire

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{x}'^2 - 2\dot{x}'\Omega y' + \Omega^2 y'^2 + \dot{y}'^2 + 2\dot{y}'\Omega x' + \Omega^2 x'^2) + m\left(\frac{\nu}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}\right)$$

et en réarrangeant les termes

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{r}'^2 + \frac{1}{2}m\Omega^2 r'^2 + m\Omega(x'\dot{y}' - y'\dot{x}') + m\left(\frac{\nu}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}\right)$$

Le deuxième terme correspond au potentiel centrifuge du référentiel non inertiel et le troisième terme au potentiel de Coriolis (on reconnaît dans les parenthèses la composante  $z'$  du moment cinétique).

Les distances  $\rho_1$  et  $\rho_2$  sont inchangées (car le changement de référentiel n'est qu'une rotation) et s'expriment dans le nouveau référentiel par

$$\begin{aligned}\rho_1 &= \|\vec{r}'_1 - \vec{r}'\| = \sqrt{(x' - x'_1)^2 + y'^2} \\ \rho_2 &= \|\vec{r}'_2 - \vec{r}'\| = \sqrt{(x' - x'_2)^2 + y'^2}\end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned}\rho_1 &= \sqrt{\left(x' + \frac{1}{1+\nu}\right)^2 + y'^2} \\ \rho_2 &= \sqrt{\left(x' - \frac{\nu}{1+\nu}\right)^2 + y'^2}\end{aligned}$$

Le potentiel du lagrangien dans le nouveau référentiel est ainsi (en laissant tomber les primes pour le nouveau référentiel)

$$\frac{V(x, y, \dot{x}, \dot{y})}{m} = -\left(\frac{1}{2}\Omega^2 r^2 + \Omega(xy - yx) + \frac{\nu}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}\right)$$

### 7.3 Les points de Lagrange

Le potentiel dans le référentiel tournant que l'on vient de voir possède des points stationnaires. Cela signifie que dans ce référentiel, il y a des positions d'équilibres, telles que si  $m$  se situe immobile sur un de ces points, alors il peut y rester.

Cela signifie que sur ces points  $\dot{x} = \dot{y} = 0$ .

Le potentiel devient alors une fonction de la position uniquement

$$v(x, y) = \frac{V(x, y, 0, 0)}{m} = -\left(\frac{1}{2}\Omega^2 r^2 + \frac{\nu}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}\right)$$

soit, en développant complètement l'expression et en se rappelant que  $\Omega^2 = 1 + \nu$ ,

$$v(x, y) = -\left(\frac{1}{2}(1+\nu)(x^2 + y^2) + \frac{\nu}{\sqrt{\left(x + \frac{1}{1+\nu}\right)^2 + y^2}} + \frac{1}{\sqrt{\left(x - \frac{\nu}{1+\nu}\right)^2 + y^2}}\right)$$

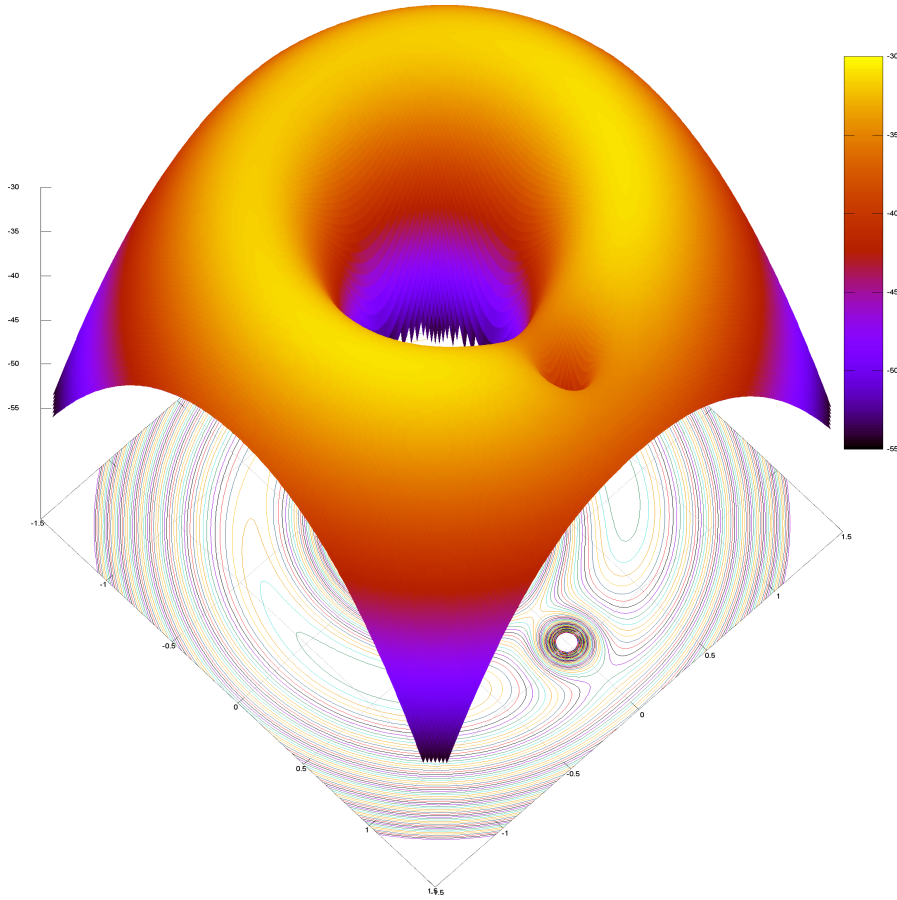


FIGURE 1 – Surface du potentiel  $v(x, y)$  pour  $\nu = 20$ .

La figure Fig.-2 illustre les courbes de niveau de ce potentiel et met en évidence les points stationnaires dans le cas  $\nu = 20$ .

Les dérivées de  $v$  par rapport à  $x$  et à  $y$ , avec  $n = \frac{1}{1+\nu}$

$$-\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{x}{n} - \frac{\nu(x+n)}{((x+n)^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{x - \nu n}{((x - \nu n)^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (5)$$

$$-\frac{\partial v}{\partial y} = y \left( \frac{1}{n} - \frac{\nu}{((x+n)^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{((x - \nu n)^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \quad (6)$$

Les points de Lagrange  $L_4$  et  $L_5$  sont situés sur les sommets des deux triangles équilatéraux de base  $m_1$  et  $m_2$  de coordonnées

$$L_4 \left( x_1 + \frac{1}{2}; -\sqrt{\frac{3}{4}} \right) \quad \text{et} \quad L_5 \left( x_1 + \frac{1}{2}; \sqrt{\frac{3}{4}} \right)$$

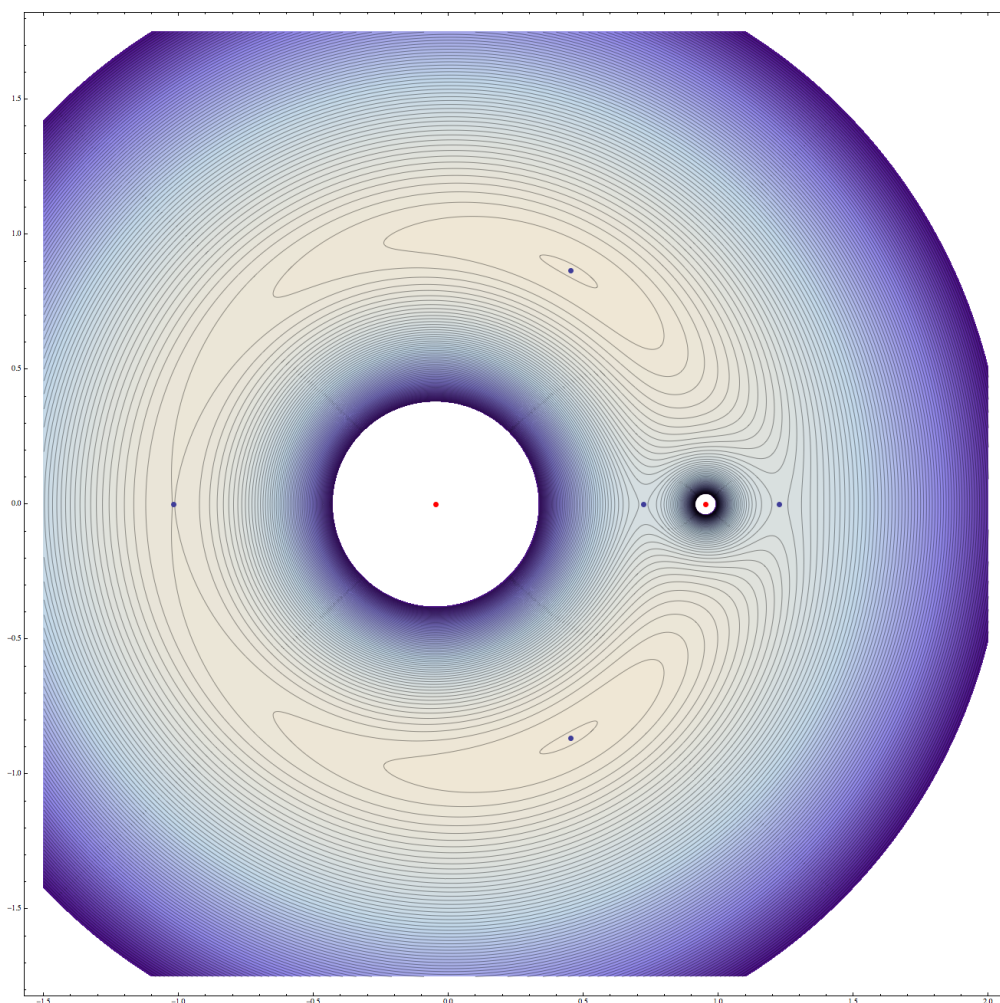


FIGURE 2 – Courbes de niveau du potentiel  $v(x, y)$  dû à deux masses de rapport  $\nu = 20$ , dont les positions sont indiquées par les points rouges. Les 5 points bleus indiquent les points stationnaires du potentiel, *les points de Lagrange*.

avec  $x_1 = -n$ , on obtient

$$L_4 \left( \frac{1}{2} - n; -\sqrt{\frac{3}{4}} \right) \quad \text{et} \quad L_5 \left( \frac{1}{2} - n; \sqrt{\frac{3}{4}} \right)$$

pour lesquels

$$\rho_1(L_{4,5}) = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1 \quad \text{et} \quad \rho_2 = \sqrt{\left(\frac{1}{2} - n(1 + \nu)\right)^2 + \frac{3}{4}} = 1$$

car  $n(1 + \nu) = 1$ . Les dénominateurs des deux derniers termes de chaque expression (5,6) valent 1.

Ainsi, en  $L_4$  et  $L_5$  on a

$$\begin{cases} -\frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{\frac{1}{2}-n}{n} - \frac{1}{2}\nu - (\frac{1}{2} - n - \nu n) = \frac{1}{2}(1 + \nu) - 1 - \frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2} = 0 \\ -\frac{\partial v}{\partial y} &= \mp \frac{\sqrt{3}}{2}(\frac{1}{n} - \nu - 1) = 0 \end{cases}$$

car  $\frac{1}{n} = 1 + \nu$ . Ce qui montre bien que  $L_4$  et  $L_5$  sont des points stationnaires du potentiel  $v$ .

Les points de Lagrange  $L_1$ ,  $L_2$  et  $L_3$  sont alignés avec les deux corps  $m_1$  et  $m_2$ . Ils sont sur l'axe des abscisses  $y = 0$  et doivent vérifier l'équation

$$-\frac{\partial v}{\partial x}\Big|_{y=0} = 0$$

qui devient

$$\frac{x}{n} - \frac{\nu(x+n)}{|x+n|^3} - \frac{x-\nu n}{|x-\nu n|^3} = 0$$

soit

$$x(x+n)^2(x-\nu n)^2 - \nu n(x-\nu n)^2 s_1 - n(x+n)^2 s_2 = 0$$

où  $s_1 = \text{sign}(x+n)$  et  $s_2 = \text{sign}(x-\nu n)$ . En posant  $k = \nu n$  on obtient une équation du 5<sup>e</sup> degré en  $x$

$$\boxed{x(x+n)^2(x-k)^2 - k(x-k)^2 s_1 - n(x+n)^2 s_2 = 0} \quad (7)$$

Le polynôme du membre de gauche de l'équation précédente est illustré sur la figure Fig.-3

Pour déterminer les points de Lagrange  $L_1$  et  $L_2$  situés respectivement de part et d'autre de  $m_2$ , avec  $L_1$  entre  $m_1$  et  $m_2$ , et dans le cas où  $\nu \gg 1$  on peut supposer que  $x = k \pm \epsilon$ . On obtient alors

$$(k \pm \epsilon)(k \pm \epsilon + n)^2 \epsilon^2 - k \epsilon^2 s_1 - n(k \pm \epsilon + n)^2 s_2 = 0$$

soit

$$(k+n \pm \epsilon)^2 (\epsilon^2 (k \pm \epsilon) - n s_2) - k \epsilon^2 s_1 = 0$$

En notant que  $k+n=1$  on trouve

$$\pm \epsilon^5 + (k+2)\epsilon^4 \pm (2k+1)\epsilon^3 + (k - n s_2 - k s_1)\epsilon^2 \mp 2n s_2 \epsilon - n s_2 = 0$$

En posant

$$f(\epsilon) = \pm \epsilon^5 + (k+2)\epsilon^4 \pm (2k+1)\epsilon^3 + (k - n s_2 - k s_1)\epsilon^2 \mp 2n s_2 \epsilon - n s_2$$

On peut utiliser la méthode de Newton pour résoudre pour  $\epsilon$ . On choisit une valeur de  $\epsilon = \epsilon_0$ . La valeur de  $f$  en  $\epsilon_0$  est  $f(\epsilon_0)$ . L'approximation de  $f$  par la tangente

$$y - f(\epsilon_0) = f'(\epsilon_0)(x - \epsilon_0)$$

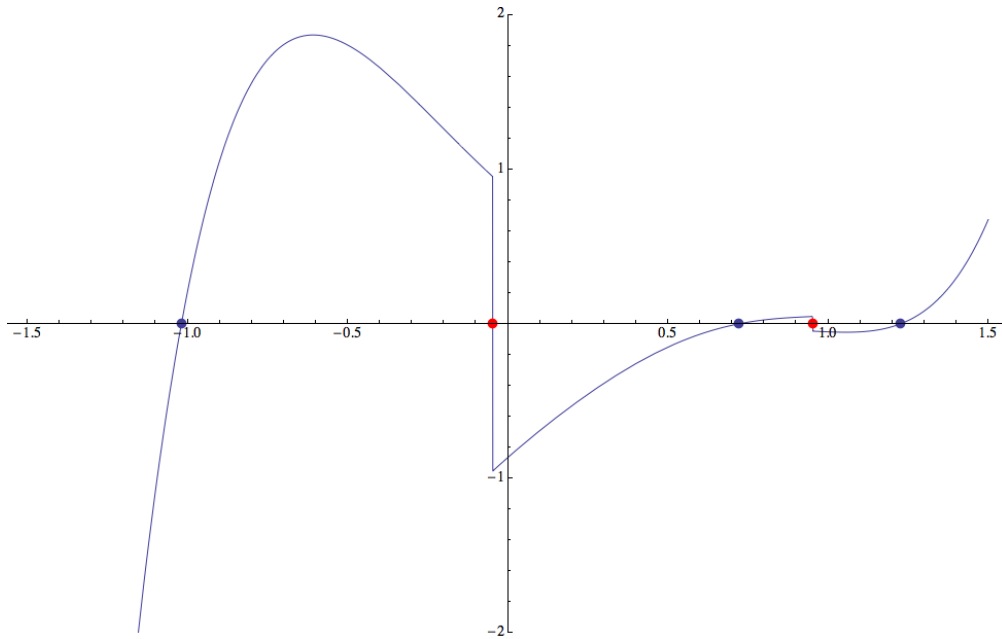


FIGURE 3 – Représentation graphique de l'équation des points de Lagrange (7). Les deux points rouges montrent l'emplacement des masses  $m_1$  et  $m_2$  de rapport  $\nu = 20$ . On voit que ce polynôme, continu par morceaux, possède trois racines (indiquées en bleu). Ce sont les positions de points de Lagrange  $L_1$ ,  $L_2$  et  $L_3$ .

donne pour  $y = 0$

$$x = \epsilon_0 + \frac{f(\epsilon_0)}{f'(\epsilon_0)}$$

Cette dernière valeur est une approximation de  $\epsilon$  disons  $\epsilon_1$ .

$$\epsilon_1 = \epsilon_0 + \frac{f(\epsilon_0)}{f'(\epsilon_0)}.$$

Puis on répète l'approximation partant de  $\epsilon_1$  pour obtenir  $\epsilon_2$  et ainsi de suite

$$\epsilon_n = \epsilon_{n-1} + \frac{f(\epsilon_{n-1})}{f'(\epsilon_{n-1})}$$

Le résultat converge alors vers  $\epsilon$ .

Pour  $\nu = 20$ , les 8 premières itérations, partant de  $\epsilon_0 = k$ , donnent

- Pour  $L_1$ , avec  $x = k - \epsilon$ ,  $s_1 = 1 = -s_2$  :

$$x_1 = 0.47440705825204331200117486909811851492027270519258$$

$$x_2 = 0.64740381087014613915767463868247400555209304736604$$

$$x_3 = 0.70978472150647609186224177631541684280954725454280$$

$$x_4 = 0.72078252299118619946876647362640340823325990280231$$

$$\begin{aligned}
x_5 &= 0.72112603692171641662143713147628449549676952986882 \\
x_6 &= 0.72112636832384016838170159219351538973435597805996 \\
x_7 &= 0.72112636832414848245247686619662598715817650700769 \\
x_8 &= 0.72112636832414848245247713304790182406882341585917
\end{aligned}$$

- Pour  $L_2$ , avec  $x = k + \epsilon$ ,  $s_1 = s_2 = 1$  :

$$\begin{aligned}
x_1 &= 1.6533146819456999203363179598629552632294264923894 \\
x_2 &= 1.4676056761167188901135504227330477811048070742733 \\
x_3 &= 1.3389196252992586636062424798164290407733572860744 \\
x_4 &= 1.2621479367423491592610537191436108155797516472177 \\
x_5 &= 1.2308563514020851001310819675424482312197074398332 \\
x_6 &= 1.2257012686261566705082422916485189548463617986803 \\
x_7 &= 1.2255704177175064286161338458373873407176381431893 \\
x_8 &= 1.2255703348537346280047172311734350916703288532562
\end{aligned}$$

Pour  $L_3$ , on procède de même avec  $x = -1 - \epsilon$  et avec  $s_1 = s_2 = -1$ . L'équation pour  $\epsilon$  est alors

$$-\epsilon^5 - (4k+3)\epsilon^4 - (6k^2+10k+3)\epsilon^3 - 4k(k+1)(k+2)\epsilon^2 - k(k^3+6k^2+7k-2)\epsilon + k(1-k)(k^2+3k+1) = 0$$

et on trouve, pour  $L_3$ , avec  $x = -1 - \epsilon$  :

$$\begin{aligned}
x_1 &= -1.5520962763086229575333923534907472862855539990719 \\
x_2 &= -1.2680839614496866894962392705519717919986717724557 \\
x_3 &= -1.0974772508675565056807331570682320870940916392843 \\
x_4 &= -1.0301180334253766720504928922449647610310340220977 \\
x_5 &= -1.0200447531649649743837386473274393090922966617404 \\
x_6 &= -1.0198353217082412783878500622690062565463573058483 \\
x_7 &= -1.0198352325686211526197235847641492464499900353191 \\
x_8 &= -1.0198352325686050096837759558315866396404916995432
\end{aligned}$$